МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 6 (2019), 59 – 65
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-6.html

ПРЕДЛОГ ЗАДАЧИ ЗА ДОДАТНА НАСТАВА ПО МАТЕМАТИКА СО КОРИСТЕЊЕ ДИНАМИЧКИ СОФТВЕР

Јасмина Маркоска [1]
Ѓорѓи Маркоски [2]

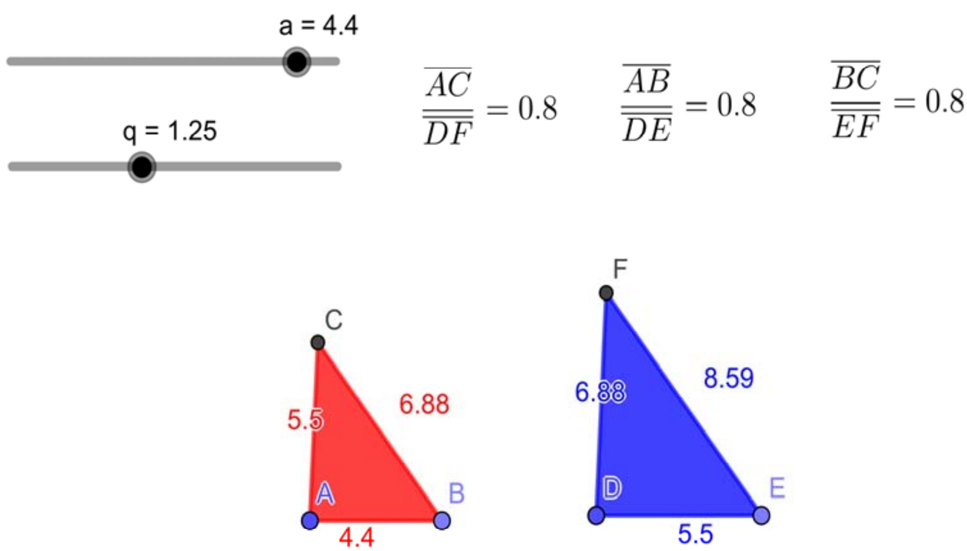
Еден од поголемите предизвици за наставниците се организација и реализација на додатната настава во училиштата. Ако се има предвид дека наставникот има обврска да ја понуди како содржина, а учениците прават избор, веднаш се наметнуваат неколку критериуми кои треба да бидат исполнети. Прво, содржините што ќе се обработуваат да бидат блиски до оние коишто се изучуваат во рамките на редовната настава. Второ, начинот на кој се реализира наставата треба да понуди поголем степен на самостојност од страна на ученикот и можност тој креативно да се изрази. Трето, изборот на задачи треба да се однесува на обединување на што повеќе знаења, посебно ако додатната настава има за цел подготовка на ученикот за учество во системот на натпреварите кои се организираат за учениците од основното и средното образование.

Во овој труд се избрани два примера кои сметаме дека ќе придонесат за збогатување на збирката задачи за додатна настава која секој наставник постепено ја надополнува. Акцентот е ставен на можноста за изработка на динамичка лабораторија во која учениците низ вршење експерименти, можат да го насетат решението на задачата, од една страна, а може да создадат нова ситуација, т.е. нова задача, од друга страна. Најлесно достапен софтвер за изработка на динамички содржини (аплети) е GeoGebra, па токму затоа одлучивме примерите кои се во трудот да ги разгледаме со помош на овој софтвер.

Задача 1. Одреди ги сите различни слични триаголници кои имаат по две исти страни.

На прв поглед задачата нема решение, но ако страните на првиот триаголник ги означиме со a,b,c а на вториот со b,c,d (при поинакви ознаки, решението е аналогно со даденото или не ги исполнува барањата од условот) и од условот за сличноста ги запишеме равенствата

