# ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

*Александар Витанов*

## Увод

1. В одной статье [7] А. Стоянов показал, что дифференциальное уравнение

(1) $$(p\,x^2 + q\,x + r)^2\, y'' + (a_1\, x^2 + b_1\, x + c_1)\, y = 0,$$

где: $p, q, r, a, b, c$ — вещественные постоянные отличные от нуля, при $p\,b_1 - a_1\, q = 0$ можно записать в виде:

(2) $$(p\,x^2 + q\,x + r)^2\, y'' + [k\,(p\,x^2 + q\,x + r) + l]\, y = 0$$

($k$ и $l$ – вещественные постоянные).

Это уравнение, преобразованное при помощи подстановки $x = t - \dfrac{q}{2\,p}$ в уравнении J. Halm'a

(3) $$(x^2 \pm 1)^2\, y'' + (a\,x^2 + c)\, y = 0$$

рассматривается в статьях [1] — [3], [5] — [7]. Если $p\,b_1 - a_1\, q \neq 0$ но $4\,p\,r^2 - q^2 = 0$, то коэффициент — многочлен $p\,x^2 + q\,x + r$ перед $y''$ в (1) имеет двукратные нули и уравнение (1) принимает вид

(4) $$p^2 \left(x + \frac{q}{2\,p}\right)^4 y'' + (a_1\, x^2 + b_1\, x + c_1)\, y = 0.$$

Последнее после небольших преобразований может быть приведено к виду уравнения (2,343) из [4] $t^4\, y'' + [a\,(a-1)\, x^2 - b\,(x - b]\, y = 0$.

Пусть

(5) $$p\,b_1 - a_1\, q \neq 0 \quad \text{и} \quad 4\,p\,r - q^2 \neq 0,$$

т. е. невозможно представить уравнение (1) в виде (2) или (3).

При помощи некоторых подстановок [13] уравнение (1) можно привести к виду

$$(x^2 \pm 1)^2 y'' + (a x^2 + 2 b x + c) y = 0 \qquad (a b c \neq 0), \tag{6}$$

в котором оно и будет рассматриваться дальше.

Известно [11] и [12], что уравнение (6) имеет частное решение вида

$$y = e^{\int \frac{\alpha x + \beta}{x^2 \pm 1} d x}, \qquad \text{где } \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 a}}{2}, \quad \beta = \frac{b}{1 - \alpha}, \tag{7}$$

если удовлетворена следующая зависимость:

$$b^2 (b^2 \pm a + c - 2 a c) + (c^2 \pm c + a) a^2 = 0, \tag{8}$$

где: $a$, $b$, $c$ – параметры уравнения (6).

Тут же зависимость (8) можно записать короче и удобнее для работы следующим образом:

$$b^2 + (c \pm \alpha)(1 - \alpha)^2 = 0. \tag{8a}$$

Чтобы уравнение (6) имело частное решение вида

$$y = e^{\int \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(x^2 \pm 1)(x - x_1)} d x} \quad \text{т. е. } y = (x - x_1)\, e^{\int \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{x^2 \pm 1} d x} \tag{9}$$

($x_1$ — произвольное вещественное), должно быть выполнено условие

$$b^2 (b^2 \pm 21 a + 5 c \mp 12 - 2 a c) + (c^2 \mp 3 c + 9 a)(a + 2)^2 = 0, \tag{10}$$

известро из [12] и которое может быть представлено в виде

$$b^2 + (c \pm 3 \alpha \mp 3)(2 - \alpha)^2 = 0, \tag{10a}$$

где:
$$\alpha_1 = \alpha - 1, \quad \beta_1 = \frac{b}{2 - \alpha}, \quad \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 a}}{2}.$$

И если дифференциальное уравнение (6) имеет частное решение вида

$$(11)\qquad y = e^{\int \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}{(x^2 \pm 1)[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2]} dx}$$

т. е.

$$y = (x - x_1)(x - x_2)\, e^{\int \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{x^2 \pm 1} dx}$$

$x_1$, $x_2$ — произвольные, то выполняется условие

$$(12)\qquad b^2(b^2 \pm 61a + 13c \mp 84 - 2ac) + (c^2 \mp 11c + 25a + 24)(a + 6)^2 = 0,$$

известно из [13] и которое можно записать следующим образом:

$$(12a)\qquad b^2 + (c \pm 5\alpha \mp 8)(3 - \alpha)^2 = 0,$$

где:

$$\alpha_2 = \alpha - 2, \quad \beta_2 = \frac{b}{3 - \alpha}, \quad \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}.$$

Мы будем искать условия, при которых уравнение (6) имело бы решение более общего вида, т. е. хотим найти условия, при которых (6) имело бы частное решение вида

$$(13)\qquad y = e^{\int \frac{\alpha x^{n+1} + \beta x^n + \ldots + \gamma x + \delta}{(x^2 \pm 1)(x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_n)} dx}$$

т. е.

$$y = P_n(x)\, e^{\int \frac{\alpha_n x + \beta_n}{x^2 \pm 1} dx}.$$

2. Чтобы найти условия, при которых дифференциальное уравнение (6) имеет частное решение вида (13), нам придется рассмотреть дифференциальное уравнение

$$(14)\qquad (x^2 \pm 1) P_n''(x) + (2\alpha_n x + 2\beta_n) P_n'(x) + \lambda_n P_n(x) = 0.$$

Это уравнение в более общем виде

$$(15)\qquad [a_m x^m + P_{m-1}(x)]\, y^{(m)} + [a_{m-1} x^{m-1} + P_{m-2}(x)]\, y^{(m-1)} + \ldots +$$
$$+ [a_2 x^2 + P_1(x)]\, y'' + (a_1 x + P_0)\, y' + a_0 y = 0$$

где: $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ — вещественные постоянные, $P_{m-1}(x)$, $P_{m-2}(x)$, $\ldots$, $P_2(x)$, $P_1(x)$, $P_0$ – полиномы степени $\leqq$ соответствующего индекса, рассматривалось итальянским математиком *Antonio Mambriani*, а позже и немного в другом аспекте австрийским математиком *Peter Lesky* [9] и американским математиком *James Horner* [10].

*A. Mambriani* [8] показал, для того, чтобы дифференциальное уравнение (15) имело полиномиальное решение необходимо и достаточно, чтобы алгебраическое уравнение

$$(16)\quad f(r) = a_m r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1) + a_{m-2} r(r-1)\ldots(r-m+2) + \\ + \ldots + a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0$$

имело хотя бы один целый неотрицательный корень. Если $n$ – наименьший из целых неотрицаельных корней алгебраического уравнения (16), то дифференциальное уравнение (15) имеет своим решением один и только один полином $P_n(x)$ степени $n$ и не имеет полиномиального решеня степени $< n$. Далее, если $n$ – единственный целый неотрицательный корень уравнения (16), то (15) меет одно и только одно полиномиальное решение. Это полиномиальное решение, записанное в операторном виде, будет

$$(17)\qquad y_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{a_\mu{}^\nu} \Big[x^n I_x^{r_2-n-1} I_x^{r_3-r_2-1} \ldots \\ \ldots I_x^{r_\mu-r_{\mu-1}-1} I_x^{-r_\mu-1}\left(P_{m-1}D^m + \ldots + P_1 D^2 + P_0 D\right)\Big]^\nu x^n$$

где: $a_\mu$ — первый из коэффициентов $a_m, a_{m-1}, \ldots a_2, a_1, a_0$ отличный от нуля; $r_2, r_3, \ldots, r_\mu$ – остальные корни уравнения (6);

$$\Big[x^n I_x^{r_2-n-1} I_x^{r_3-r_2-1} \ldots \\ \ldots I_x^{r_\mu-r_{\mu-1}-1} I_x^{-r_\mu-1}\left(P_{m-1}D^m + P_{m-2}D^{m-1} + \ldots + P_1 D^2 + P_0 D\right)\Big]^n$$

