Математички Билтен
**25** (LI)
2001 (53-66)
Скопје, Македонија

ISSN 0351-336X

# $n$-ПОЛУСКАЛАРЕН ПРОИЗВОД СО КАРАКТЕРИСТИКА $p$

Ристо Малчески

**Апстракт**

Концептот за $n$-скаларен производ и $n$-норма е воведен во [7]. Во оваа работа е дадена генерализација на овој поим, т.е. воведен е поимот $n$-полускаларен производ со карактеристика $p$ и се докажани неколку тврдења во врска со овој поим.

Во [7] се дадени следните дефиниции за $n$-скаларен производ и $n$-нормиран простор.

**Дефиниција 1.** Нека $n$ е природен број, $L$ е реален векторски простор таков што $\dim L \geq n$ и $(\bullet, \bullet \mid \bullet, \dots, \bullet)$ е реална функција на $L^{n+1}$ таква што

i) $(a, a \mid x_1, \dots, x_{n-1}) \geq 0$, за секои $a, x_1, \dots, x_{n-1} \in L$ и $(a, a \mid x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$ ако и само ако $a, x_1, \dots, x_{n-1}$ се линеарно зависни;

ii) $(a, b \mid x_1, \dots, x_{n-1}) = \big(\varphi(a), \varphi(b) \mid \pi(x_1), \dots, \pi(x_{n-1})\big)$, за секои $a, b, x_1, \dots, x_{n-1} \in L$ и за секои биекции $\pi\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \to \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, $\varphi\colon \{a, b\} \to \{a, b\}$;

iii) $(a, a \mid x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = (x_1, x_1 \mid a, x_2, \dots, x_{n-1})$, за секои $a, x_1, \dots, x_{n-1} \in L$;

iv) $(\alpha a, b \mid x_1, \dots, x_{n-1}) = \alpha(a, b \mid x_1, \dots, x_{n-1})$, за секои $a, b, x_1, \dots, x_{n-1} \in L$ и за секој $\alpha \in \boldsymbol{R}$; и

v) $(a+a_1,b \mid x_1,\dots,x_{n-1}) = (a,b \mid x_1,\dots,x_{n-1}) + (a_1,b \mid x_1,\dots,x_{n-1})$, за секои $a,b,a_1,x_1,\dots,x_{n-1} \in L$.

Функцијата $(\bullet,\bullet \mid \bullet,\dots,\bullet)$ се нарекува $n$-скаларен производ, а $\big(L,(\bullet,\bullet \mid \bullet,\dots,\bullet)\big)$ се нарекува $n$-предхилбертов простор.

**Дефиниција 2.** Нека $L$ е реален векторски простор со димензија поголема од $n-1$ и $\|\bullet,\dots,\bullet\|$ е реална функција на $L^n$ за која важат условите

i) $\|x_1,\dots,x_n\| \geq 0$, за секои $x_1,\dots,x_n \in L$ и $\|x_1,\dots,x_n\| = 0$ ако и само ако множеството $\{x_1,\dots,x_n\}$ е линеарно зависно;

ii) $\|x_1,\dots,x_n\| = \|\pi(x_1),\dots,\pi(x_n)\|$, за секои $x_1,\dots,x_n \in L$ и за секоја биекција $\pi\{x_1,\dots,x_n\} \to \{x_1,\dots,x_n\}$;

iii) $\|\alpha x_1,\dots,x_n\| = |\alpha|\cdot\|x_1,\dots,x_n\|$, за секои $x_1,\dots,x_n \in L$ и за секој $\alpha \in \boldsymbol{R}$

iv) $\|x_1+x_1',\dots,x_n\| \leq \|x_1,\dots,x_n\| + \|x_1',\dots,x_n\|$, за секои $x_1,\dots,x_n,x_1' \in L$.

Функцијата $\|\bullet,\dots,\bullet\|$ се нарекува $n$-норма на $L$, а $(L,\|\bullet,\dots,\bullet\|$ се нарекува $n$-нормиран простор.

Во оваа работа ќе дадеме генерализација на $n$-скаларниот производ и ќе докажеме некои својства во врска со оваа генерализација.

