ЗА ЕДНА ПРОСТА ОСОБИНА НА ИЗВОДИТЕ НА НЕКОИ ОРТОГОНАЛНИ ПОЛИНОМИ

ГОДИШЕН ЗБОРНИК НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ, Книга 4, N°5, (1951), 1-8

1. Да го земеме полиномот

$$R_n(x) = c_n D^n\left[(x-a)^n (x-b)^n\right], \quad D = \frac{d}{dx}, \tag{1}$$

каде што се a и b произволни фиксирани бројеви и c_n произволна константа.

Со последователно диференцирање на (1), добиваме

$$R_n^{(r)}(x) = c_n D^{n+r}\left[(x-a)^n (x-b)^n\right] \tag{2}$$

Применувајќи ја формулата на Leibniz, имаме[4])

$$R_n^{(r)}(x) = c_n \sum_{k=r}^{n} \binom{n+r}{k} \frac{n!}{(k-r)!} (x-a)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} (x-b)^{k-r}, \tag{3}$$

зимајќи предвид дека

$$\binom{n+r}{k} D^k (x-a)^n D^{n+r-k} (x-b)^n = 0,$$

за секое $n < k$ или $k < r$.

Од (3) имаме

$$R_n^{(r)}(a) = c_n \binom{n+r}{r} n!\, n(n-1)\cdots(n-r+1)(a-b)^{n-r}, \tag{4}$$

и

$$R_n^{(r)}(b) = (-1)^{n+r} R_n^{(r)}(a).$$

2. Полиномите на Legendre се добиваат од (1) ако се земе

$$a = 1, \; b = -1, \; c_n = \frac{1}{2^n n!},$$

т. е.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n (x^2 - 1).$$

Од (4) ја добиваме како партикуларен случај особината на полиномот $P_n(x)$

$$P_n^{(r)}(1) = (2r-1)!! \binom{n+r}{2r}, \tag{5}$$

$$(2r-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2r-1),$$

дадена од Grosswald[1].

Исто така од (4) ја добиваме особината

$$P_n^{(r)}(-1) = (-1)^{n+r} P_n^{(r)}(1).$$

3. До особината (5) може да се дојде и ако го искористуваме изразувањето на полиномите $P_n(x)$ со помошта на хипергеометриските функции.

Од

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right),$$

каде што е

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum \frac{(\alpha)_n (\alpha)_n}{(\gamma)_n (1)_n} x^n,$$

$$(\omega)_r = \omega(\omega+1)\cdots(\omega+r-1), (\omega)_0 = 1,$$

земајќи предвид дека

$$\frac{d^r F}{dx^r} = \frac{(\alpha)_r (\beta)_r}{(\gamma)_r} F(\alpha+r, \beta+r, \gamma+r, x), \tag{6}$$

добиваме

$$P_n^{(r)}(x) = (2r-1)!! \binom{n+r}{2r} F\left(r-n, r+n+1, r+1, \frac{1-x}{2}\right).$$

Очевидно, од тука за $x=1$ ја имаме релацијата (5).

4. Legendre ги е дефинирал полиномите $P_n(x)$ како коефициенти на степените z од развивањето[5])

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n.$$

Ако ја развиеме поопштата функција[3])

$$(1-2xz+z^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\nu}(x) z^n,$$

во степенен ред од z, коефициентите $C_n^{\nu}(x)$ на овој ред за произволно ν, претставуваат полиноми наречени Gegenbauer-ови[2]), којшто ги опфаќаат тие на Legendre како специјални случај за $\nu = 1/2$.

Изразени со помошта на хипергеометриските функции, тие се

$$C_n^{\nu}(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\nu)} F\left(n+2\nu, -n, \nu+{}^1/_2, \frac{1-x}{2}\right).$$

Според (6) ќе имаме

$$\left[C_n^{\nu}(x)\right]^{(r)} = 2^r \frac{\Gamma(n+2\nu+r)\Gamma(\nu+r)}{\Gamma(n+1-r)\Gamma(2\nu+2r)\Gamma(\nu)} F\left(n+2\nu+r, r-n, \nu+r+\frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right).$$

Од тука имаме особина аналогна на (5), за полиномите $C_n^{\nu}(x)$ на Gegenbauer

$$\left[C_n^\nu(1)\right]^{(r)} = 2^r \frac{\Gamma(n+2\nu+r)\,\Gamma(\nu+r)}{\Gamma(n+1-r)\,\Gamma(2\nu+2r)\,\Gamma(\nu)}.$$

5. Полиномите на Tschebyscheff $T_n(x)$ дефинирани се со[3])