оператор, в котором $D$ соответствующая производная, $I$ - дистрибутивный оператор, определенный следующим способом:

$$I x^\nu = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} \quad (\nu \neq -1).$$

В случае, рассматриваемом нами, далее соответствующее уравнению (14) алгебраическое уравнение вида (16), будет

$$(18)\quad r(r-1)+2\alpha_n r+\lambda_n=0\quad(\lambda_n=\alpha_n^2-\alpha_n+a,\ a_2=1,\ a_1=2\alpha_n,\ a_0=\lambda_n),$$

а частное полиномиальное решение уравнения (14) принимает вид

$$(19)\quad P_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\left[x^n I_x^{r_2-n-1} I_x^{-r_2-1} I_{(D^2+2\beta_n D)}\right]^{\nu}x^n.$$

*A Mambriani* показывает, что уравнение (15) [соответно (14)] имеет полиномиальное решение степени $n$ и не имеет полиномиальных решений степени $< n$ и если алгебраическое уравнение (16) [соответно (18)] имеет единственный целый не отрицательный корень, то уравнение (15) (соответно (14)) имеет единственное полиномиальное решение. Для случая, когда уравнение (16) [соответно (18)] имеет больше, чем один целый неотрицательный корень, у него ничего не говорится о том, имеются или нет полиномиальные решения степеней равных другим целым неотрицательным корням большим, чем $n$. Далее в ходе доказательства теоремы II мы покажем, что, когда между параметрами уравнения (14) существует зависимость $\pm(\beta_n^2\pm\alpha_n+c)=$ $=\alpha_n^2-\alpha_n+a$ $\left(\beta_n=\dfrac{b}{1-\alpha_n},\ a,\ b,\ c\right.$ — параметры уравнения (6)), которое мы получили позже, в случае, когда алгебраическое уравнение имеет два целых неотрицательных корня, тем не менее имеется одно и только одно полиномиальное решение степени равной меньшему неотрицательному целому корню.

Оба случая дифференциального уравнения (6) связаны с соответствующими уравнениями (14) и которые представляют собой аналоги, рассмотрим отдельно, рассматривая подробнее дифференциальное уравнение (6) со знаком $+$, а со знаком минус рассмотрим короче, ссылаясь на доказательство о первом параграфе.

## § 1.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(1.\ 1)\qquad (x^2+1)^2 y''+(a x^2+2 b x+c)\, y=0\qquad(a b c\neq 0).$$

Теорема 1. Если уравнение (1. 1) имеет частное решение вида

$$y=e^{\displaystyle\int\frac{\alpha x^{n+1}+\beta x^n+\ldots+\nu x+\tau}{(x^2+1)(x^n+B_1 x^{n-1}+\ldots+B_{n-1}x+B_n)}dx}=$$

$$=e^{\displaystyle\int\frac{R_{n+1}(x)}{(x^2+1)P_n(x)}dx}$$

т. е.

$$(1.\ 2)\qquad y = e^{\int\left[\frac{\alpha_n x + \beta_n}{x^2+1} + \frac{Q(x)}{P_n(x)}\right]dx} \qquad (Q(x_i) \neq P_n(x_i) = 0)$$

то его можно представить следующим образом:

$$(1.\ 3)\qquad y = e^{\int\left(\frac{\alpha_n x + \beta_n}{x^2+1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x - x_i}\right)dx} = P_n(x)\, e^{\int \frac{\alpha_n x + \beta_n}{x^2+1}dx},$$

где:

$\alpha_n = \alpha - n,\ \beta_n = \dfrac{b}{n+1-\alpha},\ \alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$, $n$ – степень полинома

$$(1.\ 4)\qquad P_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1}x + B_n$$

($x_i \neq x_k$ для $i \neq k$; $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, B_n$ – вещественные постоянные).

Доказательство. Пусть даны следующие произвольные числа:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ *и* $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ ($x_l \neq x_k$ *при* $l \neq k$, $y_i$ — вещественные $\neq 0$).

Рассмотрим дробную рациональную функцию $\dfrac{Q(x)}{P_n(x)}$ определенную следующим образом:

$P_n(x)$ — многочлен $n$-ой степени с вещественными коэффициентами и простыми нулями $x_i$ ($x_i \neq \pm\sqrt{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1, n$) т. е.

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \quad (x_i \neq x_k \text{ для } i \neq k,\ i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Производная полинома $P_n(x)$ будет

$$P_n'(x) = \frac{d}{dx}\prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = P_n(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x - x_i}.$$

Тогда при $x = x_i$

(1. 5) $$P_n'(x_i) = \prod_{k=1}^{i-1} (x_i - x_k) \cdot \prod_{l=i+1}^{n} (x_i - x_l) =$$

$$= (x_i - x_1)(x_i - x_2) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n) \neq 0 \quad (x_i \neq x_k,\ i \neq k).$$

$Q(x)$ — полином степени $m \leqq n - 1$, который не имеет общего делителя с полиномом $P_n(x)$, определенный интерполационной формулой Lagrang'a:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)} y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{y'}{P_n'(x_i)} \frac{P_n(x)}{x - x_i}.$$

Так как по определению полинома $Q(x)$ при $x = x_i$ отлично от нуля $Q(x_i) = y_i \neq 0$, то дробная рациональная функция $\frac{Q(x)}{P_n(x)}$ будет

(1. 6) $$\frac{Q(x)}{P_n(x)} = \frac{1}{P_n(x)} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{P_n'(x_i)} \frac{P_n(x)}{x - x_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{P_n'(x_i)} \frac{1}{x - x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Предположим, что (1. 2) частное решение дифференциального уравнения (1. 1). Дифференцируя (1. 2) два раза по $x$ и подставляя $\frac{y''}{y}$ в уравнение (1. 1), после некоторых преобразований получаем

(1. 7) $$[(\alpha_n^2 - \alpha_n + a) x^2 + 2(\alpha_n \beta_n - \beta_n + b) x + \beta_n^2 + \alpha_n + c] P_n^2(x) +$$

$$+ 2(x^2 + 1)(\alpha_n x + \beta_n) Q(x) P_n(x) + (x^2 + 1)^2 [Q^2(x) +$$

$$+ Q'(x) P_n(x) - Q(x) \cdot P_n'(x)] = 0.$$

Так как мы претположили, что (1. 2) частное решение дифференциального уравнения (1. 1), то левая часть уравнения (1. 6) должна удовлетворяться тождественно для каждого $x$, в частности, и для $x = x_i$ ($x_i \neq \pm\sqrt{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$). Тогда, если в соотношение (1. 6) положим $x = x_i$ и приняв во внимание, что (по определению) $P_n(x_i) = 0$ имеем

$$(x_i^2 + 1)^2 Q(x_i)[Q(x_i) - P_n'(x_i)] = 0.$$

Так как $x_i^2 + 1 \neq 0$ и $Q(x_i) = y_i \neq 0$, *то*

$$Q(x_i) - P_n'(x_i) = 0, \quad \textit{т. е} \quad P_n'(x_i) = Q(x_i) = y_i \neq 0.$$

Тогда, если в (1. 5) подставим $P_n'(x_i)$ с $y_i$, то это соотношение приводится к виду

$$\text{(1. 8)} \qquad \frac{Q(x)}{P_n(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i},$$

а частное решение (1. 2) принимает вид (1. 3), чем теорема доказана.

