Математички Билтен
24 (L)
2000 (47–56)
Скопје, Македонија

ISSN 0351-336X

КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ ВО n-НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

Алекса Малчески* и Ристо Малчески**

Апстракт

Концептот за n-норма на векторски простор со димензија поголема или еднаква на n, $n > 1$, воведен од А. Мисиак [6], е повеќе димезионална аналогија на концептот за норма. Во [1], [2], [3], [6] и [7] се докажани повеќе својства на n-нормираните простори. Во оваа работа се разгледани конвергентните низи во n-нормираните простори и се дадени неколку примери на n-нормирани простори.

Нека L е реален векторски простор со димензија поголема од n, $n > 1$ и $\|\cdot,\cdot,\dots,\cdot\|$ е реална функција на L^n за која важат условите

i) $\|x_1,x_2,\dots,x_n\| \geq 0$, за секои $x_1,x_2,\dots,x_n \in L$ и $\|x_1,x_2,\dots,x_n\| = 0$ ако и само ако множеството $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ е линеарно зависно;

ii) $\|x_1,x_2,\dots,x_n\| = \|\pi(x_1),\pi(x_2),\dots,\pi(x_n)\|$, за секои $x_1,x_2,\dots,x_n \in L$ и за секоја биекција $\pi\colon\{x_1,x_2,\dots,x_n\} \to \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.

iii) $\|\alpha x_1,x_2,\dots,x_n\| = |\alpha|\,\|x_1,x_2,\dots,x_n\|$, за секои $x_1,x_2,\dots,x_n \in L$ и за секој $\alpha \in \mathbf{R}$.

iv) $\|x_1+x_1',x_2,\dots,x_n\| \leq \|x_1,x_2,\dots,x_n\| + \|x_1',x_2,\dots,x_n\|$, за секои $x_1,x_2,\dots,x_n,x_1' \in L$. Функцијата $\|\cdot,\cdot,\dots,\cdot\|$ се нарекува n-норма на L, а $(L^n,\|\cdot,\cdot,\dots,\cdot\|)$ се нарекува n-нормиран простор.

Во [1],[4], [5] и [6] се дадени три важни примери на n-нормирани простори. Овде ќе презентираме уште три примери на n-нормиран простор.

Пример 1. Нека $\mathbf{R}^n = \{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\colon \alpha_i \in \mathbf{R},\ i = 1,2,\dots,n\}$.

Со вообичаените операции собирање на вектори и множење на вектор со реален број, $\mathbf{R}^n$ е векторски простор над $\mathbf{R}$. За секои $x_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = 1, 2, \dots, n$ дефинираме

$$\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| . \qquad (1)$$

Од својствата на апсолутна вредност и својствата на детерминантите следува дека со (1) е дефинирана n-норма на $\mathbf{R}^n$, со што $\mathbf{R}^n$ станува n-нормиран простор.

Пример 2. Нека $\mathbf{R}^{n+1} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) : \alpha_i \in \mathbf{R}^n, i = 1, 2, \dots, n, n+1)\}$. Со вообичаените операции собирање на вектори и множење со реален број, $\mathbf{R}^{n+1}$ е векторски простор над $\mathbf{R}$. Нека $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ е единечната база на $\mathbf{R}^{n+1}$. За секои $x_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in+1})$, $i = 1, 2 \dots, n$, дефинираме

$$\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = \left|\left\| \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_{n+1} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n+1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn+1} \end{matrix} \right\|\right| . \qquad (2)$$

Ќе докажеме дека со (2) е дефинирана n-норма на $\mathbf{R}^{n+1}$. За таа цел (2) ќе ја запишеме во обликот

$$\|x_1, x_2, \dots, x_n\| =$$

$$= \sqrt{ \begin{vmatrix} \alpha_{12}\, \alpha_{13} \dots \alpha_{1n+1} \\ \alpha_{22}\, \alpha_{23} \dots \alpha_{2n+1} \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_{n2}\, \alpha_{n3} \dots \alpha_{nn+1} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_{11}\, \alpha_{13} \dots \alpha_{1n+1} \\ \alpha_{21}\, \alpha_{23} \dots \alpha_{2n+1} \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_{n1}\, \alpha_{n3} \dots \alpha_{nn+1} \end{vmatrix}^2 + \dots + \begin{vmatrix} \alpha_{11}\, \alpha_{12} \dots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\, \alpha_{22} \dots \alpha_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_{n2}\, \alpha_{n2} \dots \alpha_{nn} \end{vmatrix}^2 }$$

i) Јасно, ако $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}^{n+1}$ се линеарно зависни вектори, тогаш $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = 0$. Нека претпоставиме дека $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = 0$