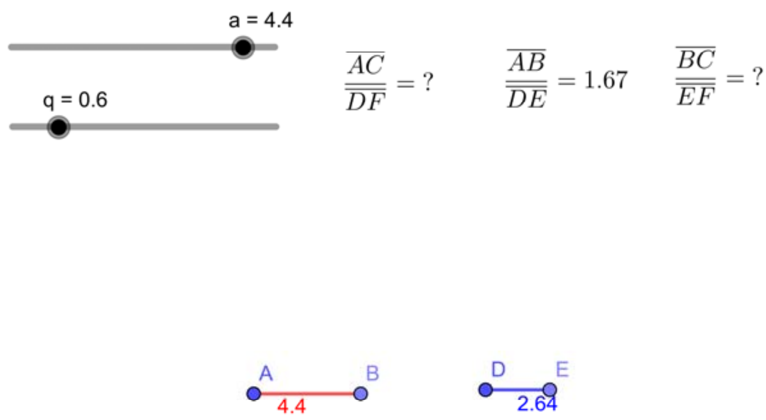
$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$, јасно е дека a, b, c, d се членови на геометриска прогресија со позитивни членови (т.е. $a > 0$, $q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} > 0$ и $q \neq 1$). Да се обидеме да ги најдеме сите такви триаголници со помош на GeoGebra, (Слика 1). Имено, се избираат два лизгачи a и q и со нивна помош се конструираат: триаголникот ABC, со страни $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b = aq$ и $\overline{AC} = c = aq^2$ и триаголникот DEF, со страни $\overline{DE} = b = aq$, $\overline{EF} = c = aq^2$ и $\overline{DF} = d = aq^3$.



Слика 1. Поставување на параметрите во аплетот.

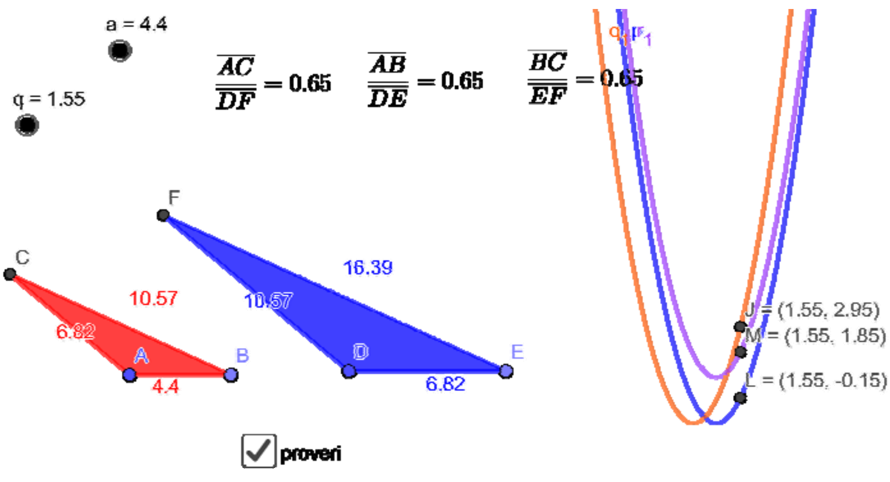
Динамичноста на аплетот овозможува разгледување на такви триаголници и набљудување на зависноста на триаголниците од должината на првиот член a и количникот на прогресијата q (податоците за промената на a, q и односите на соодветните страни може и да се меморираат во табела).

Она што ќе го забележи ученикот е дека за дадена вредност на a, на пример $a = 4,4$, ако ја менува вредноста на количникот q, за некои вредности веќе нема триаголници, на пример за $q = 0,6$ (Слика 2).



Слика 2. Егзистенција на триаголниците при промена на a и q.

