ЗА ЕДЕН D'ALEMBERT-ов УСЛОВ НА ИНТЕГРАБИЛНОСТ НА БАЛИСТИЧКАТА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите од Н Р Македонија, кн. 1, 1950, 29-30

1. Разматрајќи ја диференцијалната равенка на надворешната балистика

$$(1) \qquad (y + \rho)\, y' + y^2 - 1 = 0,$$

D'Alembert го дава, за случајот кога $\rho(x)$ има облик

$$(2) \qquad \rho(x) = Ax^2 + Bx + C$$

(A, B, C, константи),

следниот услов за интеграбилност со помош на квадратури

$$(3) \qquad B^2 = A^2 + 4AC + 4.$$

Диференцијалната равенка (1) во овој случај добива облик

$$(4) \qquad (y^2 - 1)\frac{dx}{dy} + Ax^2 + Bx + \frac{B^2 - A^2 - 4}{4A} + y = 0,$$

која што претставува Riccati-ева диференцијална равенка. Лесно се проверува дека оваа диференцијална равенка има еден партикуларен интеграл од облик $x = py + q$, што во нашиот случај е

$$x = \frac{A - B - 2y}{2A}.$$

По тој начин диференцијалната равенка (4) се сведува на линеарната

$$\frac{du}{dy} + \frac{2y - A}{y^2 - 1}u = \frac{A}{y^2 - 1}$$

на која општиот интеграл е

$$u = (y - 1)^{\frac{A-2}{2}} (y + 1)^{\frac{-A+2}{2}} \left[K + A\int \frac{y+1}{y-1}\, dy\right]$$

За општиот интеграл на балистичката диференцијална равенка имаме тогаш

$$f_1(y)\, \frac{2(Ax - y) + (A - B)}{2A}\, (K + f_2) = 1,$$

каде се

$$f_1 = \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{\frac{A}{2}} \frac{1}{y^2 - 1},$$

$$f_2 = A\int \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{\frac{A}{2}} dy.$$

2. Нашата цел ќе биде прво, да покажеме дека диференцијалната равенка (1), кога функцијата $\rho(x)$ има облик (2), може да се сведе на хипергеометриската диференцијална равенка

$$(5)\quad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)\,x\right]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0,$$

и поради това може да се претстави општиот интеграл на диференцијалната равенка (1) со хипергеометриски функции.

По това ќе покажеме дека четирите случаји на интеграбилност на диференцијалната равенка (5) со полиноми, го даваат како услов за интеграбилност на балистичката диференцијална равенка (1) единствениот услов, чиј облик е

$$(6)\quad B^2=\frac{A^2}{k^2}+4k^2+4AC,\qquad (k\text{ — цел број}).$$

Овој услов го обопштува условот даден од D' Alembert (3) што се сведува на него за $k=1$.

Аналогно проширење на D' Alembert-овиот случај на интеграбилност на балистичката диференцијална равенка (1), кога функцијата $\rho(x)$ има облик

$$\rho(x)=Ae^{nx}+Be^{-nx}+R,$$

е дадено од Карамата[1]), под следниот облик

$$\frac{1}{n^2}+\frac{AB}{k(n+k)}=\frac{R^2}{(n+2k)^2}\qquad (k\text{ — цел број})$$

од каде што се добива исто така D' Alembert-овиот услов, ставајќи $k=1$.

3. Ако ја ставиме во диференцијалната равенка (1) функцијата $\rho(x)$ дадена со (2) и ако ја извршиме следната трансформација

$$(7)\qquad u=exp\left(\int\frac{A}{y^2-1}\,xdy\right),$$

оваа равенка се редуцира на линеарната диференцијална равенка од втори ред

$$(8)\qquad (y^2-1)^2\frac{d^2u}{dy^2}+(y^2-1)(2y+B)\frac{du}{dy}+A(C+y)\,u=0.$$

Со новата смена

$$(9)\qquad u=(y-1)^p\,(y+1)^q z,$$

диференцијалната равенка (8) станува

$$(10)\qquad (y^2-1)^2\frac{d^2z}{dy^2}+(y^2-1)\,[2p(y+1)+q(y-1)+2y$$
$$+B]\frac{dz}{dy}+P(y)\,z=0,$$