## 1. $n$-полускаларен производ со карактеристика $p$

**Дефиниција 3.** Нека $L$ е реален векторски простор и $[\bullet,\bullet \mid \bullet,\dots,\bullet]$ е реална функција дефинирана на $L^{n+1}$ таква што

i) $[a,a \mid x_1,\dots,x_{n-1}] \geq 0$, за секои $a,x_1,\dots,x_{n-1} \in L$ и $[a,a \mid x_1,\dots,x_{n-1}] = 0$ ако и само ако $a,x_1,\dots,x_{n-1}$ се линеарно зависни;

ii) $[a,b|x_1,\dots,x_{n-1}]=[a,b|\pi(x_1),\dots,\pi(x_{n-1})]$, за секои $a,b,x_1,\dots,x_{n-1}\in L$ и за секоја биекција $\pi\colon\{x_1,\dots,x_{n-1}\} \to \{x_1,\dots,x_{n-1}\}$;

iii) $[\alpha a,b|x_1,\dots,x_{n-1}]=\alpha[a,b|x_1,\dots,x_{n-1}]$, за секои $a,b,x_1,\dots,x_{n-1}\in L$ и за секој $\alpha \in \boldsymbol{R}$;

iv) $[a+a_1,b \mid x_1,\dots,x_{n-1}] = [a,b \mid x_1,\dots,x_{n-1}] + [a_1,b \mid x_1,\dots,x_{n-1}]$ за секои $a,b,x_1,\dots,x_{n-1} \in L$; и

v) $[a,b|x_1,\dots,x_{n-1}] \leq [a,a \mid x_1,\dots,x_{n-1}]^{1/p}\cdot[b,b|x_1,\dots,x_{n-1}]^{(p-1)/p}$, за некој $p>1$ и за секои $a,b,x_1,\dots,x_{n-1} \in L$.

Функцијата $[\bullet,\bullet \mid \bullet,\dots,\bullet]$ ја нарекуваме $n$-полускаларен производ со карактеристика $p$, а $\big(L,[\bullet,\bullet \mid \bullet,\dots,\bullet]\big)$ простор со $n$-полускаларен производ со карактеристика $p$.

**Пример 1.** За $n = 2$, постои 2-полускаларен производ со карактеристика $p$, кој не е 2-скаларен производ. Имено, $[\bullet,\bullet \mid \bullet]$ дефиниран на $R^2$ со

$$[a,b \mid c] = (a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_2 - b_2c_1)(c_1^2 + c_2^2)$$

е 2-полускаларен производ со карактеристика $p$, но не е 2-скаларен производ.

**Лема 1.** Нека $\big(L,[\bullet,\bullet \mid \bullet,\dots,\bullet]\big)$ е произволен простор со $n$-полускаларен производ со карактеристика $p$. Тогаш

$$[a,x_i \mid x_1,\dots,x_{n-1}] = 0, \text{ за секои } a,x_1,\dots,x_{n-1} \in L,\ i = 1,\dots,n-1\,.$$

**Доказ.** Непосредно следува од својствата i) и v) во дефиниција 3. □

**Лема 2.** Нека $\big(L,[\bullet,\bullet \mid \bullet,\dots,\bullet]\big)$ е произволен простор со $n$-полускаларен производ со карактеристика $p$, таков што

$$[a,a \mid x_1,\dots,x_{n-1}]=[x_1,x_1 \mid a,x_2,\dots,x_{n-1}], \text{ за секои } a,x_1,\dots,x_{n-1}\in L.$$

Тогаш, со

$$\|x_1,\dots,x_n\| = [x_1,x_1 \mid x_2,\dots,x_n]^{1/p} \tag{1}$$

е дефинирана $n$-норма во $L$.

**Доказ.** Од (1) и од својството i) во дефиниција 3 непосредно следува точноста на својството i) од дефиницијата на $n$-норма.

Својството ii) од дефиницијата на $n$-норма непосредно следува од претпоставката дека

$$[a,a \mid x_1,\dots,x_{n-1}]=[x_1,x_1 \mid a,x_2,\dots,x_{n-1}], \text{ засекои } a,x_1,\dots,x_{n-1}\in L$$

и својството ii) во дефиниција 3.

