МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 7 (2020), 63 – 80
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-7.html

ТЕХНИКИ ЗА ГЕНЕРИРАЊЕ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ ВО СИСТЕМИ ЗА МАСОВНО ОПСЛУЖУВАЊЕ ОД ТИПОТ $M / M / n$

Стефан Мирчевски[1]

1. ВОВЕД

Во секојдневниот живот, често се среќаваме со масовни појави кои настануваат како последица на неконтролирано и неорганизирано однесување на луѓето. Некои од тие масовни појави може да бидат: огромната посетеност на маркетите и гужвите кои настануваат при чекање во редицата на каса, редиците кои настануваат на бензинските пумпи, чекањето ред во банка и слично. Но, постојат масовни појави кои не се поврзани само со луѓе, туку и со сигнали. Еден таков пример се телефонските повици кои пристигнуваат до централа и може да предизвикаат проблем доколку протокот на повиците не е регулиран и правилно контролиран.

Од овие причини, данскиот математичар Агнер Краруп Ерланг (Agner Krarup Erlang, 1878–1929) бил првиот кој понудил модел за воспоставување режим и успешно справување со телефонските повици. Неговите почетоци го означуваат почетокот на развој на една посебна гранка од математиката која се занимава исклучиво со ваквите проблеми – масовните појави и нивното контролирање. Поконкретно, оваа гранка е темел на современите операциони истражувања. Во литературата позната е како *теорија на масовно опслужување*, а често се среќава и како *теорија на редици на чекање* (Queueing Theory).

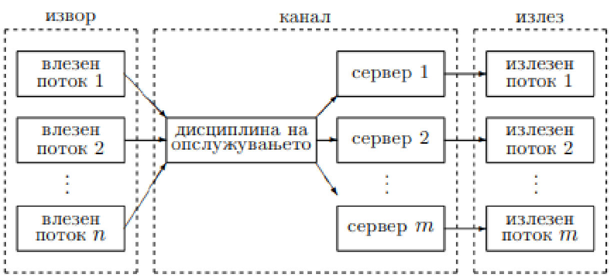
Прецизните математички интерпретации ја нудат можноста секој математички резултат да биде правилно протолкуван, независно колку сложена теорија стои зад проблемот. Затоа, целта на ова излагање е да ги доближи математичките модели од теоријата на масовно опслужување засновани на Поасонов процес и експоненцијална распределба. Истовремено, и да понуди неколку техники за генерирање случајни променливи во овие најелементарни системи. Значењето на тие техники е многу големо бидејќи истите може да се претставаат со алгоритми и брзо да се имплементираат во некој програмски софтвер. Последното, пак, укажува на зголемен ефект во справување со масовните појави од аспект на можноста брзо да реагираме, правилно да ги моделираме настанатите појави и многу брзо да добиеме резултати.

2. КОМПОНЕНТИ НА СИСТЕМИТЕ ЗА МАСОВНО ОПСЛУЖУВАЊЕ

Пред да преминеме на математичка интерпретација на моделите од теоријата на масовно опслужување, ќе наведеме неколку компоненти кои се карактеристични за сите системи за масовно опслужување. Во принцип, постојат пет компоненти кои го градат моделот на конкретниот систем за масовно опслужување, и тоа:

- Популација од клиенти;
- Тек на доаѓање (влезен поток);
- Редица на чекање;
- Дисциплина на опслужување;
- Опслужување и излез од системот.

Популацијата од клиенти или барања кои доаѓаат до системот за масовно опслужување може да биде неограничена или ограничена. Во пракса, почести се случаите за неограничена популација која е својствена, на пример, за банка која се наоѓа на некоја прометна улица, бензинска пумпа и слично. Ограничена популација може да биде, на пример, множеството машини во една фабрика.



Слика 1. Компоненти на систем за масовно опслужување, [2].