и нека $y = (b_1, b_2, \dots, b_{n+1})$ е произволен вектор од $\mathbf{R}^{n+1}$. Тогаш

$$\begin{vmatrix} \alpha_{12}\,\alpha_{13}\dots\alpha_{1n+1} \\ \alpha_{22}\,\alpha_{23}\dots\alpha_{2n+1} \\ \dots\ \dots\dots\ \dots \\ \alpha_{n2}\,\alpha_{n1}\dots\alpha_{nn+1} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11}\,\alpha_{13}\dots\alpha_{1n+1} \\ \alpha_{21}\,\alpha_{23}\dots\alpha_{2n+1} \\ \dots\ \dots\dots\ \dots \\ \alpha_{n1}\,\alpha_{n3}\dots\alpha_{nn+1} \end{vmatrix} = 0, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{11}\,\alpha_{12}\dots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\,\alpha_{22}\dots\alpha_{2n} \\ \dots\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{n2}\,\alpha_{n2}\dots\alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Ако последните равенства последователно ги помножиме со $(-1)^{i+1}b_i$, соодветно а потоа ги собереме, од својствата на детерминанти добиваме:

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n+1} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n+1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn+1} \end{vmatrix} = 0$$

што значи векторите y, $x_1, x_2, \dots, x_n$ се линеарно зависни. Но, y е произволен вектор и $\dim \mathbf{R}^{n+1} = n+1$, па затоа $x_1, x_2, \dots, x_n$ се линеарно зависни. Својствата ii) iii) и iv) од дефиницијата на n-норма непосредно следуваат од (2), својствата на детерминантите и својствата на евклидовата норма во $\mathbf{R}^{n+1}$.

Пример 3. Нека $k, n \in \mathbf{N}$, $k > n$. Со P_k да го означиме множеството од сите реални полиноми f на $[0,1]$, такви што $\deg f \le k$. Множеството P_k со вообичаените операции собирање на полиноми и множење на полином со реален број е реален векторски простор. Нека $\{x_i\}_{i=0}^{kn}$ се произволни $kn+1$ различни фиксирани точки од $0,1]$. За секои $f_1, f_2, \dots, f_n \in P_k$ дефинираме

$$\|f_1, f_2, \dots, f_n\| = \tag{3}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ако } f_1, f_2, \dots, f_n \text{ се линеарно зависни} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{kn} |f_1(x_i) f_2(x_i) \dots f_n(x_i)|\,, & \text{ако } f_1, f_2, \dots, f_n \text{ се линеарно независни.} \end{cases}$$

i) Нека претпоставиме дека $\displaystyle\sum_{i=0}^{kn} |f_1(x_i) f_2(x_i) \dots f_n(x_i)| = 0$. Тогаш $f_1(x_i) f_2(x_i) \dots f_n(x_i) = 0$, за секој $i = 0, 1, 2, \dots, kn$ и како $\deg f_j \le k$, $j = 1, \dots, n$ добиваме дека еден од разгледуваните полиноми има

$k+1$ нула, па затоа постои $j \in \{1,2,\dots,n\}$ таков што $f_j \equiv 0$. Значи, ако $\|f_1, f_2, \dots, f_n\| = 0$, тогаш $f_1, f_2, \dots, f_n$ се линеарно зависни.

ii) Јасно, $\|f_1, f_2, \dots, f_n\| = \|\pi(f_1), \pi(f_2), \dots, \pi(f_n)\|$ за било која биекција $\pi: \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \to \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$;

iii) Од (3) непосредно следува дека за секои $f_1, f_2, \dots, f_n \in P_k$ и за секој $\alpha \in \mathbf{R}$ важи $\|\alpha f_1, f_2, \dots, f_n\| = |\alpha|\, \|f_1, f_2, \dots, f_n\|$, и

iv) Од (3) непосредно следува дека за секои $f_1, f_2, \dots, f_n \in P_k$ важи $\|f_1 + f_1', f_2, \dots, f_n\| \leq \|f_1, f_2, \dots, f_n\| + \|f_1', f_2, \dots, f_n\|$.. Според тоа, $(P_k, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ е векторски n-нормиран простор при што n-нормата е дефинирана со (3).

