Математички Билтен
25 (LI)
2001 (43–48)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

ЕГЗИСТЕНЦИЈА И КОНСТРУКЦИЈА НА ОПШТО ПОЛИНОМНО РЕШЕНИЕ НА ЕДНА КЛАСА СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД

Боро Пиперевски

Апстракт

Теорема: *Нека е даден системот* (1) *и нека* $ABCD(AD-BC)\neq 0$. *Системот* (1) *има општо решение полином ако и само ако постојат природни броеви* n *и* m *за кои важат условите* (9) *за некое* $p\in\{0,1,2,\ldots,m-2\}$.

Притоа, општото решение е дадено со формулата (10).

Нека е даден систем линеарни диференцијални равенки од прв ред од вид:

$$
\begin{aligned}
&(x-a)y'+Ay+Bz=0\\
&(x-b)z'+Cy+Dz=0\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

каде $a,b,A,B,C,D\in \boldsymbol{R}$ $y=y(x)$, $z=z(x)$.

Дефиниција 1. *Системот* (1) *има полиномно решение од степен* n *ако има решение* $y=P_n(x)$, $z=Q_n(x)$, *каде* $P_n(x)$ *и* $Q_n(x)$ *се полиноми од степен* n.

Лема 1. *Нека е даден системот* (1) *и нека* $ABCD\neq 0$. *Системот* (1) *има две ненулти полиномни решенија од нулти степен и од* m*-ти степен ако и само ако* $AD-BC=0$ *и постои природен број* m *така што* $A+D+m=0$, $A+p+1=0$ *за некое* $p\in\{0,1,\ldots,m-2\}$.

Во тој случај општото решение е дадено со формулата

$$y = C_1 + C_2\left[-B\int(x-a)^{-A-1}(x-b)^{-D}\,dx\right] \tag{2}$$

$$z = -\frac{A}{B}C_1 + C_2\left[A\int(x-a)^{-A-1}(x-b)^{-D}\,dx + (x-a)^{-A}(x-b)^{-D}\right],$$

C_1, C_2 – *произволни константи.*

Доказ. Нека системот (1) има полиномно решение од нулти степен и полиномно решение од m-ти стпен. Од Лема 2 [1] следи дека $AD - BC = 0$.

Нека полиномното решение од нулти степен е

$$y = 1\,, \quad z = -\frac{A}{B}. \tag{3}$$

Со смената

$$y = f\,, \quad z = -\frac{A}{B}f + w\,, \tag{4}$$

во системот (1), каде f и w се нови функции, се добива системот

$$\begin{aligned}(x-a)f' + Bw &= 0\,,\\ (x-b)\Big(-\frac{A}{B}f' + w'\Big) + Dw &= 0\end{aligned} \tag{5}$$

чие едно решение е $f = 1$, $w = 0$.

Со метод на елиминација од системот (5) се добива равенката

$$(x-a)(x-b)w' + \big[A(x-b) + D(x-a)\big]w = 0\,,$$

чие општо решение е

$$w = K_2(x-1)^{-A}(x-b)^{-D}\,, \quad K_2\text{– произволна константа,}$$

а од првата равенка на системот (4) се добива

$$f' = -K_2B(x-a)^{-A-1}(x-b)^{-D}\,.$$

Значи, општото решение на системот (5) е дадено со формулата

$$w = K_2(x-a)^{-A}(x-b)^{-D}\,,$$

$$f = -K_2B\int(x-a)^{-A-1}(x-b)^{-D}dx + K_1\,,$$

K_1, K_2 – произволни константи, па во согласност со смената (4) се добива формулата за второто решение на системот (1)

$$\begin{aligned} y &= -B\int (x-a)^{-A-1}(x-b)^{-D}dx\,, \\ z &= A\int (x-a)^{-A-1}(x-b)^{-D}\,dx + (x-a)^{-A}(x-b)^{-D}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Во согласност со условот на ова решение е полиномно решение од m-ти степен и ставајќи

$$-A-1=p\,, \quad -D=q\,, \quad p,q\in N^0 \tag{7}$$

треба да важи

$$p+q=m-1\,, \tag{8}$$

со што се добива $A+D+m=0$. Притоа, од (8) следи $p\in\{0,1,2,\dots,m-2\}$ и од релациите (7) се добива $A+p+1=0$ за некое $p\in\{0,1,2,\dots,m-2\}$. Последниот услов може да се замени со условот $D+q=0$ за некое $q\in\{1,2,\dots,m-1\}$, бидејќи $q=-D\neq 0$.

Нека сега важат условите од лемата. Од условот $AD-BC=0$ според лема 2 [1] следи дека системот (1) има едно полиномно решение од нулти степен. Согласно смената (4) се добива формулата (6) за второто решение на системот (1). Според условите ќе постои природен број m така што $A+D+m=0$, $A+p+1=0$ за некое $p\in\{0,1,\dots,m-2\}$. Со замена $-A=p+1$, $-D=m-p-1$ во формулата (6) следи дека второто решение е полином од m-ти степен.

Во согласност со формулата (6) системот (1) има општо решение (2).