каде што со $P\ (y)$ сме го означили полиномот

$$P\,(y) = (p+q)\,(p+q+1)\,y^2 + 2\,(p^2 - q^2) + B\,(p+q) + A\;y + (p-q)^2 \\ - (p+q) + B\,(p-q) + AC.$$

Параметрите p и q беа избрани произволни. Да ги одредиме сега овие параметри и констатанта L така, да биде

$$P\,(y) = L\,(y^2 - 1). \tag{11}$$

Од тука добиваме трите равенки:

$$\begin{aligned} (p+q)\,(p+q+1) &= L, \\ 2\,(p^2 - q^2) + B\,(p+q) + A &= 0, \\ (p-q)^2 + B\,(p-q) - (p+q) + AC &= -L, \end{aligned} \tag{12}$$

кој решени ни даваат вредностите за p, q и L.

За бараниот пак услов на интеграбилност доволно е да ги елиминираме од системот (12) величините $(p-q)$ и L. Елиминацијата ни дава следната релација за $(p+q)$

$$A^2 - B^2\,(p+q)^2 + 4\,(p+q)^4 + 4\,AC\,(p+q)^2 = 0,$$

која се сведува на равенка по σ

$$B^2 = \frac{A^2}{\sigma^2} + 4\,\sigma^2 + 4\,AC, \tag{13}$$

каде што е

$$\sigma = p + q$$

и која равенка е управо обликот на условот за интеграбилност (6) споменат по горе.

Внесувајќи ја оваа вредност за $P\,(y)$ во диференцијалната равенка (10) и ставајќи

$$\begin{aligned} a &= 2\,(p+q) + 2 \\ b &= 2\,(p-q) + B, \end{aligned} \tag{14}$$

таа станува

$$(y^2 - 1)\,\frac{d^2z}{dy^2} + (ay + b)\,\frac{dz}{dy} + Lz = 0. \tag{15}$$

Последната диференцијална равенка претставува специјален случај на Legendre-ова диференцијална равенка.

Имајќи предвид втората од равенките (14), за a и b имаме следните вредности:

$$a = 2\,(\sigma + 1), \;\; b = -\,\frac{A}{\sigma}, \tag{16}$$

каде е

$$\sigma = p + q.$$

Со познатата трансформација

$$z\,(y) = \eta\,(\xi) \;\text{ и }\; y = 2\,\xi - 1, \tag{17}$$

диференцијалната равенка (15) се сведува на хипергеометриската равенка

$$(18)\qquad \xi(1-\xi)\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\left(\frac{a-b}{2}-a\xi\right)\frac{d\eta}{d\xi}-L\xi=0.$$

Упоредена оваа со општата хипергеометриска диференцијална равенка (5) и имајќи предвид првата од равенките (12) и релациите (16), ги добиваме за α, β и γ следните вредности:

$$(19)\qquad \alpha=\sigma\quad \beta=\sigma+1,\quad \gamma=\sigma+1+\frac{A}{2\sigma}.$$

Како е еден партикуларен интеграл на диференцијалната равенка (5) даден со хипергеометриската функција

$$F(a,\beta,\gamma,x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(a)\,\Gamma(\beta)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+\nu)\,\Gamma(\beta+\nu)}{\nu\,!\,\Gamma(\gamma+\nu)}\,x^{\nu},$$

нашата хипергеометриска диференцијална равенка (18) ќе има партикуларен интеграл од облик

$$\eta=F\left(\sigma,\sigma+1,\sigma+1+\frac{A}{2},\xi\right).$$

Следователно, општиот интеграл на балистичката диференцијална равенка (1) каде што функцијата $\rho(x)$ има облик (2), може да се изрази со помош на хипергеометриски функции.

За хипергеометриската диференцијална равенка знаеме, дека за да има еден партикуларен интеграл во облик на полином, потребно е и доволно да еден од броевите $\alpha, \beta, \gamma-a$ или $\gamma-\beta$ биде цел број. Зимајќи во предвид (19), овие четири услова на интеграбилност со полиноми се сведуваат на следните два за

$$\sigma=k \text{ или } \sigma=\frac{A}{2k},\quad (k=\text{цел број}).$$

Внесувајќи ги овие вредности за σ во релацијата (13), таа се претвора во двата случаи на интеграбилност (6).