Да го докажеме својството iii) од дефиницијата за $n$-норма. Ако множеството $\{x_1,\dots,x_{n-1}\}$ е линеарно зависно или ако $\alpha = 0$, тогаш точноста на iii) непосредно следува од точноста на својството iii) од дефиниција 3. Нека претпоставиме дека $\alpha \neq 0$ и дека $\{x_1,\dots,x_n\}$ е линеарно независно множество. Од iii) и v) во дефиниција 3 имаме

$$\begin{aligned}[\lambda x_1,\lambda x_1\mid x_2,\dots,x_n] &= |\,[\lambda x_1,\lambda x_1\mid x_2,\dots,x_n]\,| = \\ &= |\lambda|\cdot|\,[x_1,\lambda x_1\mid x_2,\dots,x_n]\,| \\ &\le |\lambda|\cdot[x_1,x_1|x_2,\dots,x_n]^{\frac{1}{p}}[\lambda x_1,\lambda x_1|x_2,\dots,x_n]^{\frac{p-1}{p}}\end{aligned}$$

односно

$$[\lambda x_1,\lambda x_1\mid x_2,\dots,x_n]^{1/p}\le|\lambda|\cdot[x_1,x_1\mid x_2,\dots,x_n]^{1/p}.$$

Од друга страна, од претходно кажаното, имаме

$$\begin{aligned}[x_1,x_1|x_2,\dots,x_n]^{1/p} &= \left[\frac{1}{\lambda}\lambda x_1,\frac{1}{\lambda}\lambda x_1|x_2,\dots,x_n\right]^{1/p}\le \\ &\le\frac{1}{|\lambda|}[\lambda x_1,\lambda x_1|x_2,\dots,x_n]^{1/p}.\end{aligned}$$

т.е.

$$|\lambda|\cdot[x_1x_1\mid x_2,\dots,x_n]^{1/p}\le[\lambda x_1,\lambda x_1\mid x_2,\dots,x_n]^{1/p}.$$

Според тоа,

$$|\lambda|\cdot[x_1,x_1\mid x_2,\dots,x_n]^{1/p}=[\lambda x_1,\lambda x_1\mid x_2,\dots,x_n]^{1/p},$$

па значи и во овој случај важи својството iii) од дефиницијата за $n$-норма.

Ако $x_1+x_1',x_2,\dots,x_n$ се линеарно зависни вектори, тогаш својството iv) од дефиницијата за $n$-норма е исполнето. Ако векторите $x_1+x_1',x_2,\dots,x_n$ се линеарно независни, тогаш од i), iv) и v) од дефиниција 3 добиваме

$$\begin{aligned}&[x_1+x_1',x_1+x_1'\mid x_2,\dots,x_n]=|\,[x_1+x_1',x_1+x_1'\mid x_2,\dots,x_n]\,| \\ &=|\,[x_1,x_1+x_1'\mid x_2,\dots,x_n]+[x_1',x_1+x_1'\mid x_2,\dots,x_n]\,| \\ &\le|\,|[x_1,x_1+x_1'\mid x_2,\dots,x_n]\,|+|\,[x_1'x_1+x_1'\mid x_2,\dots,x_n]\,| \\ &\le[x_1,x_1\mid x_2,\dots,x_n]^{1/p}[x_1+x_1',x_1+x_1'\mid x_2,\dots,x_n]^{(p-1)/p}+ \\ &+[x_1',x_1'\mid x_2,\dots,x_n]^{1/p}[x_1+x_1',x_1+x_1'\mid x_2,\dots,x_n]^{(p-1)/p}\end{aligned}$$

од што следува

$$[x_1+x_1',x_1+x_1'|x_2,\dots,x_n]^{1/p}\le[x_1,x_1|x_2,\dots,x_n]^{1/p}+[x_1',x_1'|x_2,\dots,x_n]^{1/p}$$

т.е. и во овој случај важи својството iv) од дефиниција на $n$-норма.

Во [6] е даена следната дефиниција за ограничен $n$-линеарен функционал.

**Дефиниција 4**. Нека $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $Y$ се реални векторски простори. Линеарен $n$-оператор $A: X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ ја нарекуваме секоја функција $A(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, која е линеарна во однос на секој свој аргумент поодделно. Ако $Y$ е множеството реални броеви, тогаш линеарниот $n$-оператор го нарекуваме линеарен $n$-функционал.