Под поимот **тек на доаѓање** подразбираме случаен процес $\{X_t,\ t\in[0,\infty)\}$ кој го определува бројот на доаѓања во интервалот

$[0,t)$. Овој тек се вика уште *влезен поток*. Нека $t_1, t_2, ...$ се моменти на пристигнување на клиенти во системот, а $T_i = t_i - t_{i-1}$ е должината на интервалот меѓу пристигнување на $(i-1)-$от и $i-$тиот клиент. Доколку X_i е бројот на клиенти во системот во моментот t_i, $i = 1, 2, ...$, ги разликуваме следните поделби на влезниот поток:

- *Поток со ограничена меморија* е поток добиен кога случајните променливи $T_1, T_2, ..., X_1, X_2, ...$ се независни во целина.
- *Ординарен поток* е поток во кој не е можно да се појават два или повеќе клиенти во еден ист момент, т.е. $P\{X_i > 1\} = 0,\ i = 1, 2, ...$
- *Поток без меморија* е поток во кој веројатноста да се појават k клиенти во интервал $[T, T+t]$ не зависи од тоа колку клиенти се појавиле пред тој интервал.
- *Стационарен поток* е поток во кој веројатноста да се појават k клиенти во интервал $[T, T+t]$ не зависи од T, туку е функција од t и k.

Влезниот поток во кој се исполнети условите за стационарност, без меморија и ординарност, се нарекува уште *прост поток*. Се покажува дека потокот кој ги задоволува овие својства може да се опише со Поасонов процес. Затоа влезниот поток со овие особини се нарекува и *Поасонов влезен поток* или *Поасонов прост поток*, [6]. Поасоновиот влезен поток ќе биде централен поим во моделите за кои ќе стане збор малку подоцна.

Редица на чекање претставува точен број на клиенти кои чекаат да бидат опслужени. Се разбира, редицата може да биде и празна. Во реална ситуација, редиците се ограничени, но постојат теориски математички модели кои дозволуваат тие да бидат и неограничени. Тогаш кога редицата е ограничена, некои клиенти ќе мора да бидат вратени назад без да им се изврши бараната услуга.

Дисциплината на опслужување е исто така многу важна компонента при спроведување клиенти (барања) низ системот. Практично, дисциплина на опслужување значи правило според кое клиентите се редат во редицата на чекање, т.е. правило според кое тие влегуваат и излегуваат од неа. Неколку начини на организирање на редицата се следните:

(i) *FIFO* (*First in first out*) што значи дека опслужувањето ќе се врши според доаѓањето на клиентите т.е. тој што пристигнал прв, ќе биде прв и за опслужување во каналот. Често се користи и ознаката FCFS (First come first served);

(ii) *LIFO* (*Last in first out*) или *LCFS* (*Last come first served*) што значи дека опслужувањето ќе се врши обратно од опслужувањето во FIFO т.е. тој што пристигнал прв, ќе биде последен за опслужување во каналот, додека тој што пристигнал последен, ќе биде прв;

(iii) *SIRO* (*Service in random order*) што значи дека опслужувањето ќе се врши по случаен редослед т.е. случаен избор на клиентите;

(iv) *Редици со приоритет (прво се опслужуваат клиентите со приоритет).*

Опслужување е активност за која клиентите чекаат. Времетраењето на опслужувањето најчесто е случајно, па затоа математичките модели се основани на некоја од познатите распределби на веројатност за времето на опслужување. Опслужувањето може да се врши низ еден канал или низ повеќе канали. Во зависност од ова, системите може да бидат едноканални или повеќеканални системи за масовно опслужување, соодветно. Излезот од системот, пак, е начинот на кој клиентите го напуштаат системот. Оваа компонента најчесто се изостава при поставување на теориските модели на системите.

2.1. КЕНДАЛОВА КЛАСИФИКАЦИЈА

Англискиот математичар и статистичар Дејвид Џорџ Кендал (David George Kendall, 1918–2007) направил една општа класификација на системите за масовно опслужување. Таа класификација низ годините претрпела многу промени, за денес да постои еднозначно определена ознака преку која се идентификуваат системите за масовно опслужување со Поасонов влезен поток и експоненцијално распределено време на опслужување. Тие системи се обележуваат со ознаката $M/M/n$, каде што симболот M ги означува распределбата на должината на интервалите меѓу две последователни доаѓања и распределбата на времето на опслужување и тоа, специјално, за системи со Поасонов влезен поток и експоненцијално распределено време на опслужување. Со n се означува бројот на канали (сервери) во системот. Оваа ознака може да се дополни со уште еден симбол кој се однесува на капацитетот на редицата. Познато е дека може да имаме ограничен или неограничен број клиенти кои чекаат да бидат опслужени. Понатаму ќе се задржиме на системите за масовно опслужување со повеќе канали (специјално, и со еден канал) во кои имаме неограничен број клиенти.