Дефиниција 2. *Системот (1) има општо решение полином ако има две полиномни решенија од различни степени.*

Теорема. *Нека е даден системот (1) и нека $ABCD(AD-BC)\neq 0$. Системот (1) има општо решение полином ако и само ако постојат природни броеви n и m за кои важат условите*

$$\begin{aligned} (A+n)(D+n)-BC&=0\,, \\ A+n+D+n+m&=0\,, \\ A+n+p+1&=0\,, \end{aligned} \tag{9}$$

за некое $p\in\{0,1,2,\dots,m-2\}$.

Притоа, општото решение е дадено со формулата

$$\begin{aligned}
y =&C_1(x-a)^{-A}(x-b)^{1-D}\big[(x-a)^{A+n}(x-b)^{D+n-1}\big]^{(n)}+\\
&+C_2(-B)(x-a)^{-A}(x-b)^{1-D}\times\\
&\times\left[(x-a)^{A+n}(x-b)^{D+n-1}\int(x-a)^{-(A+n)-1}(x-b)^{-(D+n)}\,dx\right]^{(n)},\\
z =&C_1\Big(-\frac{A+n}{B}\Big)(x-a)^{1-A}(x-b)^{-D}\big[(x-a)^{A+n-1}(x-b)^{D+n}\big]^{(n)}+\\
&+C_2(x-a)^{1-A}(x-b)^{-D}\times\\
&\times\Big[(A+n)(x-a)^{A+n-1}(x-b)^{D+n}\times\\
&\times\int(x-a)^{-(A+n)-1}(x-b)^{-(D+n)}dx+(x-a)^{-1}\Big]^{(n)}.
\end{aligned}\tag{10}$$

Доказ. Нека системот (1) има општо решение полином т.е. две полиномни решенија од степен n и $n+m$. Тогаш според теорема [1] ќе важи $(A+n)(D+n)-BC=0$ и $A+n\neq 0$, $D+n\neq 0$. По n последователни диференцирања на системот (1) се добива системот

$$\begin{aligned}
(x-a)y^{(n+1)}+(A+n)y^{(n)}+Bz^{(n)}&=0\\
(x-b)z^{(n+1)}+Cy^{(n)}+(D+n)z^{(n)}&= .
\end{aligned}\tag{11}$$

Според условот системот (11) има ненулто полиномно решение од нулти степен и полиномно решение од m-ти степен, па според лема 1 ќе важи $A+n+D+n+m=0$, $A+n+p+1=0$ за некое $p\in\{0,1,\dots,m-2\}$. Со тоа се добиени условите (9).

Нека сега се задоволени условите (9). Од условите $(A+n)(D+n)-BC=0$, $A+n+D+n+m=0$ се добива дека природните броеви n и $n+m$ се корени на квадратната равенка $(A+t)(D+t)-BC=0$. Во согласност со теорема [1] системот (1) има едно полиномно решение од степен n и нема друго полиномно решение од степен помал од n. Со примена на лема 1 на системот (11) за која се задоволени условите, се добива дека системот (11) има полиномно решение од степен m. Во согласност со постапката за добивање на системот (11) и условите (9) следи дека системот (1) има уште едно полиномно решение од степен $n+m$.

Формулата за првото полиномно решение од степен n се добива според теорема [1], додека формулата за второто полиномно решение според лема 1. Во тој случај општото решение ќе биде дадено со формулата (10).

Пример 1. Системот

$$(x-1)y' - 3y + z = 0\,,$$

$$(x-2)z' + 2y - 2z = 0\,,$$

има општо полиномно решение дадено со формулите:

$$y = C_1(-4x+6) + C_2\Big(\frac{1}{3}\,x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4\Big)$$

$$z = C_1(-8x+14) + \Big(-\frac{1}{3}\,x^4 + \frac{4}{3}\,x^3 - 2x^2 + 8x - 12\Big)\,.$$

Пример 2. Системот

$$(x-1)y' - 3y + z = 0\,,$$

$$(x-2)z' + y - 3z = 0\,,$$

има општо полиномно решение дадено со формулите:

$$y = C_1(12x^2 - 32x + 22) + C_2(x-2)^4\,,$$

$$z = C_1(12x^2 - 40x + 34) + C_2(-x^4 + 4x^3 - 16x + 16)\,.$$

Литература

[1] Пиперевски Б. М. *Егзистенција и конструкција на полиномно решение на една класа системи линеарни диференцијални равенки од втор ред*, Мат. Билтен 25 (LI), 37-42 (2001).

[2] N. Serafimova, K. Mitkovska Trendova, B. Piperevski: *On a class of second order differential equations' systems, whose general solution is polynomial.*

ON EXISTENCE AND CONSTRUCTION OF A GENERAL POLYNOMIAL SOLUTION OF A CLASS OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS' SYSTEMS

B. Piperevski

Summary

Theorem. *Having* $ABCD(AD - BC) \neq 0$ *the system* (1) *has a polynomial solution, iff* $n, m \in N$ *exist, such that* (9) *for something* $p \in \{0, 1, 2, \ldots, m-2\}$.

In this case the polynomial solution of the system (1) *wil be given by the formula* (10).

Faculty of Electrical Engineering

The "St. Kiril and Metodij" University,

P.O. Box 574

1000 Skopje

MACEDONIA