Лесно се гледа дека $n$-операторот (функционалот) $A$ е линеарен ако и само ако

i) $A(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) = \sum\limits_{\substack{z_i \in \{x_i, y\}, \\ i=1,\ldots,n}} A(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, и

ii) $A(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n) = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
$\alpha_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Нека $L$ е $n$-нормиран простор. За $n$-функционалот $f$ со домен $D(f) \subseteq L^n$, е велиме дека е ограничен ако постои реална константа $k \geq 0$ таква што

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leq k\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|, \text{за секој} (x_1 x_2, \ldots, x_n) \in D(f)\,.$$

Ако $f$ е ограничен $n$-функционал, дефинираме норма на $f$, во ознака $\|f\|$, со

$$\|f\| = \inf\{k|\ |f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leq k\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|,$$

$$\text{за секој}\ \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D(f)\}\,.$$

Ако $f$ не е ограничен $n$-функционал, тогаш по дефиниција ставаме $\|f\| = +\infty$.

Во $n$-нормиран простор точна е следната лема.

**Лема 3**. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се линеарно независни вектори во $n$-нормираниот векторски простор $L$. Тогаш, за секој $p$, $1 \leq p < \infty$, $n$-функционалот $f: P(x_1) \times P(x_2) \times \ldots \times P(x_n) \to R$ дефиниран со

$$f(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n) = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|^p\,, \tag{2}$$

е ограничен линеарен $n$-функционал со норма

$$\|f\| = \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|^{p-1}\,. \tag{3}$$

**Доказ.** Од (1) и од својствата на $n$-нормата имаме

$$f(z_1+y_1,z_2+y_2,\dots,z_n+y_n)=f(\alpha_1x_1+\beta_1x_1,\alpha_2x_2+\beta_2x_2,\dots,\alpha_nx_n+\beta_nx_n)$$

$$=f\big((\alpha_1+\beta_1)x_1,(\alpha_2+\beta_2)x_2,\dots,(\alpha_n+\beta_n)x_n\big)$$

$$=(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)\dots(\alpha_n+\beta_n)\|x_1,x_2,\dots,x_n\|^p$$

$$=\|x_1,x_2,\dots,x_n\|^p\sum_{\substack{t_i\in\{\alpha_i,\beta_i\},\\ i=1,\dots,n}}t_1t_2\dots t_n=\sum_{\substack{t_i\in\{\alpha_i,\beta_i\},\\ i=1,\dots,n}}t_1t_2\dots t_n\|x_1,x_2,\dots,x_n\|^p$$

$$=\sum_{\substack{t_i\in\{\alpha_i,\beta_i\},\\ i=1,\dots,n}}f(t_1x_1,t_2x_2,\dots,t_nx_n)=\sum_{\substack{u_i\in\{y_i,z_i\},\\ i=1,\dots,n}}f(u_1,u_2,\dots,u_n)\,.$$

и

$$\begin{aligned}f(\alpha_1y_1,\alpha_2y_2,\dots,\alpha_nx_n)&=f(\alpha_1\beta_1x_1,\alpha_2\beta_2x_2,\dots,\alpha_n\beta_nx_n)\\&=(\alpha_1\beta_1)(\alpha_2\beta_2)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n\beta_n)\|x_1,x_2,\dots,x_n\|^p\\&=(\alpha_1\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n)(\beta_1\beta_2\cdot\ldots\cdot\beta_n)\|x_1,x_2,\dots,x_n\|^p\\&=(\alpha_1\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n)f(\beta_1x_1,\beta_2x_2,\dots,\beta_nx_n)\\&=(\alpha_1\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n)f(y_1,y_2,\dots,y_n)\end{aligned}$$

што значи, $f$ е линеарен $n$-функционал.

Од дефиницијата на $f$ имаме $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\|x_1,x_2,\dots,x_n\|^p$. Бидејќи за секој $(y_1,y_2,\dots,y_n)\in P(x_1)\times P(x_2)\times\dots\times P(x_n)$ важи

$$\begin{aligned}|f(y_1,y_2,\dots,y_n)|&=|f(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\dots,\alpha_nx_n)|=\\&=|\alpha_1\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n|\cdot\|x_1,x_2,\dots,x_n\|^p\\&=\|x_1,x_2,\dots,x_n\|^{p-1}|\alpha_1\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n|\cdot\|x_1,x_2,\dots,x_n\|\\&=\|x_1,x_2,\dots,x_n\|^{p-1}\|\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\dots,\alpha_nx_n\|\\&=\|x_1,x_2,\dots,x_n\|^{p-1}\|y_1,y_2,\dots,y_n\|\,.\end{aligned}$$

заклучуваме дека $\|f\|=\|x_1,x_2,\dots,x_n\|^{p-1}$. □

**Лема 4**. Во секој $n$-нормиран простор $L$ може да се воведе $n$-полускаларен со карактеристика $p$ (во општ случај не единствен).