3. ЕЛЕМЕНТАРНИ СИСТЕМИ ЗА МАСОВНО ОПСЛУЖУВАЊЕ ОД ТИПОТ $M / M / n$

3.1. СИСТЕМИ СО ПОВЕЌЕ КАНАЛИ И НЕОГРАНИЧЕН БРОЈ КЛИЕНТИ $M / M / n / \infty$

Тука станува збор за системи за масовно опслужување во кои има n канали и неограничен број клиенти, за чие правилно претставување исклучиво се важни неколку претпоставки. Пред да ги наведеме претпоставките, потребно е да укажеме на неколку важни ознаки кои се однесуваат на параметрите за овој систем. Ги воведуваме следните ознаки:

w – број на клиенти во системот,

r – број на клиенти кои чекаат во редицата за да бидат опслужени,

n – вкупен број на канали,

s – број на слободни канали.

Знаејќи ги овие ознаки, може да зборуваме за параметрите во системи со n канали на опслужување т.е. за:

$\overline{w}$ – просечен број на клиенти во системот,

$\overline{r}$ – просечен број на клиенти во редицата на чекање,

$\overline{s}$ – просечен број слободни канали,

$\overline{t_w}$ – просечно време поминато во системот,

$\overline{t_r}$ – просечно време поминато во редицата на чекање,

$\overline{t_s} -$ просечно време на опслужување.

Основните претпоставки врз кои се изградени системите од типот $M / M / n / \infty$ се:

(i) Системот има Поасонов влезен поток на доаѓања со интензитет $\lambda,\ \lambda > 0$ т.е. во единица време, просечниот број доаѓања е λ;

(ii) Времето на опслужување на клиентите е случајна променлива со експоненцијална распределба со параметар $\mu,\ \mu > 0$ т.е. просечното време на опслужување е $\frac{1}{\mu}$, а просечниот број опслужени клиенти во единица време е μ;

(iii) Во случај на зафатеност на каналот за опслужување, клиентот застанува во редицата на чекање;

(iv) Клиентите се опслужуваат според FIFO начинот на опслужување;

(v) Системот ќе работи во стационарен режим ако $\lambda < \mu$.

(vi) Ако бројот на клиенти во системот w е помал од бројот на канали n т.е. $w < n$, тогаш не доаѓа до формирање на редица на чекање бидејќи секој клиент кој ќе влезе во системот веднаш се упатува кон слободниот канал за опслужување;

(vii) Ако бројот на клиенти во системот е поголем или еднаков од бројот на канали т.е. $w \geq n$, тогаш постои можност за формирање редица на чекање, така што во редицата ќе има $w - n$ клиенти.

Овој систем е наполно определен, ако се познати веројатностите во системот да има точно w клиенти. Поради претпоставките (vi) и (vii), тие веројатности се делат на два дела, и тоа:

$$p_w = \begin{cases} \dfrac{\rho^w}{w!} p_0, & 0 \leq w < n \\ \dfrac{\rho^w}{n! n^{w-n}} p_0, & w \geq n \end{cases}$$

каде што $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, $p_0 = \frac{1}{S}$, а со $S = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^n}{(n-\rho)(n-1)!}$ е дадена сумата на конвергентниот ред

$$1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n} \right)^i$$

добиен од интензитетите на доаѓање и заминување на клиентите од системот со n канали на опслужување.

3.2. СИСТЕМИ СО ЕДЕН КАНАЛ И НЕОГРАНИЧЕН БРОЈ КЛИЕНТИ $M/M/1/\infty$

За овој тип системи за масовно опслужување лесно може да заклучиме дека е специјален случај на типот $M/M/n/\infty$, при што сега имаме точно еден канал на опслужување. Во овој случај важат претпоставките $(i)-(v)$ направени за претходниот модел. Она што е важно да се потенцира и тука, е веројатноста во даден момент да има w клиенти во системот. Таа се определува со

$$p_w = \rho^w (1-\rho), \ \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Слично како и во претходниот модел, одредувањето на параметрите се сведува на користење на последната релација, преку теорија на редови и нивни особини. Деталните изведувања на параметрите и за двата случаја, може да се погледнат во [7]. Во Табела 1 ги издвојуваме само крајните резултати кои се од многу голема важност при генерирањето на случајни променливи.