Теорема II. Для того, чтобы дифференциальное уравнение

$$\text{(1. 1)} \qquad (x^2 + 1)^2 y'' + (a x^2 + 2 b x + c) y = 0 \qquad (a. b. c \neq 0)$$

имело частное решение вида

$$\text{(1. 3)} \qquad y = e^{\int \frac{\alpha_n x + \beta_n}{x^2 + 1} dx} \cdot P_n(x), \text{ т. е. } y = (x^2 + 1)^{\frac{\alpha_n}{2}} \cdot e^{\beta_n \operatorname{arctg} x} \cdot P_n(x)$$

($P_n(\pm i) \neq 0$), необходимо и достаточно чтобы его параметры $a$, $b$, $c$ удовлетворяли соотношению

$$\text{(1. 9)} \qquad b^2 + [c + (2n + 1)\alpha - n(n + 2)](n + 1 - \alpha)^2 = 0,$$

где $n$ — целое неотрицательное число — степень полинома

$$\text{(1. 4)} \qquad P_n(x) = x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1} x + B_n$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \quad (x_i \neq x_k,\ i \neq k)$$

($B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, B_n$ — вещественные постоянные) и

$$\alpha_n = \alpha - n,\ \beta_n = \frac{b}{n + 1 - \alpha},\ \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}\left(a \leqq \frac{1}{4}\right). \tag{1. 10}$$

Доказательство.

Докажем вначале необходимость. Предположим, что дифференциальное уравнение (1. 1) имеет частное решение вида (1. 3). Дифференцируя (1. 3) два раза по $x$, после постановки соответствующих выражений для $y$ и $y''$ в (1. 1) и сокращения на общий множитель $e^{\int \frac{\alpha_n x + \beta_n}{x^2 + 1} dx} \neq 0$ получаем

$$\{(\alpha_n^2 - \alpha_n + a)\, x^2 + 2\,[(\alpha_n - 1)\, \beta_n + b]\, x + \beta_n^2 + \alpha_n + c\}\, P_n(x) + \tag{1. 11}$$
$$+ (x^2 + 1)\,[(x^2 + 1)\, P_n''(x) + 2\,(\alpha_n x + \beta_n)\, P_n'(x)] = 0.$$

По отношению к многочлену $P_n(x)$ это соотношение представляет обыкновенное дифференциальное уравнение II-го порядка с полиномиальными коэффициентами. Так как в соотношении (1. 11) второе выражение делится на $x^2 + 1 \neq 0$, то и первое выражение должно делиться на $x^2 + 1$. Чтобы это было возможно (по предположению $P_n(\pm i) \neq 0$) должно

$$(\alpha_n - 1)\, \beta_n + b = 0,\ \beta_n = \frac{b}{1 - \alpha_n} \tag{1. 12}$$

$$\beta_n^2 + \alpha_n + c = \alpha_n^2 - \alpha_n + a. \tag{1. 13}$$

Эта система дает возможность определить $\alpha_n$ и $\beta_n$, но к этому вернемся позже. Если учесть (1. 12) и (1. 13), то соотношение (1. 11) принимает вид

$$(x^2 + 1)\, P_n''(x) + (2\,\alpha_n x + 2\,\beta_n)\, P_n'(x) + \lambda_n P_n(x) = 0, \tag{1. 14}$$

где положили

$$\alpha_n^2 - \alpha_n + a = \lambda_n. \tag{1. 15}$$

Как уже было упомянуто в пункте 2, это дифференциальное уравнение имеет полиномиальное решение (19) при выполнении условия (18), т. е. тогда существует полином степени $n$

$$P_n(x) = x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1} x + B_n, \tag{1. 4}$$

для которого соотношения (1. 14) и (1. 11) удовлетворяются тождественно. Найдем теперь условия, связывающие параметры дифференциального уравнения (1.•14) и коэффициенты полинома $P_n(x)$. Это сделаем методом неопределенных коэффициентов.

Дифференцируя (1. 4) два раза и подставляя соответствующие значения $P_n(x)$, $P_n'(x)$, $P_n''(x)$ получаем

$$(1.\ 16)\quad [n(n-1)+2n\alpha_n+\lambda_n]x^n+\{[(n-1)(n-2)+2(n-1)\alpha_n+\lambda_n]B_1+$$

$$+2n\beta_n\}x^{n-1}+\sum_{i=0}^{n-2}\{n(n-1)B_i+2(n-1)\beta_n B_{i+1}+[2(n-2)\alpha_n+$$

$$+(n-2)(n-3)+\lambda_n]B_{i+2}\}=0.$$

Чтобы полином (1. 16) был тождественно равен нулю, коэффициент при $x^n$ должен быть равен нулю, т. е.

$$(1.\ 17)\qquad n(n-1)+2n\alpha_n+\lambda_n=0.$$

Но видно, что это и есть — условие (18), т. е. условие того, чтобы уравнение (14) имезо полиномиальное решение.

Если сопоставим соотношения (1. 12), (1, 13), (1.15) и (1. 17), то, приравнивая соотношения (1. 15) и (1. 17), т. е.

$$\alpha_n^2-\alpha_n+a=n(n-1)+2n\alpha_n$$

получаем

$$(1.\ 18)\qquad \alpha_n=\alpha-n.$$

Из (1. 12) имеем

$$(1.\ 19)\qquad \beta_n=\frac{b}{1-\alpha_n}=\frac{b}{n+1-\alpha}.$$

Если подставим $\alpha_n$ из (1. 18) в (1. 17), находим

$$(1.\ 20)\qquad \lambda_n=n(n+1)-2n\alpha,$$

где:

$$(1.\ 21)\qquad \alpha=\frac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}\left(a\leqq\frac{1}{4}\right).$$

Если подставим вместо $\alpha_n$ и $\beta_n$ их значения из соотношения (1. 13), получаем (1. 9)

$$b^2 + [c + (2n+1)\alpha - n(n+2)](n+1-\alpha)^2 = 0 \tag{1. 9}$$

($n$ — целое неотрицательное число — степень полинома). Этим необходимость доказана.

Докажем достаточность. Предположим, что параметры $[a(\alpha), b, c]$ данного дифференциального уравнения (1. 1) удовлетворяют соотношениям (1. 9) при некотором целом неотрицательном числе $n$. Этим значениям $(n, \alpha)$ соответствуют определенные значения $\alpha_n$, $\beta_n$, $\lambda_n$, которые удовлетворяют соотношениям (1. 12), (1. 17) и (1. 13). Покажем, что существует один единственный полином, который удовлетворяет тождественному дифференциальному уравнению (1. 14), а следовательно удовлетворяет и соотношению (1. 16). Для этой цели установим существование решения системы

$$\text{(1. 22)}\quad \left|\begin{array}{l} [2(n-1)\alpha_n + (n-1)(n-2) + \lambda_n] B_1 + 2n\beta_n = 0, \\ (n-i)(n-i-1) B_i + 2(n-i-1)\beta_n B_{i+1} + [2(n-i-2)\alpha_n + \\ + (n-i-2)(n-i-3) + \lambda_n] B_{i+2} = 0, \\ (i = 0, 1, 2, \ldots, n-2;\ B_o = 1). \end{array}\right.$$

Она получается приравниванием коэффициентов полинома (1. 16) к нулю. После подстановки значений $\alpha_n$, $\beta_n$, $\lambda_n$ соответно из (1. 18), (1. 19) и (1. 20) система (1. 22) принимает более простой вид

$$\text{(1. 23)}\quad \left|\begin{array}{l} 1.(2-2\alpha) B_1 + 2n\beta_n = 0 \\ (n-i)(n-i-1) B_i + 2(n-i-1)\beta_n B_{i+1} + \\ (i+2)(i+3-2\alpha) B_{i+2} = 0\ (i = 0, 1, 2, \ldots, n-2, B_o = 1). \end{array}\right.$$

Система неоднородная и чтобы она имела единственное решение определитель, образованный из коэффициентов при неизвестных $B_o = 1, B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, B_n$, должен быть отличен от нуля. Определитель имеет следующий вид:

$$\text{(1. 24)}\qquad \Delta_n = |a_{il}| \quad \begin{cases} a_{il} = 0 \text{ при } i < l \text{ и } i-2 > l, \\ a_{il} = i(i+1-2\alpha) \text{ при } i = l, \\ a_{i+1\,l} = 2(n-i)\beta_n, \\ a_{i+2\,l} = (n-i)(n-i-1) \quad (i, l = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Так как все элементы определителя (1. 24) выше главной диагонали суть нули, то его значение, как известно, равно

(1. 25) $$\Delta_n = \prod_{i=1}^{n} i(i+1-2\alpha).$$

Если $2\alpha \neq i+1 \left(\alpha \neq \frac{i+1}{2}\right)$, $i \leqq n$, $n$ — степень полинома $P_n(x)$, то определитель (1. 24) $\Delta_n \neq 0$ и неоднородная система (1. 23) имеет единственное решение. Иными словами, существует единственный полином $P_n(x)$, который удовлетворяет соотношению (1. 14). Допустим, что для некоторого $i = k$ определитель системы обращается в нуль ($\Delta_n = 0$) (как увидим дальше, это возможно, когда алгебраическое уравнение (1.17) имеет два целых неотрицательных корня и порядок определителя отвечает большему корню $n_2 > n_1$).