**Доказ**. Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ се линеарно независни вектори во $n$-нормираниот векторски простор $L$. Според лема 3 $n$-функционалот $f$, со домен $P(x_1) \times \dots \times P(x_n)$ дефиниран со (2) е ограничен линеарен $n$-функционал чија норма е дадена со (3). Според теорема 1, [6] $f$ може да се продолжи до $n$-линеарен функционал $F$ со домен $L \times P(x_2) \times P(x_3) \times \dots \times P(x_n)$ таков што

$$\|F\| = \|x_1, x_2, \dots, x_n\|^{p-1} \quad \text{и} \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \|x_1, x_2, \dots, x_n\|^p.$$

Функционалот $F$ го означуваме со $F_{x_1, x_2, \dots, x_n}$.

За $x, y, z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in L$ дефинираме

$$[x, y|z_1, \dots, z_{n-1}] = \begin{cases} F_{y, z_1, \dots, z_{n-1}}(x, z_1, \dots, z_{n-1}), & \text{ако } \{y, z_1, \dots, z_{n-1}\} \text{ е LNZM} \\ 0, & \text{ако } \{y, z_1, \dots, z_{n-1}\} \text{ е LZM} \end{cases} \tag{4}$$

Ќе докажеме дека со (4) е дефиниран $n$-полускаларен производ со карактеристика $p$.

Од $\|x, z_1, z_2, \dots, z_n\|^p \geq 0$ и $\|x, z_1, z_2, \dots, z_n\|^p = 0$ ако и само ако $\{x, z_1, z_2, \dots, z_n\}$ е линеарно зависно множество и фактот дека

$$F_{x, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}}(x, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = \|x, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\|^p,$$

заклучуваме дека $[x, x|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}] \geq 0$ и $[x, x|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}] = 0$ ако и само ако $\{x z_1, z_2, \dots, z_n\}$ е линеарно зависно множество, т.е. својството i) од дефиниција 3 важи.

Точноста на својствата ii), iii) и iv) од дефиниција 1 непосредно следува од дефиницијата на $n$-норма и фактот дека за секое линеарно независно множество $\{y, z_1, z_2, \dots, z_n\} \subseteq L$ $n$-функционалот $F_{y, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}}$ е линеарен, па значи е линеарен и во однос на првата координата.

Бидејќи $F_{y, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}}$ е ограничен $n$-линеарен функционал добиваме

$$|F_{y, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}}(x, z_1, z_2, \dots, z_{n-1})| \leq \|F_{y, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}}\| \cdot \|x, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\|$$

$$= \|y, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\|^{p-1} \|x, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\|$$

$$= |F_{x, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}}(x, z_1, z_2, \dots, z_{n-1})|^{1/p} |F_{y, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}}(y, z_1, z_2, \dots, z_{n-1})|^{\frac{p-1}{p}}$$

што значи

$$[x,y|z_1,z_2,\dots,z_{n-1}]\leq[x,x|z_1,z_2,\dots,z_{n-1}]^{1/p}[y,y|z_1,z_2,\dots,z_{n-1}]^{(p-1)/p},$$

односно важи својството в) од дефиниција 3. □

## 2. Строга конвексност во простор со $n$-полускаларен производ со карактеристика $p$

Во [5] е дадена следната дефиниција за строго конвексен $n$-нормиран простор.

**Дефиниција 5.** $n$-нормираниот векторски простор $(L,\|\bullet,\dots,\bullet\|)$ го нарекуваме строго конвексен ако од

$$\|a+b,x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\|=\|a,x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\|+\|b,x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\|;$$

$$\|a,x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\|=\|b,x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\|=1 \quad \text{и}$$

$$P(a,b)\cap P(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})=\{0\}$$

следува $a=b$.

Овде ќе дадеме карактеризација за строга конвексност во простор со $n$-полускаларен производ со карактеристика $p$.