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{1-x^2}\,D^n(1-x^2)^{n-1/2},$$

За нив ја добиваме особината

$$T_n^{(r)}(1) = n(2r-2)!!\binom{n+r-1}{2r-1}.$$

ON A PROPERTY OF THE DERIVATIVES OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

(Summary)

The purpose of this paper is to give an alternative proof and a generalization of the result

$$P_n^{(r)}(1) = (2r-1)!!\binom{n+r}{2r}, \tag{1}$$

$$(2r-1)!! = 1\cdot 3\cdots(2r-1),$$

given by Grosswald, [1][1] where $P_n(x)$ are Legendre polynomials. We deduce too analogical property of Gegenbauer [2] and Tschebyscheff [3] polynomials.

1. Let $R_n(x)$ be the polynomials

$$R_n(x) = c_n D^n\left[(x-a)^n(x-b)^n\right], \qquad D = \frac{d}{dx},$$

with a and b arbitrary fixed number and c_n an arbitrary constant.

By using Leibniz's formula, we obtain [4]

$$R_n^{(r)}(x) = c_n \sum_{k=r}^{n}\binom{n+r}{k}\frac{n!}{(k-r)!}(x-a)^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!}(x-b)^{k-r},$$

according to the relation

$$\binom{n+r}{k} D^k(x-a)^n D^{n+r-k}(x-b)^n = 0,\ n<k,\ k<r.$$

Then we have

$$R_n^{(r)}(a) = c_n\binom{n+r}{r} n!\binom{n}{r} r!\,(a-b)^{n-r}, \tag{2}$$

When the constants have particular values

$$a=1,\ b=-1,\ c_n = \frac{1}{2^n n!},$$

the polynomials $R_n(x)$ are called the Legendre polynomials. We immediately find then the relation (1) obtained by Grosswald.

From (2) we obtain the following analogical property

$$P_n^{(r)}(-1) = (-1)^{n-r}P_n^{(r)}(1).$$

2. Another proof of the property (1) involves the use of the functions hypergeometrics.

It is well known the relation

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right),$$

---

[1]) Numbers in brackets refer to the bibliography at the end of the paper.

and it follows

$$P_n^{(r)}(x) = (2r-1)!!\binom{n+r}{2r} F\left(r-n,\ r+n+1,\ r+1,\ \frac{1-x}{2}\right).$$

It is obvious that for $x=1$ we obtain the relation (1).

3. Legendre defined the polynomials $P_n(x)$ as well as the coefficients of the powers of z in the expansion [5]

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2} = \sum_n P_n(x) z^n.$$

More general functions $C_n^\nu(z)$ are defined by the coefficients of z in the expansion of

$$(1-2xz+z^2)^{-\nu} = \sum_n C_n^\nu(x) z^n,$$

and they are known as the Gegenbauer polynomials.

Differentiating r times with respect to x and putting $x=1$, we get [6]

$$2^r \nu(\nu+1)\cdots(\nu+r-1) z^r (1-z)^{-2(\nu+r)} = \sum_n \left[C_n^\nu(x)\right]_{x=1}^{(r)} z^n.$$

We obtain in this case, equating coefficients of z^n

$$\left[C_n^\nu(x)\right]_{x=1}^{(r)} = 2^r \frac{\Gamma(n+2\nu+r)\,\Gamma(\nu+r)}{\Gamma(n+1-r)\,\Gamma(2\nu+2r)\,\Gamma(\nu)}. \tag{3}$$

With the assistance of the functions hypergeometriques

$$C_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2\nu)} F(n+2\nu, -n, \nu+1/2, (1-x)/2),$$

we obtain too (3).

For the Tschebyscheff polynomials

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!} D^n (1-x^2)^{n-1/2},$$

we find the analogical relation

$$T_n^{(r)}(1) = n(2r-2)!!\binom{n+r-1}{2r-1}.$$

BIBLIOGRAPHY

1. E. Grosswald
   On a simple property of the derivatives of Legendre's polynomials, Proceedings of the American Mathematical Society v. 1 (1950), pp. 553—554.

2. L. Gegenbauer
   Ueber die Function $C_n^\nu(x)$, Sitzungsber. Akad. Wien 100. 745 746 (1891)

3. W. Magnus—F. Oberhettinger
   Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin 1943, S. 76—80.

4. G. Scegö
   Mathematical Reviews, Vol. 12, № 3, p. 178

5. H. Laurent
   Traité d'analyse T. V, p. 185 (1890).

6. N. Du Plessis
   A Note abaut the derivatives of Legendue polynomials, Proceedings of the American Mathematical Society, v. 2, N. 6. (1951) p. 950.