4. ТЕХНИКИ ЗА ГЕНЕРИРАЊЕ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ ВО СИСТЕМИ ОД ТИПОТ $M/M/n$

Основна причина за појава на потребата од генерирање случајни променливи во системи за масовно опслужување е токму случајноста која се појавува во текот на пристигнување и опслужување на клиенти (барања) низ системот.

Во принцип, секогаш кога зборуваме за случајност во некоја појава, понатаму расудувањата ги правиме врз основа на распределбите на случајни променливи кои ја опишуваат таа појава. Конкретно, кај системите за масовно опслужување од типот $M/M/n$, случајни променливи се појавуваат во два момента, и тоа:

(i) При опишување на времето меѓу две последователни пристигнувања на клиенти (барања) во системот, и

(ii) При опишување на времето на опслужување на клиентите.

И во двата случаја времињата имаат експоненцијална распределба.

Параметар	**Едноканален систем**	**Повеќеканален систем**
$\overline{w}$	$\dfrac{\rho}{1-\rho}$	$\overline{r}+\rho$
$\overline{r}$	$\dfrac{\rho^2}{1-\rho}$	$\dfrac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2}p_0$
$\overline{s}$	$1-\rho$	$n-\rho$
$\overline{t_w}$	$\dfrac{1}{\mu-\lambda}$	$\dfrac{\overline{w}}{\lambda}$
$\overline{t_r}$	$\dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$	$\dfrac{\overline{r}}{\lambda}$
$\overline{t_s}$	$\dfrac{1}{\mu}$	$\dfrac{1}{\mu}$

Табела 1. Параметри добиени за едноканални и повеќеканални системи.

За потребите на програмските софтвери кои сè почесто се користат во оваа проблематика за добивање нумерички резултати, мора да постојат и техники со кои ќе се генерираат горенаведените случајни променливи. Тука ќе направиме преглед на две техники за генерирање случајни променливи во системи од типот $M/M/n$.

4.1. ОСНОВНИ ПРЕТПОСТАВКИ ЗА ТЕХНИКИТЕ

Во основата на сите техники за генерирање случајни променливи се претпоставува дека постојат случајни броеви $r_1, r_2, \ldots$ кои се реализација на случајната променлива $R \sim \boldsymbol{U}(0,1)$. Функцијата и густината на распределба на случајната променлива R , во теорија на веројатност, се дефинираат на следниот начин, [1]:

Густина на распределба на $R \sim \boldsymbol{U}(0,1)$:

$$f_R(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}.$$

Функција на распределба на $R \sim \boldsymbol{U}(0,1)$:

$$F_R(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0] \\ x, & x \in (0,1] \\ 1, & x \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

4.2. ТЕХНИКА СО ИНВЕРЗНА ТРАНСФОРМАЦИЈА (INVERSE TRANSFORM TECHNIQUE)

Техниката со инверзна трансформација е и најчесто користената техника за генерирање случајни променливи за чија функција на распределба може лесно да се определи инверзната функција. Меѓу другите, една таква случајна променлива е X која има експоненцијална распределба со параметар $\lambda,\ \lambda > 0$. Всушност, со оваа техника наместо да се генерираат случајни променливи со Поасонова распределба заради влезниот поток на клиентите во системите, може едноставно да се генерираат само експоненцијално распределени случајни променливи, [8]. Тоа е возможно, бидејќи како што видовме претходно, ако влезниот поток е Поасонов, времето меѓу две последователни пристигнувања на клиенти има експоненцијална распределба. Исто така и времето на опслужување има експоненцијална распределба. На тој начин системите од овој тип може да се симулираат со користење на само една распределба.

На почеток ќе наведеме неколку основни теореми со чија помош може да се разбере суштината на оваа техника, како и нејзино толкување преку алгоритамски пристап.

Нека е дадена функција на распределба $F(x),\ x \in \mathbb{R}$. За функцијата $F:\mathbb{R} \to [0,1]$ важи дека е ненегативна и неопаѓачка функција која што е непрекината од десно. Целта е да генирираме случајна променлива X со функција на распределба $F(x) = P\{X \le x\},\ x \in \mathbb{R}$.

Дефинираме инверзна функција на функцијата F, $F^{-1}:[0,1] \to \mathbb{R}$ на следниот начин:

$$F^{-1}(y) = \min\{x : F(x) \ge y\},\ y \in (0,1). \tag{1}$$

Пред да ја формулираме теоремата која, всушност, ја претставува самата техника преку инверзна функција, ќе ја разгледаме следната теорема.