**Теорема 1.** Нека $\left(L,[\bullet,\bullet\mid\bullet,\dots,\bullet]\right)$ е простор со $n$-полускаларен производ со карактеристика $p$ таков што

$$[a,a|x_1,\dots,x_{n-1}]=[x_1,x_1|a,x_2,\dots,x_{n-1}], \text{ за секои } a,x_1,\dots,x_{n-1}\in L.$$

Ако $n$-нормата во $L$ е дефинирана со (1), тогаш следните услови се еквивалентни:

i) $\left(L,\|\bullet,\dots,\bullet\|\right)$ е строго конвексен,

ii) Ако $\|y+z,x_1,\dots,x_{n-1}\|\leq\|y,x_1,\dots,x_{n-1}\|$ и $[z,y|x_1,\dots,x_{n-1}]=0$, тогаш множеството $\{z,x_1,\dots,x_{n-1}\}$ е линеарно зависно,

iii) Ако $\|y+z,x_1,\dots,x_{n-1}\|=\|y,x_1,\dots,x_{n-1}\|$ и $[z,y|x_1,\dots,x_{n-1}]=0$, тогаш множеството $\{z,x_1,\dots,x_{n-1}\}$ е линеарно зависно,

iv) Ако $T$ е линеарен оператор на $L$ и ако

$$\|w+Tw,x_1,\dots,x_{n-1}\|\leq\|w,x_1,\dots,x_{n-1}\|$$

за секои $w,x_1,\dots,x_{n-1}\in L$ и $[Ty,y\mid x_1,\dots,x_{n-1}]=0$, тогаш множеството $\{Ty,x_1,\dots,x_{n-1}\}$ е линеарно зависно.

**Доказ.** i $\Rightarrow$ ii). Ако $\|y, x_1, \dots, x_{n-1}\| = 0$, тогаш множеството $\{y, x_1, \dots, x_{n-1}$ е линеарно зависно и $\|y + z, x_1, \dots, x_{n-1}\| = 0$. Значи, множеството $\{y + z, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ е линеарно зависно и како $\{y, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ е линеарно зависно множество заклучуваме дека и множеството $\{z, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ е линеарно зависно.

Нека претпоставиме дека $\|y, x_1, \dots, x_{n-1}\| = 1$. Тогаш за секој $t$, $0 \le t \le 1$ важи

$$\|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^p = |\,[y, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}]\,| = |\,[y + tz, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}]\,|$$

$$\le [y + tz, y + tz \mid x_1, \dots, x_{n-1}]^{1/p}[y, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}]^{(p-1)/p}$$

$$= \|y + tz, x_1, \dots, x_{n-1}\| \cdot \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^{p-1}$$

$$= \|t(y + z) + (1 - t)y, x_1, \dots, x_{n-1}\| \cdot \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^{p-1}$$

$$\le (t\|y + z, x_1, \dots, x_{n-1}\| + (1-t)\|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|) \cdot \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^{(p-1)}$$

$$\le (t\|y, x_1, \dots, x_{n-1}\| + (1 - t)\|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|) \cdot \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^{p-1}$$

$$\le \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^p.$$

Според тоа, $\|y, x_1, \dots, x_{n-1}\| = \|y + tz, x_1, \dots, x_{n-1}\|$ за секој $t$, $0 \le t \le 1$.

Ако $P(y + z, y) \cap P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \{0\}$, тогаш за $t = 1$ имаме $\|y, x_1, \dots, x_{n-1}\| = \|y + tz, x_1, \dots, x_{n-1}\|$, а за $t = \dfrac{1}{2}$ добиваме

$$\|y + 2z, x_1, \dots, x_{n-1}\| =$$

$$= 2\|y, x_1, \dots, x_{n-1}\| = \|y + z, x_1, \dots, x_{n-1}\| + \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|$$

и како $L$ е строго конвексен важи $z = 0$ што значи множеството $\{z, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ е линеарно зависно.

Ако $P(y + z, y) \cap P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \ne \{0\}$, тогаш од

$$\|y + tz, x_1, \dots, x_{n-1}\| = 1 \quad \text{за секои} \quad t, 0 \le t \le 1$$

следува дека множеството $\{z, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ е линеарно зависно.

ii) $\Rightarrow$ iv). Ако $T$ е линеарен оператор на $L$ и ако

$$\|w + Tw, x_1, \dots, x_{n-1}\| \le \|w, x_1, \dots, x_{n-1}\| \text{ за секои } w.x_1, \dots, x_{n-1} \in L$$

и

$$[Ty, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}] = 0,$$

тогаш при $y = w$, $z = Tw$ се исполнети претпоставките од ii), па значи множеството $\{z, x_1, \dots, x_{n-1}\} = \{Ty, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ е линеарно зависно.