По тој начин, сите четири случаји на интеграбилност на хипергеометриската диференцијална равенка се сведуваат само на условот за интеграбилност кој се однесува за диференцијалната равенка (1).

БИБЛИОГРАФИЈА

1. Карамата, Ј. Проблем 3. (Весник Друштва математичара и физичара НР Србије I, 1949, стр. 72).

Да се види исто:

Попов, Б. О једном Караматином услову интеграбилитета балистичке диференцијалне једначине (Годишен зборник на Филозофскиот факултет на Универзитетот во Скопје, кн. 2, 1949, стр. 249

Forsyth—Jacobsthal, Lehrbuch der Differetial—Gleihungen, 1912. S. 213,

Résumé

SUR UNE CONDITION D'INTÉGRABILITÉ DE D'ALEMBERT RELATIVE À L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA BALISTIQUE

1. D' Alembert a montré que l'équation différentielle de la balistique

$$(1) \qquad (y+\rho)\, y' + y^2 - 1 = 0,$$

où

$$(2) \qquad \rho(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

A, B et C étant des constantes, est intégrable par quadrature lorsque la condition suivaute est satisfaite

$$(3) \qquad B^2 = A^2 + 4\,AC + 4.$$

Nous allons montrer dans cette Note, en premier lieu, que l'on peut ramener l'équation différentielle (1) avec la fonction $\rho(x)$ donnée par (2), à l'équation différentielle des fonctions hypergéométriques,

$$(4) \qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\,x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta\, y = 0,$$

et que, par suite, on peut exprimer l'intégrale générale de l'équation différentielle (1) par des fonction hypergéométriques.

En second lieu, nous allons montrer que les quatres cas de l'intégrabilité de l'équation différentielle (4) donnent, comme condition d'intégrabilité de l'equation différentielle (1) la condition unique de la forme

$$(5) \qquad B^2 = \frac{A^2}{k^2} + 4\,k^2 + 4\,AC, \quad k \text{ entier},$$

et qui généralise la condition de d'Alembert (3), étant donné qu'elle se réduit à cette condition lorsque $k = 1$.

Remarquons qu'une condition d'intégrabilité analogue, relative à l'équation (1), avec la fonction $\rho(x)$ de la forme

$$\rho(x) = Ae^{nx} + \mathrm{B}e^{-nx} + R,$$

a été donnée par Karamata {1} (voir de même Popov {2}) sous la forme suivante

$$\frac{1}{n^2} + \frac{A\mathrm{B}}{k(n+k)} = \frac{R^2}{(n+2\,k)^2}, \quad k \text{ entier},$$

qui représente de même une extension de la condition de d'Alembert, que l'on obtient en posant $k = 1$.

2. En faisant dans l'équation diff rentielle (1), la fonction $\rho(x)$ étant donnée par (2), la substitution suivante

$$u = \exp\left(-\int \frac{A}{1-y^2}\,\mathrm{x}\mathrm{d}\mathrm{y}\right),$$

cette équation se réduit à l'équation différentielle linéaire du seconde ordre

$$(y^2-1)^2 u'' + (y^2-1)(2y+\mathrm{B})\,u' + A\,(\mathrm{C}+y)\,u = 0\,.$$

En posant encore dans cette équation

$$u = (y-1)^p (y+1)^q z ,$$

cette dernière équation devient

$$(6) \qquad (y^2-1)^2 z'' + (y^2-1)\{2[p(y+1)+q(y-1)]+2y+B\} z' + P(y) z = 0 ,$$

où l'on a posé

$$P(y) = (p+q)(p+q+1)y^2 + \{2(p^2-q^2)+B(p+q)+A\} y + (p-q)^2 - p - q + B(p-q) + AC .$$