Теорема 1. *Нека е дадена случајна променлива* X *со функција на распределба* $F(x)$ *и нека* $R = F(X)$. *Тогаш* $R \sim \boldsymbol{U}(0,1)$.

Доказ. Бидејќи $0 \le F(x) \le 1$, имаме дека $P\{0 \le R \le 1\} = 1$. Треба да покажеме дека $P\{R < y\} = y$, што ќе повлекува дека $P\{R \le y\} = y$. Бидејќи функцијата F е непрекината, го избираме x така што $F(x) = y$. Тогаш $P\{R < y\} = P\{R < y, X < x\} + P\{R < y, X \ge x\}$. Од тоа што F е неопаѓачка функција, $F(x) = y$ и $R = F(X)$, следува дека

$$P\{R < y, X < x\} = P\{X < x\} = F(x) = y,$$

бидејќи настанот $\{X < x\}$ е подмножество од настанот $\{R < y\}$. Настанот $\{R < y, X \ge x\}$ е невозможен настан, па $P\{R < y, X \ge x\} = 0$.

Одовде следува резултатот $P\{R < y\} = y$, за $0 < y < 1$, т.е. $R \sim \boldsymbol{U}(0,1)$. ■

Доказот на Теорема 1 е многу полесен во случај кога функцијата F е строго растечка функција. Тој може да се погледне во [5].

Теорема 2 (*Техника со инверзна трансформација*), [9].
Нека $F(x), x \in \mathbb{R}$ *е функција на распределба и* $F^{-1}(y), y \in (0,1)$ *е инверзна функција дефинирана со* (1) *и нека* $R \sim \boldsymbol{U}(0,1)$. *Тогаш*

случајната променлива $X = F^{-1}\left(R\right)$ *има функција на распределба* $F\left(x\right)$.

Прашањето за генерирање случајни променливи со оваа техника се сведува на користење на претходните две теореми, кои може да се соединат во еден алгоритам.

АЛГОРИТАМ 1 (*Техника со инверзна трансформација*).

Чекор 1. Определи ја функцијата на распределба $F\left(x\right)$ на случајната променлива X која треба да се симулира.

Чекор 2. Стави $F\left(X\right) = R$, $R \sim \boldsymbol{U}\left(0,1\right)$.

Чекор 3. Реши ја равенката $F\left(X\right) = R$ по X.

Чекор 4. Генерирај реализации $r_1, r_2, \ldots$ на случајната променлива $R \sim \boldsymbol{U}\left(0,1\right)$ и пресметај $x_i = F^{-1}\left(r_i\right)$, $i = 1,2,\ldots$

Како што кажавме на почетокот од овој параграф, од посебна важност за системите за масовно опслужување од типот $M / M / n$ има експоненцијалната распределба. Ако должината на интервалите меѓу две последователни пристигнувања на клиенти $X_1, X_2, \ldots$ има експоненцијална распределба со параметар λ, $\lambda > 0$, тогаш λ го означува очекуваниот број на пристигнувања во единица време. Секако, очекуваната должина на интервалите меѓу две последователни пристигнувања се определува како математичко очекување

$$EX_i = \int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}, \; i = 1,2,\ldots$$

Затоа, претходниот Алгоритам 1 може да се специјализира за генерирање случајни променливи со експоненцијална распределба.

АЛГОРИТАМ 2 (*Техника со инверзна трансформација за генерирање случајни променливи со експоненцијална распределба*).

Чекор 1. Определи ја функцијата на распределба

$$F\left(x\right) = 1 - e^{-\lambda x}, \; x > 0, \; \lambda > 0.$$

Чекор 2. Стави $1 - e^{-\lambda x} = R$, $R \sim \boldsymbol{U}\left(0,1\right)$.

Чекор 3. Реши ја равенката $1-e^{-\lambda x}=R$ по X и добиј $X=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-R)$.

Чекор 4. Генерирај реализации $r_1,r_2,...$ на случајната променлива $R\sim \boldsymbol{U}(0,1)$ и пресметај $x_i=F^{-1}(r_i)=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-r_i)$, $i=1,2,...$

Имајќи предвид дека ако $R\sim \boldsymbol{U}(0,1)$, тогаш и $1-R\sim \boldsymbol{U}(0,1)$, последниот чекор од Алгоритам 2 може да се запише како $x_i=-\frac{1}{\lambda}\ln(r_i)$.