Но тогда должно быть

(1. 26) $2\alpha = k+1$ или $k = 2\alpha - 1 = \sqrt{1-4a}$ ($k$ — натуральное число $\leqq n_2$; $k > n_1$).

Рассмотрим теперь случай, когда определитель системы обращается в нуль. Покажем, что тогда наша система не совместная. Предположим, что определитель обращается в нуль в силу равснства нулю первого элемента главной диагонали, т. е. $2 - 2\alpha = 0$ или $\alpha = 1$. Тогда система (1. 23) не имеет решения, так как $\Delta_{n_1} \neq 0$ ($\Delta_{n_1} = -2\beta_n n \prod_{i=2} i(i-1)$; $\Delta_{n_1}$ — определитель, полученный из определителя $\Delta_n$ подставлением вместо первого столбца — свободных членов системы (1. 23)).

Если $\Delta_n = 0$ из-за того, что второй элемент главной диагонали $3 - 2\alpha = 0$ ($\alpha = 1, 5$), система опять несовместна, так как $\Delta_{n_2} \neq 0$

$$\left(\Delta_{n_2} = \begin{vmatrix} 1 & -2n\beta_n \\ 2(n-1)\beta_n & -(n-1)n \end{vmatrix} \prod_{i=3}^{n} i(i+1-3)\right.$$

$$\left. = -n(n-1)(4\beta_n^2+1) \prod_{i=3}^{n} (i-2) \neq 0, n > 2\right),$$

где $\Delta_{n_2}$ получен из определителя $\Delta_n$ подставлением вместо второго столбца — свободных членов системы (1. 23).

Допустим, что к-тий элемент главной диагонали равен нулю; иными словами, допустим, что $\alpha = \frac{k+1}{2}$ $(k \leqq n > 2)$, т. е. $\Delta_n = 0$. Покажем, что система тоже несовместная.

Согласно теории систем линейных уравнений, по теореме Руще (Кронекера — Капели), система (1. 24) совместная, тогда и только тогда, когда ранг матрицы, формированной из коэффициентов системы (1. 25) равен рангу расширенной матрицы, полученной из первой присоединением столбца свободных членов.

Обозначим через $L$ матрицу из коэффициентов системы (1. 24) с предположением, что к-тый элемент главной диагонали равен нулю т. е. $\alpha = \frac{k+1}{2}$.

$$(1.\ 26)\quad L = \|a_{il}\| \begin{cases} a_{il} = 0 \text{ для } i < l \text{ и } i - 2 > l, \\ a_{il} = k(k + 1 - 2\alpha) \text{ при } i = l = k, \\ a_{i+1l} = 2(n-i)\beta_n \text{ при } i + 1 = l, \\ a_{i+2l} = (n-i)(n-i-1) \text{ при } i + 2 = l \ (i, l = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

а через $M$ — матрицу, полученную из $L$ присоединением столбца свободных членов, поставленного на место $k$-го столбца, а $k$-тый столбец поставлен как последний столбец матрицы. Покажем, что эти две матрицы с различным рангом. Легко доказывается, что матрица $L - n - 1$ — го ранга. Определитель получен из матрицы $L$, вычеркивая к-го столбца и к-ую строку, представляет определитель $n - 1$ - го порядка вида (1. 25) и его значение равно

$$(1.\ 27)\qquad \Delta'_{n-1} = \prod_{i=1}^{k-1} i(i+1-k) \prod_{i=k+1}^{n} i(i+1-k) \neq 0,$$

(так как $i + 1 - k \neq 0$).

Из матрицы $M$ видно, что определитель $n$ -того порядка $\Delta'_n$, полученный из нее вычеркиванием последнего столбца, можно представить в виде произведения двух определителей $\Delta_k$ и $\Delta_{n-k}$ т. е.

$$(1.\ 28)\qquad \Delta'_n = \Delta_k \cdot \Delta_{n-k}$$

где:

(1. 29) $\Delta_k =$

$$
= \begin{vmatrix}
1(1-k) & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & -2n\beta_n \\
2(n-1)\beta_n & 2(2-k) & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & -n(n-1) \\
(n-1)(n-2) & 2(n-2)\beta_n & 3(3-k) & 0\cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & (n-2)(n-3) & 2(n-3)\beta_n & 4(4-k)\cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & & & & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0\cdots & (k-2)(-2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0\cdots & 2(n+2-k)\beta_n & (k-1)(-1) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0\cdots & (n+2-k)(n+1-k) & 2(n+1-k)\beta_n & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & (n+1-k)(n-k) & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
(1.\ 30) \qquad \Delta_{n-k} = |a_{il}| \begin{cases} a_{il} = 0 \text{ при } i < l \text{ и } i-2 > l, \\ a_{il} = i(i-k) \text{ при } i = l, \\ a_{i+1\,l} = 2(n-i)\beta_n \text{ при } i+1 = l, \\ a_{i+2\,l} = (n-i)(n-i-1) \text{ при } i+2 = l\,(i, l = k+1, \cdots, n). \end{cases}
$$

Сразу видно, что определитель

$$
(1.\ 31) \qquad \Delta_{n-k} = \prod_{i=k+1}^{n} i(i-k) \neq 0.
$$

Покажем, что и $\Delta_k \neq 0$, чем установим, что матрица $M - n$ -того ранга.

Разложим его по элементам первой строки. Получаем:

(1. 32) $\Delta_k = (-1)^k (k-1)n(n-1) \times$

$$
\times \begin{vmatrix}
2(n-2)\beta_n & 3(3-k) & 0\cdots & 0 & 0 \\
(n-2)(n-3) & 2(n-3)\beta_n & 4(4-k)\cdots & 0 & 0 \\
\cdot & & & & \cdot \\
\cdot & & & & \cdot \\
\cdot & & & & \cdot \\
0 & 0 & 0\cdots\ (k-2)(-2) & & 0 \\
0 & 0 & 0\cdots\ 2(n+2-k)\beta_n & & (k-1)(-1) \\
0 & 0 & 0\cdots\ (n+2-k)(n+1-k) & & 2(n+1-k)\beta_n
\end{vmatrix} +
$$

$$+(-1)^k\cdot 2n\beta_n \times$$

$$\times\begin{vmatrix} 2(n-1)\beta_n & 2(2-k) & 0 & 0\cdots & 0 & 0 \\ (n-1)(n-2) & 2(n-2)\beta_n & 3(3-k) & 0\cdots & 0 & 0 \\ 0 & (n-2)(n-3) & 2(n-3)\beta_n & 4(4-k)\cdots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots(k-2)(-2) & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 2(n+2-k)\beta_n & & (k-1)(-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots(n+2-k)(n+1-k) & & 2(n+1-k)\beta_n \end{vmatrix}$$

Оба эти определителя вида Якоби. Их отличает только то, что первый $(K-2)$ – го порядка, а второй $(K-1)$ – го порядка.