1. Две леми

Во овој дел ќе докажеме две тврдења за фактор-просторите на n-нормираните и n-предхилбертовите простори, кои всушност се генерализација на тврдењата докажани во лема 7 и теорема 8, [1].

Нека L е n-нормиран простор, $1 \leq m < n$ и $x_1, x_2, \dots, x_m$ се линеарно зависни вектори во L. Со $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ го означуваме подпросторот од L генериран од $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, а со L_p фактор-просторот $L|_{P(x_1, x_2, \dots, x_m)}$. За секој $a \in L$ со a_P ја означуваме класата на еквиваленција на а во однос на $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$. L_P е векторски простор со операции $\alpha a_P = (\alpha a)_P$ и $a_P + b_P = (a+b)_P$.

За произволни $y_1, y_2, \dots, y_{n-m}$, $z_1, z_2, \dots, z_{n-m} \in L$ ако $y_{iP} = z_{iP}$, $i = 1, 2, \dots, n-m$, тогаш $y_i - z_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_j$. Ако се искористи својството iv) од дефиницијата на n-норма лесно се докажува дека

$$\|y_1, y_2, \dots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \dots, x_m\| = \|z_1, z_2, \dots, z_{n-m},\ x_1, x_2, \dots, x_m\|$$

Значи, функцијата $\|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|: L_P^{n-m} \to \mathbf{R}$ дефинирана со

$$\|y_{1P}, y_{2P}, \dots, y_{(n-m)P}\| = \|y_1, y_2, \dots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \dots, x_m\| \tag{4}$$

е добро дефинирана.

Лема 1. Функцијата $\|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|_P$ дефинирана со (4) е $(n-m)$-норма на фактор просторот L_P.

Доказ. i) За секои $y_{1P}, y_{2P}, \dots, y_{(n-m)P} \in L_P$ важи

$$\|y_{1P}, y_{2P}, \dots, y_{(n-m)P}\|_P = \|y_1, y_2, \dots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \dots, x_m\| \geq 0\,.$$

Ако $\|y_{1P}, y_{2P}, \dots, y_{(n-m)P}\|_P = 0$, тогаш $\|y_1, y_2, \dots, y_{n-m}, x_1, x_2, \dots, x_m\| = 0$, што значи постојат $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-m}$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ не сите еднакви на нула такви што $\sum_{i=1}^{n-m}\alpha_i y_i = -\sum_{j=1}^{m}\beta_j x_j$. Јасно, постои $\alpha_i \neq 0$, бидејќи во спротивно множеството $x_1, x_2, \ldots, x_m$ би било линеарно зависно. Според тоа, векторите $y_{1P}, y_{2P}, \ldots, y_{(n-m)P} \in L_P$ се линеарно зависни.

ii) Нека $y_{1P}, y_{2P}, \ldots, y_{(n-m)P} \in L_P$ и

$$\pi\colon \{y_{1P}, y_{2P}, \ldots, y_{(n-m)P}\} \to \{y_{1P}, y_{2P}, \ldots, y_{(n-m)P}\}$$