Or, p et q étant arbitraires, nous pouvons toujours déterminer ces deux paramètres, ainsi que la constante L, de manière que l'on ait

$$(7) \qquad P(y) = L(y^2-1) .$$

Ce-ci donne, en effet, pour déterminer les constantes p, q et L, les trois équations suivantes

$$(p+q)(p+q+1) = L ,$$

$$2(p^2-q^2) + B(p+q) + A = 0 ,$$

$$(p-q)^2 + B(p-q) - (p+q) + AC = -L ,$$

La résolution de ce système d'équations donnereait les valeurs correspondantes pour p,q et L, mais, pour obtenir la condition d'intégrabilité désirée, remarquons qu'il suffit d'éliminer de ce système les quantités $(p-q)$ et L. En effet, le résultat de l'élimination donne l'équation suivante pour $(p+q)$,

$$A^2 - B^2(p+q)^2 + 4(p+q)^4 + 4AC(p+q)^2 = 0 ,$$

qui se réduit, en posant

$$\sigma = p+q ,$$

à l'équation suivante par rapport à σ,

$$(9) \qquad B^2 = \frac{A^2}{\sigma^2} + 4\sigma^2 + 4AC ,$$

et qui est justement de la même forme que la condition d'intégrabilié (5) mentionnée au debut.

En choisissant donc pour p, q et L les valeurs déterminées par (8), et en les introduisant, ainsi que la valeur du polynome $P(y)$ donnée par (7), dans l'équation différentiele (6), cette dernière équation devient

$$(10) \qquad (y^2-1) z'' + (ay+b) z' + Lz = 0 ,$$

où l'on a posé

$$a = 2(p+q+1) \quad \text{et} \quad b = 2(p-q) + B ,$$

c. à d., d'après la seconde des équations (8),

$$(11) \qquad a = 2(\sigma+1) \quad \text{et} \quad b = -\frac{A}{\sigma} \text{ avec } \sigma = p+q .$$

L'équation différentielle ainsi obtenue, que est un cas particulier de l'équatiou de Legendre, se réduit enfin, par les substitutions connues (voir Forsyth-Jacobsthal {3}, p. 212),

(12) $$z(y) = \eta(\xi) \text{ et } y = 2\xi - 1,$$

à l'équation différentielle hypergeometrique

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \left(\frac{a-b}{2} - a\xi\right)\frac{d\eta}{d\xi} - L\eta = 0,$$

qui, comparée à l'équation différentielle (4), et en tenant compte de la première des équation (8) et des relations (11), donne pour α, β, γ, les valeurs suivantes

(13) $$\alpha = \sigma, \ \beta = \sigma + 1, \ \gamma = \sigma + 1 + \frac{A}{2\sigma}.$$

Etant donnée, qu'une solution particulière de l'équation différentielle (4) est donné par la fonction hypergéométrique

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\nu)\,\Gamma(\beta+\nu)}{\nu!\,\Gamma(\gamma+\nu)} x^{\nu},$$

l'on en déduit, d'après (12) et (13), la solution particulièrè suivante de l'équation différentielle (10) de Legendre

$$z = F\left(\sigma, \sigma+1, \sigma+1+\frac{A}{2\sigma}, \frac{1+y}{2}\right),$$

où σ est déterminé par (9). L par la première des équations (8), c. à. d. par

$$L = \sigma(\sigma+1),$$

et a et b par (11).

Par conséquence. l'intégrale générale de l'équation de la balistique (1), où la fonction $\rho(x)$ est donnée par (2), peut s'exprimer au moyen des fonctions hypergéométriques.

3 Il est connu que l'équation différentielle hypergéométrique (4) es intégrable par quadrature lorsque l'un des nombres

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma - \alpha \text{ ou bien } \gamma - \beta \text{ est entier.}$$

En tenant compte de (13), ces quatres conditions d'intégrabilité se réduisent à deux conditions relatives à σ, à savoir

$$\sigma = k \text{ ou bien } \sigma = A/2k, \text{ avec } k \text{ entier.}$$

Or, en introduisant ces valeurs de σ dans la relation (9) on retompe dans les deux cas à la condition d'intégrabilité (5).

Ainsi, tous les quatres cas d'intégrabilité de l'équation différentielle hypergeométrique se réduisent à la seule condition d'intégrabilité relative à l'équation différentielle (1).

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

1. Karamata, J. — Problème № 3. *Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la République Populaire de Serbie*, t. I, fasc. 2, p. 72 (1949).

2. Popov, B. — *Sur une condition d'intégrabilité de Karamata relative à l'équation différentielle de la balistique*. (Annuaire de la Faculté de Philosophie de l'Université de Skopje, section des sciences naturelles, t. 2, 1949, p. 249).

3. Fosyth-Jacobsthal. — *Lehrbuch der Differential-Gleichungen*, 1912. S.213,