Для определителей Якоби известно [15] (стр. 28) следующая рекурентная зависимость

$$\Delta_n = a_n\Delta_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1}\Delta_{n-2}. \tag{1. 33}$$

Когда $b_{n-1}\cdot c_{n-1} < 0$ определитель Якоби $\neq 0$.

Действительно, элементы ниже главной диагонали в этих двух определителей положительные (натуральные) числа, элементы выше главной диагонали – целые отрицательные числа и, если элементы главной диагонали положительные $(b > 0)$, то эти два определителя положительны. Иными словами, $\Delta_{k-2} > 0$ и $\Delta_{k-1} > 0$. Отсюда следует, что соотношению (1. 32) можно придать следующий вид:

$$\frac{\Delta_k}{(-1)^k} = (k-1)n(n-1)\Delta_{k-2} + 2n\beta_n\Delta_{k-1} > 0 \text{ или } \Delta_k \neq 0. \tag{1. 34}$$

Если $\beta_n < 0$ $(b < 0)$, то после умножения каждой строки на минус единицу определитель быть может быть сменит знак и, если он был отличен от нуля, он остается тоже отличен от нуля. Тогда элементы главной диагонали и элементы выше главной диагонали положительны, а элементы ниже главной диагонали отрицательны. Следовательно, и при этом случае $\Delta_k \neq 0$. Так как показано, что $\Delta_k \neq 0$ (1. 31) и $\Delta_{n-k} \neq 0$ (1. 30), то их произведение (1. 28) будет определитель $n$ – го порядка, который тоже будет отличен от нуля. Но тогда матрица этого определителя будет $n$ – го ранга.

Следовательно, матрица $L$ и матрица $M$ будут различного ранга и система (1. 23) несовместна. Этим показано, что дифференциальное уравнение (1. 14) имеет полиномиальное решение, только тогда, когда определитель $\Delta_n \neq 0$. Покажем, что определитель отличен от нуля, когда алгебраическое уравнение (1. 17) имеет единственный целый неотрицательный корень и если имеются два целях неотрицательных корней, то определитель соответсвующий меньшему корню $\Delta_{n_1} \neq 0$, а для большого корня определитель $\Delta_{n_2}$ будет равен нулю.

Из определителя (1. 24) видно, что он может обращаться в нуль только для одного значения $\alpha = \frac{k+1}{2}$. Элементы до $k$ – го столбца его главной диагонали будут отрицательные, $k$ – ий элемент главной диагонали обращается в нуль, а следующие элементы главной диагонали положительные.

Доказано [8], что когда алгебраическое уравнение (1. 17) имеет один целый неотрицательный корень, дифференциальное уравнение (1. 14) имеет одно единственное полиномиальное решение, т. е. тогда существует единствеенный полином $P_n(x)$. Ему соответствует система (1. 23) с определителем $\neq 0$, в котором все элементы главной диагонали одного знака, т. е.

$$2(1-\alpha)n_1(n_1+1-2\alpha) > 0.$$

Допустим, что алгебраическое уравнение (1. 17) имеет два целых неотрицательных корня. Они будут

$$n_1 = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2} - \alpha_n \quad \text{и} \quad n_2 = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2} - \alpha_n.$$

Тогда $n_2 - n_1 = \sqrt{1-4a} = k$ или $(n_2 = n_1 + k)$

($k$ – целое натуральное число).

Известно [8], что меньшему корню отвечает полиномиальное решение уравнений (1. 14) степени $n_1$, следовательно соответствует система вида (1. 23) с определителем $\neq 0$.

Допустим $\alpha > 1$ и что большему корню $n_2$ соответствует система вида (1. 23). Покажем, что она несовместна. Действительно произведение первого и последнего элемента главной диагонали будет

$$2(1-\alpha)n_2(n_2+1-2\alpha) = 2(1-k)(n_1+k)n_1 \leqq 0.$$

Следовательно, произведение $\leqq 0$; это означает, что определитель $\Delta_{n_2} = 0$, но, как показано выше, тогда система несовместна и полиномиальное решение не существует, чем полностью доказана достаточность.

Соотношение (1. 9) можно привести в немного другом виде. Если подставим $\alpha = \frac{1+\varepsilon\sqrt{1+4a}}{2}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ из (1. 21) в (1. 9), после некоторых несложных преобразований с учетом того, что $\alpha^2 = \alpha - a$ плучаем (1. 33)

$$b^2[b^2+(2n^2+2n+1)c+(10n^2+10n+1)a-2ac-$$
$$-2n(n+1)(n^2+n+1)]+\{c^2+(2n+1)^2a+[-2(n+1)^2+$$
$$+2(n+1)+1]c+n(n^2-1)(n+2)\}[a+n(n+1)]^2=0. \tag{1. 33}$$

## ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Особый интерес представляют следующие частные случаи:

1. $a \neq 0, b \neq 0$, $c=0$. Уравнение (1. 1) принимает вид.

$$(x^2+1)^2y''+(ax^2+2bx)y=0. \tag{1. 34}$$

Условие интегруемости будет

$$b^2+[(2n+1)\alpha-n(n+2)](n+1-\alpha)^2=0. \tag{1. 35}$$

2. $b \neq 0$, $a=c=0$. Уравнение (1. 1) принимает вид

$$(x^2+1)^2y''+2bxy=0, \tag{1.36}$$

а условия интегруемости выражаются следующей зависимостью:

$$b^2-(n+2)(n+1)^2n=0 \quad \text{или} \quad b^2-n^2(n^2-1)=0. \tag{1. 37}$$

3. $b \neq 0$, $c \neq 0$, $a=0$. Уравнение (1. 1) будет

$$(x^2+1)^2y''+(2bx+c)y=0, \tag{1. 38}$$

а для соотношения (1. 9) получается

$$b^2+[c-n(n+2)](n+1)^2=0 \tag{1. 39}$$

или

$$b^2+(c+1-n^2)n^2=0. \tag{1. 39a}$$

4. $a \neq 0$, $c \neq 0$, $b=0$. В этом случае уравнение (1. 1) принимает вид Halm'a.

$$(x^2+1)^2y''+(ax^2+c)y=0. \tag{1. 40}$$

От условия интегруемости (1. 9) получаются два соотношения

$$(1.\ 41)\qquad c + (2n + 1)\alpha - n(n + 2) = 0$$

и

$$(1.\ 42)\qquad n + 1 - \alpha = 0,$$

а условие (1. 33), из которого тоже получаются два равенства, принимает вид

$$(1.\ 41a)\qquad c^2 + (2n + 1)^2 a + [-2(n + 1)^2 + 2(n + 1) + 1]c + $$
$$+ n(n^2 - 1)(n + 2) = 0$$

и

$$(1.\ 42a)\qquad a + n(n + 1) = 0.$$

Условия (1. 41a) и (1. 42a) известны [3] (условия 1 и 3, стр. 64) и из 9 (стр. 67 соответно соотношения (29) и (30)).

— § 2 —

В этом параграфе будем рассматривать аналог дифференциального уравнения (1. 1), который имеет вид

$$(2.\ 1)\qquad (x^2 - 1)^2 y'' + (a x^2 + 2 b x + c) y = 0$$

где: $a$, $b$, $c$ — вещественные постоянные, отличные от нуля. Ищем условия, при которых уравнение (2. 1) имеет частное решение вида (2. 3).