е произволна биекција. Имаме:

$$\begin{aligned}\|\pi(y_{1P}),\pi(y_{2P}, \ldots, \pi y_{(n-m)P})\|_P &= \|\pi(y_1), \pi(y_2), \ldots, \pi(y_{n-m}), x_1, x_2, \ldots, x_m\| \\ &= \|y_1, y_2, \ldots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \ldots, x_m\| \\ &= \|y_{1P}, y_{2P}, \ldots, y_{(n-m)P}\|_P\end{aligned}$$

iii) За секои $y_{1P}, y_{2P}, \ldots, y_{(n-m)P} \in L_P$ и за секој реален број α важи

$$\begin{aligned}\|\alpha y_{1P}, y_{2P}, \ldots, y_{(n-m)P} &= \|\alpha y_1, y_2, \ldots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \ldots, x_m\| \\ &= |\alpha|\ \|y_1, y_2, \ldots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \ldots, x_m\| \\ &= |\alpha|\ \|y_{1P}, y_{2P}, \ldots, y_{(n-m)P}\|_P\end{aligned}$$

iv) За секои $y'_{1P}, y_{1P}, y_{2P}, \ldots, y_{(n-m)P} \in L_P$ важи

$$\begin{aligned}&\|y_{1P} + y'_{1P}, y_{2P}, \ldots, y_{(n-m)P}\|_P = \|y_1 + y'_1, y_2, \ldots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \ldots, x_m\| \\ &\leq \|y_1, y_2, \ldots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \ldots, x_m\| + \|y'_1, y_2, \ldots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \ldots, x_m\| \\ &= \|y_{1P}, y_{2P}, \ldots, y_{(n-m)P}\|_P + \|y'_{1P}, y_{2P}, \ldots, y_{(n-m)P}\|_P.\end{aligned}$$

Лема 2. Нека $m \in \mathbf{N}$, $1 \leq m < n$. n-нормираниот простор L е n-предхилбертов ако и само ако за секое линеарно независно множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $(n-n)$-нормираниот простор $L_P = L\big|_{P(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$ е $(n-m)$-предхилбертов.

Доказ. Нека L е n-предхилбертов простор и $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ е произволно линеарно независно подмножество од L. За секои

$y_{1P}, y'_{1P}, y_{2P}, \dots, y_{(n-m)P} \in L_P$ важи

$$\|y_{1P} + y'_{1P}, y_{2P}, \dots, y_{(n-m)P}\|_P^2 + \|y_{1P} - y'_{1P}, y_{2P}, \dots, y_{(n-m)P}\|_P^2 =$$
$$= \|y_1 + y'_1, y_2, \dots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \dots, x_m\|^2 +$$
$$+ \|y_1 - y'_1, y_2, \dots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \dots, x_m\|^2$$
$$= 2\big(\|y_1 + y'_1, y_2, \dots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \dots, x_m\|^2 +$$
$$+ \|y_1 - y'_1, y_2, \dots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \dots, x_m\|^2\big)$$
$$= 2\big(\|y_{1P}, y_{2P}, \dots, y_{(n-m)P}\|_P^2 + \|y'_{1P}, y_{2P}, \dots, y_{(n-m)P}\|_P^2\big)$$

т.е. L_P е $(n-m)$-предхилбертов.

Обратно, да претпоставиме дека за секое линеарно независно множество $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset L$ просторот $L_P = L\big|_{P(x_1, x_2, \dots, x_m)}$ е $(n-m)$-предхилбертов.

Тогаш за секои $y'_1, y_1, y_2, \dots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \dots, x_m \in L$ важи:

$$\|y_1 + y'_1, y_2, \dots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \dots, x_m\|^2 +$$
$$+ \|y_1 - y'_1, y_2, \dots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \dots, x_m\|^2 =$$
$$= \|y_{1P} + y'_{1P}, y_{2P}, \dots, y_{(n-m)P}\|_P^2 +$$
$$+ \|y_{1P} - y'_{1P}, y_{2P}, \dots, y_{(n-m)P}\|_P^2$$
$$= 2\big(\|y_{1P}, y_{2P}, \dots, y_{(n-m)P}\|_P^2 + \|y'_{1P}, y_{2P}, \dots, y_{(n-m)P}\|_P^2\big)$$
$$= 2\big(\|y_1 + y'_1, y_2, \dots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \dots, x_m\|^2 +$$
$$+ \|y_1 - y'_1, y_2, \dots, y_{n-m},\ x_1, x_2, \dots, x_m\|^2\big)$$

т.е. L е n-предхилбертов.