Ова треба да го наведе ученикот да размислува за егзистенција на триаголниците. Ако го запише неравенството за страните на првиот триаголник ќе добие $a+b>c$ т.е. $a+aq>aq^2$, од каде што се потврдува фактот забележан низ динамичноста на аплетот, дека a не влијае на триаголниците, односно со промена на вредноста на a, за $q=0,6$ повторно нема триаголници. Останува да се најдат сите вредности на q кои се решение на системот $\begin{cases} q>0 \\ q\neq 1 \\ 1+q>q^2 \end{cases}$. Во аплетот преку исцртување на точките од облик $\left(q, q^2-q-1\right)$ се добиваат точки кои лежат на параболата $f\left(x\right)=x^2-x-1$. Со решавање на системот се добива интервалот $q\in\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\setminus\{1\}$. Но, од конструкцијата јасно се гледа дека не постојат триаголници за вредности на q кои се позитивни и помали од $0,6$. Останува ученикот да ги провери неравенствата и за преостанатите страни на првиот триаголник. Од таа проверка се добиваат неравенствата $b+c>a$, т.е. $aq+aq^2>a$ и $a+c>b$ т.е. $a+aq^2>aq$. Значи, останува да се решат системите $\begin{cases} q>0 \\ q\neq 1 \\ q+q^2>1 \end{cases}$ и $\begin{cases} q>0 \\ q\neq 1 \\ 1+q^2>q \end{cases}$, чии решенија се $q \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty \right) \setminus \{1\}$ и $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, соодветно. Конечно, бараните триаголници се добиваат за сите $a > 0$ и $q \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \setminus \{1\}$, што одговара на експериментално насетените граници на интервалот од допустливите вредности за q, затоа што $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,6$ и $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6$. Може да се изработи дополнителна проверка на решенијата на квадратните неравенки како врска со квадратна функција (Слика 3). Со избор на копчето proveri се прикажуваат параболите $x^2 - x - 1, x^2 - x + 1$ и $x^2 + x - 1$ и кога q е решение на неравенките $x^2 - x - 1 < 0, x^2 - x + 1 > 0$ и $x^2 + x - 1 > 0$, за таа вредност на q се прикажува по една точка од параболите. Точката J лежи на параболата $x^2 + x - 1$, точката M лежи на $x^2 - x + 1$ и L на $x^2 - x - 1$. При промена на q во моментот кога такви триаголници не постојат се губи некоја од точките J, M или L, т.е. q не е решение на некоја од неравенките.

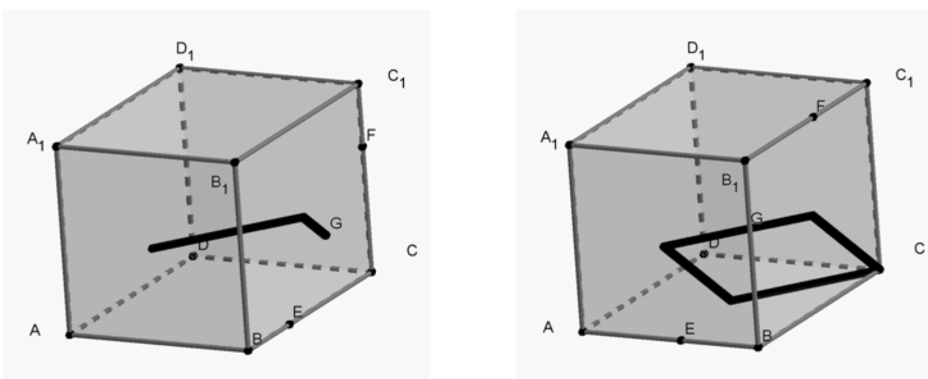


Слика 3. Геометриска интерпретација на решението.

Со помош на оваа задача, се врши повторување и обединување на знаењата кај учениците од неравенствата на триаголник, квадратна функција и неравенка и геометриска прогресија. Задачи кои може да се решаваат на сличен начин има во [1].

Задача 2. (IV ИМО, задача 3, [2]) Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со основи $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ $\left(AA_1 \,||\, BB_1 \,||\, CC_1 \,||\, DD_1\right)$. Точката E се движи со константна брзина по страните на квадратот $ABCD$ во насока $ABCDA$. Точката F се движи, со иста брзина со E, по страните на квадратот B_1C_1CB во насока $B_1C_1CBB_1$. Точките E и F го започнуваат движењето истовремено од точките A и B_1, соодветно. Одреди го геометриското место на средината G на отсечката EF.

Прво, може да се изработи аплет во GeoGebra 3D, на коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со основи $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ $\left(AA_1 \,||\, BB_1 \,||\, CC_1 \,||\, DD_1\right)$. Се одредува патеката на движење на точките E и F. Средината на отсечката EF се означува со G и се следи нејзината трага (Слика 4). Левата коцка ја прикажува трагата на G, откако точките E и F изминале растојание кое е поголемо од должината на страната на коцката, а десната коцка ја прикажува трагата после едно полно движење на точките по наведената патека.



Слика 4. Движење на точките E и F.