Теорема III. Если уравнение (2. 1) имеет частное решение вида

$$(2.\ 2)\qquad y = e^{\int \frac{\alpha x^{n+1} + \beta x^n + \ldots + \nu x + \tau}{(x^2 - 1)(x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1} x + B_n)} dx}$$

т. е.

$$y = e^{\int \left[\frac{\alpha_n x + \beta_n}{x^2 - 1} + \frac{Q(x)}{P_n(x)}\right] dx},$$

то его можно представить следующим образом

$$(2.\ 3)\qquad y = e^{\int \left[\frac{\alpha_n x + \beta_n}{x^2 - 1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}\right] dx}, \text{ т. е. } y = e^{\int \frac{\alpha_n x + \beta_n}{x^2 - 1} dx} . P_n(x)$$

или

(2. 4) $$y=(x+1)^{\frac{\alpha_n-\beta_n}{2}}(x-1)^{\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}}\cdot P_n(x),$$

где:

(2. 5) $$P_n(x)=x^n+B_1x^{n-1}+\ldots+B_{n-1}x+B_n$$

($x_i \neq x_k$ при $i \neq k$, $i\,k=1, 2, \ldots, n$; $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — вещественные постоянные) $Q(x_i)=y_i\neq 0$, $P_n(\pm 1)\neq 0$

(2. 6) $$\alpha_n=\alpha-n,\ \beta_n=\frac{b}{n+1-\alpha},\ \alpha=\frac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}\left(a\leqq\frac{1}{4}\right).$$

Доказательство этой теоремы не проводится, так как оно вполне аналогично доказательству теоремы 1, § 1 с той только разницей, что коэффициент перед $y''$ в (1. 1) был $(x^2+1)^2$, а здесь $(x^2-1)^2$. В первой теореме $x_i$ должен быть отличен от $\pm\, i$, а здесь — $x_i\neq\pm 1$.

Теорема IV. Дифференциальное уравнение

(2. 1) $$(x^2-1)^2y''+(ax^2+2bx+c)y=0 \qquad (abc\neq 0)$$

имеет частное решение вида

(2. 3) $$y=e^{\int\frac{\alpha_n x+\beta_n}{x^2-1}dx}\cdot P_n(x)$$

или

(2. 4) $$y=(x+1)^{\frac{\alpha_n-\beta_n}{2}}(x-1)^{\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}}\cdot P_n(x) \qquad (P_n(\pm 1)\neq 0),$$

тогда и только тогда, когда его параметры $a\,(\alpha)$, $b$, $c$ удовлетворяют следующей зависимости

(2. 7) $$b^2+[c-(2n+1)\alpha+n(n+2)](n+1-\alpha)^2=0,$$

где $n$ — целое неотрицательное число — степень полинома $P_n(x)$,

(2. 5) $$P_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)=x^n+B_1x^{n-1}+\ldots+B_{n-1}x+B_n=$$

$=$ ($x_i\neq x_k$ при $i\neq k$, $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, B_n$ — вещественные постоянные),

$$(2.\ 6)\qquad \alpha_n = \alpha - n,\ \beta_n = \frac{b}{n+1-\alpha},\ \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}\left(a \leqq \frac{1}{4}\right).$$

**Доказательство** условия необходимости. Предположим, что (2. 3) – частное решение дифференциального уравнения (2. 1). Дифференцируя (2. 3) два раза по $x$ и подставляя соответствующие значения для $y$ и $y''$ в (2. 1) после некоторых простых преобразований и сокращения общего множителя, получаем

$$(2.\ 8)\qquad \{(\alpha_n^2 - \alpha_n + a)x^2 + [2(\alpha_n - 1)\beta_n + 2b]x + \beta_n^2 - \alpha_n + c\}P_n(x) +$$
$$+ (x^2-1)[(x^2-1)P_n''(x) + 2(\alpha_n x + \beta_n)P_n'(x)] = 0.$$

Аналогично тому, в теореме II, § 1 это дифференциальное уравнение можно привести к виду

$$(2.\ 9)\qquad (x^2-1)P_n''(x) + (2\alpha_n x + 2\beta_n)P_n'(x) + \lambda_n P_n(x) = 0,$$

где:

$$(2.\ 10)\qquad \lambda_n = \alpha_n^2 - \alpha_n + a.$$

Для этого необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$(2.\ 11)\qquad (\alpha_n - 1)\beta_n + b = 0$$

и

$$(2.\ 12)\qquad -\beta_n^2 + \alpha_n - c = \alpha_n^2 - \alpha_n + a.$$

Эти соотношения дают возможность определить $\alpha_n$, $\beta_n$ и $\lambda_n$, но к этим вернемся позже. Как было упомянуто в пункте 2, ссылаясь на [8], это дифференциальное уравнение имеет полиномиальное решение вида (19) при выполнении условия (18), т. е. тогда, когда соответствующее алгебраическое уравнение

$$(2.\ 13)\qquad n(n-1) + 2n\alpha_n + \lambda_n = 0$$

имеет не менее одного целого неотрицательного корня. Это частное решение будет

$$(2.\ 14)\qquad P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \left[x^n \int x^{r_2-n-1} \int x^{-r_2-1}(-D^2 + 2\beta_n D)\right]^\nu x^n$$

или

(2. 5) $$P_n(x) = x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_{n-1} x + B_n$$

и для которого соотношения (2. 8) и (2. 9) удовлетворяются тождественно. Чтобы найти условия, связывающие параметры данного дифференциального уравнения (2. 9) и коэффициенты полинома (2. 5), применим метода неопределенных коэффициентов.

Как и в теореме II, § 1, дифференцируя (2. 5) два раза по $x$ и подставляя соответствующие значения вместо $P_n(x), P_n'(x)$ и $P_n''(x)$ в соотноношение (2. 9), после небольших преобразований получаем

(2. 15) $$[2n\alpha_n + n(n-1) + \lambda_n]\, x^n + \{2n\beta_n + [2(n-1)\alpha_n + (n-1)(n-2) +$$

$$+ \lambda_n]\, B_1\}\, x^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \{-(n-i)(n-i-1) B_i + 2(n-i-1)\beta_n B_{i+1} +$$

$$[2(n-i-2)(n-i-1) + 2(n-i-2)\alpha_n + \lambda_n] B_{i+2}\}\, x^{n-2-i} = 0 \; (B_0 = 1).$$

Чтобы полином (2. 15) был тождественно равен нулю, коэффициент при $x^n$ должен быть равен нулю, т. е.

(2. 13) $$(n-1)\,n + 2n\alpha_n + \lambda_n = 0.$$

Видно, что это условие тождественно условием (18), чтобы дифференциальное уравнение (14) имело полиномиальное решение. Если сопоставим соотношения (2. 10), (2. 11) и (2. 13), как и в теореме II, имеем

(2. 16) $$\alpha_n = \alpha - n,$$

(2. 17) $$\beta_n = \frac{b}{n+1-\alpha},$$

(2. 18) $$\lambda_n = n(n+1) - 2n\alpha,$$

где:

(2. 19) $$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} \quad \left(a \leqq \frac{1}{4}\right).$$

Подставляя вместо $\alpha_n$ и $\beta_n$ соотвествующие значения в соотношение (2. 12), получаем

(2. 7) $$b^2 + [c - (2n+1)\alpha + n(n+2)]\,(n+1-\alpha)^2 = 0$$

($n$ – целое неотрицательное число – степень полинома $P_n(x)$). Этим необходимость доказана.