2. Конвергентни низи во n-нормирани простори

Дефиниција 1. За низата $\{x_k\}$ во n-нормираниот простор L ќе велиме дека е конвергентна, ако постои $x \in L$ така што

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x, y_1, \dots, y_{n-1}\| = 0, \quad \text{за секои} \quad y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in L.$$

Притоа x ќе го нарекуваме граница на низата $\{x_k\}$ и ќе пишуваме $x_k \to x$, $k \to \infty$.

Теорема 1. Нека L е n-нормиран простор и $\{x_k\}$ е низа во L. Ако $x_k \to x$, $k \to \infty$ и $x_k \to y$, $k \to \infty$ тогаш $x = y$.

Доказ. За секои $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \in L$ е исполнето:

$$\|x - y, y_1, \ldots, y_{n-1}\| = \|x_k - y - (x_k - x), y_1, \ldots, y_{n-1}\|$$

$$\leq \|x_k - y, y_1, \ldots, y_{n-1}\| + \|x_k - x, y_1, \ldots, y_{n-1}\|.$$

Бидејќи $x_k \to x$ и $x_k \to y$ добиваме $\|x - y, y_1, \ldots, y_{n-1}\| = 0$, за секои $y_1, \ldots, y_{n-1} \in L$. Според тоа, векторот $x - y$ е линеарно зависен со секои $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \in L$. Бидејќи $\dim L \geq n$ последното е можно ако и само ако $x - y = 0$ т.е. $x = y$.

Теорема 2. Нека L е n-нормиран простор и $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ се низи во L такви што $x_k \to x$ и $y_k \to y$. Тогаш $x_k + y_k \to x + y$.

Доказ. Имаме,

$$\|x_k + y_k - (x - y), z_1, \ldots, z_{n-1}\| = \|x_k - x - (y_k - y), z_1, \ldots, z_{n-1}\|$$

$$\leq \|x_k - x, z_1, \ldots, z_{n-1}\| + \|y_k - y, z_1, \ldots, z_{n-1}\| \to 0$$

за секои $z_1, \ldots, z_{n-1} \in L$, т.е. $x_k + y_k \to x + y$.

Теорема 3. Нека L е n-нормиран простор и $\{x_k\}$ е низа во L таква што $x_k \to x$ и $\{\alpha_k\}$ е низа во $\mathbf{R}$ таква што $\alpha_k \to \alpha$. Тогаш $\alpha_k x_k \to \alpha x$.

Доказ. За секои $z_1, \ldots, z_{n-1} \in L$ важи

$$\|\alpha_k y_k - \alpha x, z_1, \ldots, z_{n-1}\| = \|\alpha_k(x_k - x) - (\alpha_k - \alpha)x, z_1, \ldots, z_{n-1}\|$$

$$\leq |\alpha_k| \, \|x_k - x, z_1, \ldots, z_{n-1}\| + |\alpha_k - \alpha| \, \|x, z_1, \ldots, z_{n-1}\|.$$

Од $|\alpha_k| < M$ за секој $k \in \mathbf{N}$, $x_k \to x$ и $\alpha_k \to \alpha$ и од претходното неравенство следува $\|\alpha_k y_k - \alpha x, z_1, \ldots, z_{n-1}\| \to 0$, за секои $z_1, \ldots, z_{n-1} \in L$, што значи $\alpha_k x_k \to \alpha x$.

Теорема 4. Низата $\{x_k\}$ конвергира кон x во n-нормираниот простор L ако и само ако за секои линеарно независни вектори $a_1, a_2, \ldots, a_m \in L$, $1 \leq m < n$ низата $\{x_{kP}\}$ конвергира кон x_P во фактор просторот $L_P = L\big|_{P(a_1, a_2, \ldots, a_m)}$.

Доказ. Нека $x_k \to x$ во L и $a_1, a_2, \ldots, a_m \in L$ се линеарно независни. Тогаш, за секои $b_{2P}, b_{3P}, \ldots, b_{(n-m)P} \in L_P$ важи

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{kP} - x_P, b_{2P}, b_{3P}, \ldots, b_{(n-m)P}\| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \|x_k - x, b_2, b_3, \ldots, b_{(n-m)}, a_1, a_2, \ldots, a_m\| = 0$$

т.е. $x_{kP} \to x_P$ во L_P.