4.3. ТЕХНИКА НА ПРИФАЌАЊЕ И ОДБИВАЊЕ (ACCEPTANCE-REJECTION TECHNIQUE)

Друга техника за генерирање случајни променливи е техниката на прифаќање и одбивање. Разликата меѓу претходната и оваа техника се состои во можноста тука да одлучиме колку пристигнувања на клиенти ќе се генерираат од Поасоновиот влезен поток во системот, пред завршување на единица време. Ова значи дека, под одредени услови, треба да го „прифатиме“ условот дека во системот ќе има точно k пристигнувања пред завршување на единица време, а секое нарушување на овој услов, да го „одбиеме“. Она што е заедничко, пак, за двете техники се токму интервалите меѓу две последователни пристигнувања од влезниот поток, за кои веќе кажавме дека имаат експоненцијална распределба. Кога зборуваме за експоненцијална распределба, интервалите може да се генерираат со техниката со инверзна трансформација.

Заради влезниот поток во системот, потребно е да разгледаме Поасонова распределба со параметар $\lambda t>0$, дадена со законот на распределба

$$P\{N_t=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ \lambda>0,\ k=0,1,2,... \qquad (2)$$

Последната распределба на веројатност има улога на „бројач“ кој ги брои пристигнувањата на клиенти од Поасонов процес N_t за време t. Специјално, за $t=1$, ако ставиме $N_1=N$, добиваме случајна променлива N која го дава бројот на пристигнувања на клиенти во системот во единица време.

Сега, ако ги земеме предвид интервалите меѓу две последователни пристигнувања на клиенти $X_1, X_2, ...$ кои имаат експоненцијална распределба со параметар $\lambda > 0$, може да ја конструираме врската меѓу Поасонов процес и експоненцијална распределба преку следната теорема.

Теорема 3 (*Врска меѓу Поасонов процес и експоненцијална распределба*). *Нека* (X_n) *е низа независни случајни променливи со експоненцијална распределба со параметар* $\lambda > 0$ *кои го означуваат времето меѓу две последователни пристигнувања на клиенти во системот. Тогаш бројачот* N_t *зададен со законот на распределба* (2)*, е Поасонов процес.*

Доказот на оваа теорема може да се погледне во [4].

Ако се стави $t = 1$ во последната теорема, може да заклучиме дека бројот на пристигнувања на клиенти пред завршување на единица време ќе биде точно $N = k$ ако и само ако

$$X_1 + ... + X_k \leq 1 < X_1 + ... + X_k + X_{k+1}, \tag{3}$$

т.е. ќе има точно k пристигнувања до завршување на единица време, а $(k+1)-$то пристигнување ќе биде по завршување на единица време.

Идејата на техниката на прифаќање и одбивање е токму тоа, да се генерираат должини на интервали меѓу две последователни пристигнувања на клиенти (со експоненцијална распределба), сè додека не се надмине единица време. Ако k е најголемиот број за кој е задоволен условот $X_1 + ... + X_k \leq 1$, прифаќаме $N = k$.

Од направената дискусија, може да ги формираме чекорите на алгоритмот за оваа техника.

АЛГОРИТАМ 3 (*Техника на прифаќање и одбивање*).

Чекор 1. Стави $k = 0,\ P\{N = 0\} = 1$.

Чекор 2. Генерирај случаен број r_{k+1} и стави

$$P\{N = k+1\} = P\{N = k+1\} \cdot r_{k+1}.$$

Чекор 3. Ако е задоволен условот $P\{N=k+1\}<e^{-\lambda},\ \lambda>0$, „прифати" го $N=k$. Инаку, „отфрли" го k и стави $k=k+1$. Оди на Чекор 2.