Докажем достаточность. Предположим, что параметры данного дифференциального уравнения (2. 1) $[a\cdot(\alpha), b. c]$ удовлетворяют соотношению (2. 7) при некотором целом неотрицательном числе $n$. Этим значениям $n$, $\alpha$ соответствуют определенные значения $\alpha_n$, $\beta_n$ и $\lambda_n$ параметров уравнения (2. 9). Покажем, что существует единственный полином, который удовлетворяет тождественно (2. 9), а следовательно и (2. 8). Для этой цели установим существование решения системы:

$$\text{(2. 20)}\quad \begin{cases} [2(n-1)\alpha_n + (n-1)(n-2) + \lambda_n] B_1 + 2n\beta_n = 0, \\ -(n-i)(n-i-1) B_i + 2(n-i-1)\beta_n B_{i+1} + \\ + [2(n-i-2)(n-i-1) + 2(n-i-2)\alpha_n + \\ + \lambda_n] B_{i+2} = 0 \ (i = 0, 1, 2, \ldots, n-3, n-2;\ B_o = 1). \end{cases}$$

Она получена приравниванием коэффициентов полинома (2. 15) $k$ нулю. После подстановки вместо $\alpha_n$ и $\lambda_n$ соответствующих их значений из соотношения (2. 16) и (2. 18) система принимает более простой вид

$$\text{(2. 21)}\quad \begin{cases} 1(2-2\alpha) B_1 + 2n\beta_n = 0, \\ -(n-i)(n-i-1) B_i + 2(n-i-1)\beta_n B_{i+1} + \\ + (i+2)(i+3-2\alpha) B_{i+2} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-2, B_o = 1). \end{cases}$$

Чтобы неоднородная система (2. 21) имела единственное решение определитель, образованный из коэффициентов при неизвестных $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, B_n$ должен быть отличен от нуля. Определитель имеет следующий вид:

$$\text{(2. 22)}\quad \Delta_n = |a_{il}| \begin{cases} a_{il} = 0 \text{ при } l > i \text{ и } l < i-2, \\ a_{il} = i(i+1-2\alpha) \text{ при } l = i, \\ a_{il} = -(n-i)(n-i-1) \text{ при } l = i-2, \\ a_{il} = 2(n-i)\beta_n \text{ при } l = i-1,\ (i, l = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Он немного отличается от определителя (1. 24). Все элементы второй поддиагонали определителя (2. 22) отрицательны. Так как все элементы определителя (2. 22) над главной диагональю суть нули, то его значение, как известно, будет:

$$\text{(2. 23)}\qquad \Delta_n = \prod_{i=1}^{n} i(i+1-2\alpha).$$

Когда $i+1-2\alpha \neq 0$ $(i=1, 2, \ldots, n-1, n)$ $n$ – степень полинома $P_n(x)$, то определитель (2. 23) $\Delta_n \neq 0$ и неоднородная система (2. 21) имеет единственное решение. Иными словами, существует единственный полином $P_n(x)$, который удовлетворяет соотношения (2. 9).

Допустим, что для некоторого $i=k$ (к - натуральное число) определитель системы обращается в нуль $(\Delta_n = 0)$. Как увидим дальше, это возможно, когда алгебраическое уравнение (2. 13) имеет два целых неотрицательных корня и порядок определителя отвечает большему корню $(n_2 > n_1)$. Но тогда должно быть

$$2\alpha = k+1 \quad \text{или} \quad k = 2\alpha - 1 = \sqrt{1-4a} \tag{2. 24}$$

(к нануральное число $\leqq n_2$, $k > n_1$). Покажем, что тогда система будет несовместна, для чего достаточно установить, что либо матрица определителя и расширенная матрица различного ранга, либо условие, вытекающее из равенства рангов матрицы определителя и расширенной матрицы и условие, чтобы дифференциальное уравнение (2. 9) имело полиномиальное решение — несовместны.

Обозначим $D = \|a_{il}\|$ матрица определителя $\Delta_n = |a_{il}|$ и допустим, что $k+1-2\alpha = 0$. Видно, что матрица $\|a_{il}\|$ – $n-1$ -го ранга. Действительно, если вычеркнем к-ый столбец и к — тую строку определителя $\Delta_n$, то получается определитель вида (2. 25), значение которого равно

$$\Delta_{n-1} = \prod_{i=1}^{k=1} (i+1-2\alpha) \prod_{i=k+1}^{n} (i+1-2\alpha) \neq 0. \tag{2. 25}$$

Обозначим через $E$ расширенную матрицу, полученную из $D$ присоединением столбца свободных членов, поставленного на месте к-го столбца, а к-тый столбец поставлен как последний $(n+1)$ столбец матрицы. В матрице E вычеркнем $n+1$ – ый столбец. Получается определитель $n$ – го порядка, который можно выразить как произведение двух определителей, т. е.

$$\Delta'_n = \Delta_k \cdot \Delta_{n-k}, \tag{2. 26}$$

где:

(2. 27) $\Delta_k =$

$$= \begin{vmatrix} 1(1-k) & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & -2\beta_n n \\ 2(n-1)\beta_n & 2(2-k) & 0\ldots & 0 & 0 & n(n-1) \\ -(n-1)(n-2) & 2(n-2)\beta_n & 3(3-k)\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots(k-2)(-2) & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots\ 2(n+2-k)\beta_n & & (k-1)(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots\ -(n+2-k)(n+1-k) & & 2(n+1-k)\beta_n & 0 \end{vmatrix}$$

и

$$\text{(2. 28)} \quad \Delta_{n-k} = |a_{il}| \begin{cases} a_{il} = (k+i)i \quad l = i \quad (i = 1, 2, \cdots, n-k), \\ a_{il} = 2(n-i-1)\beta_n \quad l = i-1, \\ a_{il} = -(n-i-1)(n-i-2) \text{ при } l = i-2, \\ a_{il} = 0 \text{ при } l > i \text{ и } l < i-2 \end{cases}$$

Так как все элементы главной диагонали $a_{ii} \neq 0$ и $a_{il} = 0$ при $l > i$, то

$$\text{(2. 29)} \qquad \Delta_{n-k} = \prod_{i=k+1}^{n} i(i-k) \neq 0 \quad (i \neq k).$$

Следовательно, ранг матрицы $E$ зависит только от $\Delta_k$. Если $\Delta_k$ также $\neq 0$, то матрица $E - n -$ того ранга и система несовместна, если $\Delta_k = 0$, то матрица $E$ будет $n - 1 -$ го ранга и система будет совместна (если полученное и данное условие (2. 13) совместны).

Доказывая, что определитель $\Delta_k$ аннулируется только тогда, когда $\beta_n = k - 1$. Другими словами, когда $\beta_n = k - 1$ матрица $E$ будет $n - 1 -$ го ранга, как и матрица $D$. Тогда, согласно теореме Кронекера-Капели, система должна быть совместна. Но тогда видно, что условие (2. 13) не удовлетворяется. Действительно, если $\beta_n = k - 1$, $\alpha = \frac{k+1}{2}$, то $a$ должно быть равно $-\frac{(k-1)(k+1)}{1}$, $\alpha_n = \frac{k+1}{2} - n$. Тогда услооие (2. 13) принимает вид

$$n(n-1) + 2n\left(\frac{k+1}{2} - n\right) + \left(\frac{k+1}{2} - n\right)^2 - \left(\frac{k+1}{2} - n\right) + \frac{(k-1)(k+1)}{2} = 0.$$

После переработки и упрощения этого соотношения получается

$$\text{(2. 30)} \qquad (k+1)(k-1) = 0.$$

Так как $k + 1 > 0$ то, чтобы условие было выполнено, должно быть $k = 1$. Но, если $k = 1$, то $\alpha = 1$, $a = 0$ но тогда и $b = (n + 1 - \alpha)\beta_n = (k-1)(n + 1 - \alpha) = 0$, что противоречит преддоложению, что $a\,b\,c \neq 0$. Поэтому обе матрицы могут быть одного ранга, тогда и только тогда, когда $a = 0$, $b = 0$. Но тогда уравнение (2. 1) принимает вид

$$\text{(2. 31)} \qquad (x^2 - 1)^2 y'' + c\,y = 0$$

Но известно [4], что (2. 31) имеет решение в замкнутом виде безусловно, которое подтверждает то, что и мы получили.

Из всего этого видно, что когда $abc \neq 0$, то система совместна, если $\Delta \neq 0$, что соответствует меньшему неотрицательному корню. Система оказывается несовместной, если $n$ не будет меньший корень уравнения (2. 13), так как тогда матрица $D$ и расширенная матрица $E$ будут различного ранга. Это утверждение доказывается аналогично в теореме II, § 1. Этим условие достаточности доказано.