Нека за секои m, $1 \leq m < n$ линеарно независни вектори $a_1, a_2, \ldots, a_m \in L$ низата $\{x_{kP}\}$ конвергира кон x_P во фактор просторот L_P. Ако $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$ се линеарно независни вектори во L, тогаш $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\| = 0$.

Нека $y_2, y_3, \ldots, y_{n-m}, a_1, a_2, \ldots, a_m \in L$ се произволни линеарно независни вектори. Бидејќи $x_{kP} \to x_P$ во $L_P = L\big|_{P(a_1,a_2,\ldots,a_m)}$ добиваме:

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x, y_2, y_3, \ldots, y_{n-m}, a_1, a_2, \ldots, a_m\| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \|x_{kP} - x_P, y_{2P}, y_{3P}, \ldots, y_{(n-m)P}\| = 0$$

т.е. $x_k \to x$ во L.

Теорема 5. Нека L е n-нормиран векторски простор. Ако

$$\lim_{k,m\to\infty} \|x_k - x_m, y_1, \ldots, y_{n-1}\| = 0$$

тогаш низата реални броеви $\{\|x_k - x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\|\}$ конвергира за секој $x \in L$.

Доказ. За секој $x \in L$ важи

$$\|x_k - x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\| = \|x_k - x_m + x_m - x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\|$$

$$\leq \|x_k - x_m, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\| + \|x_m - x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\|$$

т.е.

$$\|x_k-x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\|-\|x_m-x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\| \leq \|x_k-x_m, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\|.$$

Аналогно се докажува дека

$$\|x_m-x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\|-\|x_k-x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\| \leq \|x_k-x_m, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\|.$$

Од последните две неравенства следува

$$\big|\, \|x_m-x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\|-\|x_k-x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\| \,\big| \leq \|x_k-x_m, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\|$$

што значи дека за секој $x \in L$ реалната низа $\{\|x_k-x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\|\}$ е Cauchy-ва. Според тоа, за секој $x\in L$ низата $\{\|x_k-x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\|\}$ конвергира.

Теорема 6. Ако $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\| = 0$, тогаш

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\| = \|x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\|.$$

Доказ. За секој $k \in \mathbf{N}$ важи

$$\big|\,\|x_k, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\| - \|x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\|\,\big| \leq \|x_k - x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\|,$$

и како $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\| = 0$ добиваме

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\| = \|x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\|.$$

Литература

[1] Малчески, Р.: *Забелешки за n-нормирани простори*, Математички билтен **20** (1996)

[2] Malčeski, R.: *Strong n-convex n-normed spaces*, Matematichki bilten **21** (1997).

[3] Malčeski, R.: *Strong convex n-normed spaces, Macedonian Academy of Sciences and Arts*, Contributions, XVIII 1-2, 1997.

[4] Malčeski, A. and Malčeski, R.: *$L^1(\mu)$ as n-normed spaces*, Godishen zbornik na Institut za matematika, tom **38**, 1997.

[5] Malčeski, A.: *l^∞ as n-normed spaces*, Matematichki bilten **21** (1997).

[6] Misiak, A.: *n-inner Product Spaces*, Math. Nachr. 140 (1989).

[7] Kim, S.S.; Cho, Y,J.: *Strict Convexity in Linear Normed Spaces*, Demonstratio Mathematica, XXIX, No 4, (1996).

CONVERGENT SEQUENCES IN THE n-NORMED SPACES

Aleksa Malčeski * and Risto Malčeski **

Summary

The concept of n-norm on the vector space with dimension greater than n, $n > 1$, introduced by A. Misiak ([6]), is a multidimensional analogue of the concept of the norm. In this work are given definition of the convergent sequence of the n-normed spaces and some results for convergent sequences of the n-normed spaces.

* Mašinski fakultet,
Rudjer Bošković
P. fah 580, 1000 Skopje
MAKEDONIJA.

** Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Institute of Mathematics
St. Cyril and Methodius University
P. fah 162, 1000 Skopje
MACEDONIA