Критериумот $e^{-\lambda},\ \lambda>0$ на кој е базирана нашата одлука за прифаќање, односно одбивање на условот, се добива од реализациите $x_i=-\frac{1}{\lambda}\ln(r_i),\ i=1,2,...$ на случајната променлива X, генерирани во последниот чекор од Алгоритам 2. Имено, ако во неравенството (3) замениме со

$$\sum_{i=1}^{k}-\frac{1}{\lambda}\ln(r_i)\le 1<\sum_{i=1}^{k+1}-\frac{1}{\lambda}\ln(r_i),$$

може последното неравенство да го помножиме со $-\lambda$, да ги искористиме основните правила за логаритмирање (збир од логаритми е логаритам од производ) и да ставиме $e^{\ln x}=x$, [3]. Тогаш, ќе добиеме дека

$$\prod_{i=1}^{k}r_i\ge e^{-\lambda}>\prod_{i=1}^{k+1}r_i\ .$$

Се поставува прашањето, колку случајни броеви се потребни за да се генерира една вредност на случајната променлива N? Во принцип, ако $N=k$, потребни се $k+1$ случајни броеви. Така, очекуваниот (просечниот) број на случајни броеви може да се пресмета како математичко очекување на случајната променлива $N+1\sim \boldsymbol{P}(\lambda+1)$ т.е.

$$E(N+1)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{(\lambda+1)^k}{k!}e^{-(\lambda+1)}=(\lambda+1)e^{-(\lambda+1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda+1)^{k-1}}{(k-1)!}=$$

$$=(\lambda+1)e^{-(\lambda+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda+1)^k}{k!}=(\lambda+1)e^{-(\lambda+1)}e^{\lambda+1}=\lambda+1.$$

5. ЕДНОШАЛТЕРСКИ СИСТЕМ ВО БАНКА

Во продолжение ќе ги презентираме резултатите добиени од генерирање случајни променливи со техниката со инверзна трансформација за систем од типот $M/M/1/\infty$. Ќе разгледаме банкарска експозитура во која има еден шалтер наменет за вршење услуги на правни лица (клиенти). Шалтерот има капацитет да опслужи 15 клиенти за еден час.

Од долгогодишното искуство на работење на банката, забележано е дека во текот на еден час, во просек, доаѓаат по 12 клиенти. Со помош на техниката со инверзна трансформација ќе забележиме какви резултати се добиваат знаејќи ги овие информации поврзани со работата на банката. Резултатите добиени со помош на Excel, а со користење на Алгоритам 2 за 10 клиенти, прикажани се во следната табела:

Клиенти	Време на пристигнување	Случаен број 1	**Време меѓу две пристигнувања**	Време на започнување на опслужување	Случаен број 2	**Време на опслужување**	Време на завршување на опслужување
1	0	0,394628	0,041826045	0	0,668388	0,073585911	0,073585911
2	0,041826045	0,421659	0,045632576	0,073585911	0,345145	0,02822275	0,101808661
3	0,087458621	0,652962	0,088193516	0,101808661	0,82898	0,117731833	0,219540494
4	0,175652137	0,662599	0,090540271	0,219540494	0,201201	0,014976365	0,234516859
5	0,266192408	0,455477	0,050653814	0,266192408	0,354649	0,029197432	0,295389841
6	0,316846222	0,53535	0,063872554	0,380718776	0,447802	0,039589963	0,420308739
7	0,380718776	0,432482	0,047206911	0,420308739	0,611007	0,062946345	0,483255085
8	0,427925687	0,229784	0,021757001	0,483255085	0,101638	0,007145444	0,490400528
9	0,449682688	0,557548	0,06795192	0,490400528	0,54789	0,052921989	0,543322517
10	0,517634608	0,48455	0,055226271	0,543322517	0,923988	0,171790893	0,71511341

Табела 2. Резултати (опслужување на 10 клиенти во банка со еден шалтер).

Како што може да заклучиме од податоците во овој пример, интензитетот на доаѓање на клиентите е $\lambda = 12$, додека интензитетот на заминување на клиентите е $\mu = 15$. Тоа значи дека факторот на опслужување изнесува $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,8$, што може да се протолкува и како фактор на искористеност на системот. Следствено, шалтерот работи користејќи 80% од својот капацитет, а бидејќи важи и $\lambda < \mu$, за овој систем постои стационарна распределба.

Понатаму, може да зборуваме и за тоа како се добиени резултатите прикажани во Табела 2, а се однесуваат на времето меѓу две пристигнувања, времето на започнување на опслужувањето, времето на опслужување и времето на завршување на опслужувањето.

(i) *Времето на пристигнување* се определува, на почеток иницијално како 0, а потоа за секој нареден клиент како збир на времето на пристигнување на претходниот клиент и времето меѓу две пристигнувања за претходниот клиент.