Аналогично, как и в § 1, в соотношении (2. 7), подставляя $\alpha = \dfrac{1+\varepsilon\sqrt{1-4a}}{2}$ $(\varepsilon = \pm 1)$, учитывая, что $\alpha^2 = \alpha - a$ и сделав алгебраические преобразования, получается

$$(2.\ 32)\qquad b^2[b^2 + (2n^2 + 2n + 1)c - (10n^2 + 10n + 1) - 2ac + 2n(n+1)(n^2+n+1)] + \{c^2 + (2n+1)^2 a - [-2(n+1)^2 + 2(n+1) + 1]c + (n^2-1)(n+2)n\}[a + n(n+1)]^2 = 0.$$

## ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ:

Аналогично в § 1 и здесь расмотрим некоторые частные случаи.

1. $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$. Уравнение (2. 1) принимает вид

$$(2.\ 33)\qquad (x^2-1)^2 y'' + (ax^2 + 2bx)y = 0,$$

а условие (2. 7) будет:

$$(2.\ 34)\qquad b^2 + [-(2n+1)\alpha + n(n+2)](n+1-\alpha)^2 = 0.$$

2. $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Уравнение (2. 1) будет

$$(2.\ 35)\qquad (x^2-1)^2 y'' + (2bx + c)y = 0,$$

а условие интегрируемости

$$(2.\ 36)\qquad b^2 + [c + n(n+2)](n+1)^2 = 0 \text{ или } b^2 + (c + n^2 - 4n - 1)n^2 = 0.$$

3. $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. Уравнoние (2. 1) принимает вид уравнения J. Halma

$$(2.\ 37)\qquad (x^2-1)^2 y'' + (ax^2 + c)y = 0.$$

Из условия (2. 7) получаются два соотношения

$$(2.\ 38)\qquad c - (2n+1)\alpha + n(n+2) = 0$$

Из всего этого видно, что когда $abc \neq 0$, то система совместна, если $\Delta \neq 0$, что соответствует меньшему неотрицательному корню. Система оказывается несовместной, если $n$ не будет меньший корень уравнения (2. 13), так как тогда матрица $D$ и расширенная матрица $E$ будут различного ранга. Это утверждение доказывается аналогично в теореме II, § 1. Этим условие достаточности доказано.

Аналогично, как и в § 1, в соотношении (2. 7), подставляя $\alpha = \dfrac{1+\varepsilon\sqrt{1-4a}}{2}$ $(\varepsilon = \pm 1)$, учитывая, что $\alpha^2 = \alpha - a$ и сделав алгебраические преобразования, получается

$$b^2[b^2 + (2n^2 + 2n + 1)c - (10n^2 + 10n + 1) - 2ac + 2n(n+1)(n^2+n+1)] + \{c^2 + (2n+1)^2 a - [-2(n+1)^2 + 2(n+1) + 1]c + (n^2-1)(n+2)n\}[a + n(n+1)]^2 = 0. \tag{2. 32}$$

## ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ:

Аналогично в § 1 и здесь расмотрим некоторые частные случаи.

1. $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$. Уравнение (2. 1) принимает вид

$$(x^2-1)^2 y'' + (ax^2 + 2bx)y = 0, \tag{2. 33}$$

а условие (2. 7) будет:

$$b^2 + [-(2n+1)\alpha + n(n+2)](n+1-\alpha)^2 = 0. \tag{2. 34}$$

2. $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Уравнение (2. 1) будет

$$(x^2-1)^2 y'' + (2bx + c)y = 0, \tag{2. 35}$$

а условие интегрируемости

$$b^2 + [c + n(n+2)](n+1)^2 = 0 \text{ или } b^2 + (c + n^2 - 4n - 1)n^2 = 0. \tag{2. 36}$$

3. $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. Уравноние (2. 1) принимает вид уравнения J. Halma

$$(x^2-1)^2 y'' + (ax^2 + c)y = 0. \tag{2. 37}$$

Из условия (2. 7) получаются два соотношения

$$c - (2n+1)\alpha + n(n+2) = 0 \tag{2. 38}$$

и

$$n + 1 - \alpha = 0, \tag{2. 39}$$

которые после рационализации принимают вид

$$c^2 + (2n + 1)^2 a + n(n^2 - 1)(n + 2) - [-2(n + 1)^2 + \\ + 2(n + 1) + 1] c = 0 \tag{2. 38a}$$

и

$$a + n(n + 1) = 0 \tag{2. 39a}$$

известны из [6] (стр. 69, соотношения (40) и (41)).

Доложено на конгрессе болгарских математиков в гор. Варне в 6. IX. 1967 г.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Долапчиев, Б. Г. Паскалев, Ив. Чобанов. Върху диференциалното уравнение на J. Halm. Год. на Соф. университет, физ.-мат. фак. т. 50, 1955/56 г., кн. 1, част 1, стр. 67-73.

2. Долапчиев Б., Ив. Чобанов. Върху едно диференциално управнение на J. Halm. БАН, известия на Мат. институт, том III, кн. 1, 1958 г., стр. 51-68.

3. Паскалев, Г., Ив. Чабанов. Към въпроса за интрегрирането на диференциальното уравнение на J. Halm. Годишник на Соф. уиверситет, физ.-мат. фак., т. 50, 1955/56 г., кн. I, част II, стр. 61-65.

4. Камке, Э. Справочник по обыкновенным фифференциальным уравнениям. Москва, 1965 г.

5. Halm, J. Transaction of the Royal. Edinburg. 41 (1906), стр. 651-676.

6. Каратопраклиев. Г. Някои бележки върху диференциалните уравнения иа J. Halm. Известия на Мат. институт на БАН, ч. У, кв. 2, стр. 65-67.

7. Стоянов, А. Едно обобщение на диференциалното уравнение на J. Halm. Годишник на Инж. стр. институт, т. У, кн. I, 1958 год., стр. 7-13.

8. Mambriani, A. Equazioni differenziali lineari aventi soluzioni polinomiali-Buletino d'Unione Mathematika Italiana v-17 1938 (pp 26-32).

9. Lesky Peter. Orthogonal polynomketten ols Lösungen Sturm-Liouvillecher differentialgleichungen-Östrreiche Akademie der Wisseshaften mathematich. abt 173 b. 5-8, Wien 1964.

10. Horner, James M. A note the derivation of Rodriges Formulae. University of Alabama. American Mathematical Monthly v-70, n. 1, 1963.

11. Витанов, Ал., Въерху решенне с квадратури на едно линейно диференциално уравнение. Годишник на ВТУЗ — приложна механика 1965 г., т. I, кн. 2.

12. Витенов, Ал. Въерху едно обобщение на диференциалното уравнение на J. Halm. Годишник на В. Минно-геол. институт, свитък II, геология. т, 12, г. 1965/66, стр. 263-278.

13. Витанов, Ал. Към въпроса за решаване с квадратури на едно обобщено диференциално уравнение на J. Halm. Юбилеен годишник на Внешня Минно-геоложки институт, 1967.

14. Гантмахер Ф, Г. Теория Матриц, Изд. „Наука", М, 1967.

15. Мишина А. П. и В. В. Проскуряков. Высшая алгебра. Справочная математическая библиотека. ГИЗ физичко-мат. литературы, 1965 г., Москва.

# ЗА ЕДНО ОБОБШТУВАЊЕ НА ЕДНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

*Александар Витанов*

Содржина

Во овој труд се покажува дека партикуларни интеграли на диференцијалната равенка (1. 1) можат да се добијат со квадратури, ако меѓу нејзините коефициенти $a$, $b$ и $c$ постои релацијата (1. 9).

Понатака се покажува дека и за равенката (2. 1) може да се најдат партикуларни интеграли со помош на квадратури, ако меѓу нејзините коефициенти $a$, $b$ и $c$ постои врската (2. 7).