Динамичноста дава насоки за решавање на задачата и создава слика за бараното геометриско место на точки. Првата работа што се забележува е дека станува збор за четириаголник кој има едно теме во темето C кое е заедничко за патиштата на точките E и F кои во него пристигнуваат во ист временски момент. Втората работа е дека точката

G во третиот дел од движењето т.е. кога E се движи по CD, а F по CB, опишува половина од дијагоналата на основата $ABCD$. Може да се забележи и дека кога E се движи по BC, а F по C_1C, тогаш G опишува половина од дијагоналата на бочниот ѕид BCC_1B_1.

Овие воочувања се доволни за почеток на решавањето на задачата.

Да означиме $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. Средините на квадратите ABB_1A_1, BCC_1B_1 и $ABCD$ ќе ги означиме со P, Q и R, соодветно. Ќе го докажеме вооченото насетување, дека точката G се движи по страните на четириаголникот $PQCR$ за кој ќе докажеме дека е паралелограм, т.е. ромб.

Првиот дел од патот точките E и F се движат по отсечките AB и B_1C_1, соодветно, па нивното движење може да го запишеме како:

$$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB} = k\vec{a} \text{ и } \overrightarrow{B_1F} = k\overrightarrow{B_1C_1} = k\vec{b}, \text{ за } 0 \le k \le 1.$$

Притоа, бидејќи брзината на двете точки е еднаква, користиме ист коефициент k. Сега имаме дека $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB_1} + k\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{a} + \vec{c} + k\vec{b}$. Од тоа што G е средина на EF, добиваме дека

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}\right) = \frac{1}{2}\left(k\vec{a} + \vec{a} + \vec{c} + k\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c}\right) + \frac{1}{2}k\left(\vec{a} + \vec{b}\right).$$

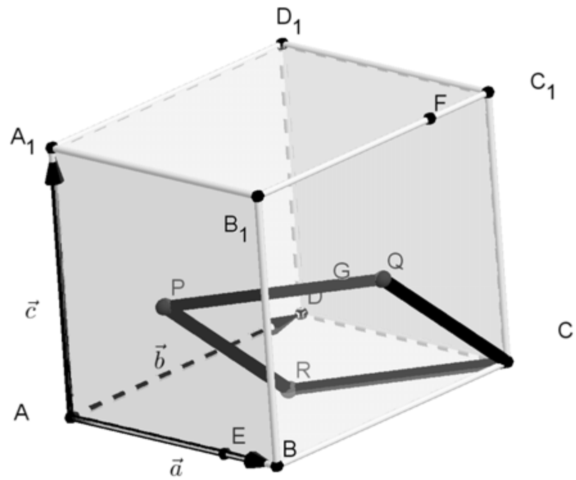
Знаеме дека $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c}\right)$ и $\overrightarrow{AQ} = \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$, па значи $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$, од каде што со замена во $\overrightarrow{AG}$ се добива дека $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AP} + k\overrightarrow{PQ}$. Ова значи дека

$$\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{PQ},$$

т.е. дека точката G се движи по отсечката PQ.

Слично се докажува дека точката G се движи по отсечките QC, CR и PR.

Од тоа што $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RC} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ и $\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{c}\right)$, следува дека $PQCR$ е паралелограм. Бидејќи $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{QC}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\vec{a}\right|$, следува дека $PQCR$ е ромб (Слика 5).



Слика 5. Бараното ГМТ.

Оваа задача е пример на создавање ситуација во која ученикот може да продолжи со истражувањето и креативно да се изрази преку набљудување на геометриското место на точки (ГМТ) кај кое, на пример, точката F се движи двапати побрзо во однос на точката E. Како и барањето за алгебарско опишување на таа ситуација.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Брадис, *Методика преподавания математики в средней школе*, Москва 1954.

[2] International Mathematical Olympiad https://www.imo-official.org/year_info.aspx?year=1962

[1] СУГС „Георги Димитров", Скопје, Р. Македонија
e-mail: jmarkoska@gmail.com

[2] Универзитет „Св. Кирил и Методиј", Скопје
Природно-математички факултет
Архимедова 3, 1000, Скопје, Р. Македонија
e-mail: gorgi.markoski@gmail.com

Примен: 24.01.2019
Поправен: 25.02.2019
Одобрен: 28.02.2019
Објавен на интернет: 4.03.2019