(ii) *Времето меѓу две последователни пристигнувања* е многу важен момент за добивање на резултатите бидејќи се пресметува како што е прикажано во Алгоритам 2 , со формулата $x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(r_i)$, $i = 1,2,...$, пришто за секој клиент се користи соодветната реализација на случајната променлива R т.е. соодветниот генериран случаен број.

(iii) *Времето на започнување на опслужувањето* е, всушност, поголемата вредност од времето на пристигнување на моменталниот клиент за кој се врши пресметувањето и времето на завршување на опслужувањето на претходниот клиент.

(iv) *Времето на опслужување*, слично како времето меѓу две пристигнувања на клиентите, се пресметува според формулата $x_i = -\frac{1}{\mu}\ln(r_i)$, $i = 1,2,...$, земајќи ја предвид генерираната вредност на случајниот број за клиентот за кој се врши пресметувањето.

(v) *Времето на завршување на опслужувањето* е збир на времето на започнување на опслужувањето и времето на опслужување за клиентот за кој се врши пресметувањето.

Исто така, ако ги разгледаме параметрите прикажани во Табела 1 за едноканален систем, може да дојдеме до следните заклучоци:

– Просечниот број клиенти во редицата на чекање изнесува

$$\overline{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0,64}{0,2} = 3,2 .$$

– Просечниот број клиенти во системот изнесува

$$\overline{w} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0,8}{0,2} = 4 .$$

– Просечниот број слободни канали изнесува $\overline{s} = 1-\rho = 0,2$.

– Просечно време поминато во редицата на чекање изнесува

$$\overline{t_r} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{12}{45} = 0,27 .$$

– Просечното време поминато во системот изнесува

$$\overline{t_w} = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{3} = 0,33 .$$

– Просечното време на опслужување изнесува $\overline{t_s} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{15} = 0,06$.

6. ЗАКЛУЧОК

Во теоријата на масовно опслужување се преземаат ригорозни, строги и прецизни математички чекори со цел да се воспостави ред и дисциплина на однесување на клиенти во некаков систем. Она што е многу важно, а се однесува на сите системи за масовно опслужување, е наоѓањето начин да се постави ред, а притоа да не се нарушат економичноста и оптималноста во самиот процес. Случајноста како неизбежен дел во сите модели од оваа математичка област, дополнително ја нуди можноста да размислуваме користејќи алатки базирани на веројатност и конкретни факти од случајни процеси. Затоа, како што покажуваат и двете техники презентирани во овој труд, целата проблематика се сведува на генерирање случајни променливи кои следат некоја распределба на веројатност. Генерирањето на случајните променливи може да се изврши преку некој програмски софтвер, а сепак, со користење на изведените математички модели, кои во овој труд беа посветени на наједноставните системи за масовно опслужување од типот $M / M / n$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Бакева, *Веројатност*, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Факултет за информатички науки и компјутерско инженерство, Скопје, 2016.

[2] В. Бакева, М. Георгиева, *Случајни процеси* (предавања и вежби), Скопје, 2003.

[3] J. Banks, J. Carson, B. Nelson, D. Nicol, *Discrete-Event System Simulation*, Prentice Hall, New Jersey, 2009.

[4] N. Elezović, *Vjerojatnost i statistika: Matematička statistika, Stohastički procesi*, Element, Zagreb, 2007.

[5] K. Knight, *Mathematical Statistics,* Chapman and Hall/CRC, New York, 2000.

[6] Р. Малчески, С. Малчески, *Операциони истражувања*, Универзитет ФОН, Скопје, 2014.

[7] A. Obretenov, B. Dimitrov, E. Danielyan, *Masovo obsluzhvane i prioritetni sistemi na obsluzhvane*, Nauka i izkustvo, Sofiya, 1973.

[8] S. M. Ross, *Introduction to Probability Models*, Academic Press Elsevier, New York, 2010.

[9] K. Sigman, *Inverse Transform Method* (Lecture notes), Columbia University, New York, 2010. http://www.columbia.edu/~ks20/4404-Sigman/4404-Notes-ITM.pdf

[1]Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: stefan_mircevski@outlook.com

Примен: 5.4.2020
Поправен: 25.4.2020
Одобрен: 28.4.2020
Објавен на интернет: 30.4.2020