iv) $\Rightarrow$ iii). Нека претпоставиме дека условот iii) не е точен. Тогаш постојат $y$ и $z$ такви што множествата $\{z, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ и $\{y, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ се линеарно независни и важи

$$\|y+z, x_1, \dots, x_{n-1}\| = \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\| \quad \text{и} \quad [z, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}] - 0\,.$$

Дефинираме линеарен оператор $T$ со:

$$Tw = \frac{1}{\|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^p}\,[w, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}](y+z) - w\,.$$

Сега имаме,

$$\begin{aligned}
&\|w + Tw, x_1, \dots, x_{n-1}\| = \\
&= \frac{1}{\|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^p}\,|\,[w, y|x_1, \dots, x_{n-1}]\,|\ \|y+z, x_1, \dots, x_{n-1}\| \\
&= \frac{1}{\|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^p}\,|\,[w, y|x_1, \dots, x_{n-1}]|\ \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\| \\
&\le \frac{1}{\|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^p}|\,[w, w|x_1, \dots, x_{n-1}]^{\frac{1}{p}}[y, y|x_1, \dots, x_{n-1}]^{\frac{p-1}{p}}\|y, x_1, \dots, x_{n-1}\| \\
&= \frac{1}{\|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^p}\|w, x_1, \dots, x_{n-1}\| \cdot \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^p \\
&= \|w, x_1, \dots, x_{n-1}\|
\end{aligned}$$

и $Ty = z$ и освен тоа $[Ty, y|x_1, \dots, x_{n-1}] = [z, y|x_1, \dots, x_{n-1}] = 0$, а $\{z, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ е линеарно независно множество. Значи, множеството $\{Ty, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ е линеарно независно, т.е. условот iv) не е исполнет.

iii) $\Rightarrow$ i). Ако условот i) не е исполнет, тогаш постојат различни точки $a$ и $b$ и линеарно независни вектори $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ такви што

$$P(a, b) \cap P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \{0\}\,,$$

$$\|a+b, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| = \|a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| + \|b, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\|$$

и

$$\|a x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| = \|b, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\| = 1\,.$$

Нека $y = \dfrac{a+b}{2}$ и $z = \dfrac{b-a}{2}$. Тогаш

$$\|y+z, x_1, \dots, x_{n-1}\| = \|b, x_1, \dots, x_{n-1}\| = 1$$

и

$$\|y+z, x_1, \dots, x_{n-1}\| = \left\|\frac{a+b}{2}, x_1, \dots, x_{n-1}\right\| = \frac{1}{2}\|a+b, x_1, \dots, x_{n-1}\| = 1.$$

Според тоа, $\|y+z, x_1, \dots, x_{n-1}\| = \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|$ и множеството $\{z, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ е линеарно независно. Но,

$$\begin{aligned}
&|[z, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}] + 1| = |[z, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}] + [y, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}]| \\
&= |[z+y, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}]| = |[b, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}]| \\
&\le |[b, b \mid x_1, \dots, x_{n-1}]|^{1/p} |[y, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}]|^{(p-1)/p} \\
&= \|b, x_1, \dots, x_{n-1}\| \cdot \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^{p-1} = 1.
\end{aligned}$$

Од друга стана добиваме

$$\begin{aligned}
&|[z, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}] - 1| = |[z, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}] - [y, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}]| \\
&= |[z-y, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}]| = |[-a, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}]| \\
&\le |[a, a \mid x_1, \dots, x_{n-1}]|^{1/p} |[y, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}]|^{(p-1)/p} \\
&= \|a, x_1, \dots, x_{n-1}\| \cdot \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^{p-1} = 1.
\end{aligned}$$

Значи, $[z, y, \mid x_1, \dots, x_{n-1}] = 0$, па затоа условот iii) не е исполнет.

**Теорема 2.** Нека $(L, [\bullet, \bullet \mid \bullet, \dots, \bullet])$ е простор со $n$-полускаларен производ со карактеристика $p$ таков што

$$[a, a \mid x_1, \dots, x_{n-1}] = [x_1, x_1 \mid a, x_1, \dots, x_{n-1}], \quad \forall a, x_1, \dots, x_{n-1} \in L.$$

Ако $n$-нормата во $L$ е дефинирана со (1), тогаш $(L, \|\bullet, \dots, \bullet)$ е строго конвексен ако и само ако од

$$\begin{aligned}
&[z, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}] = \|z, x_1, \dots, x_{n-1}\| \cdot \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^{p-1}, \\
&P(z, y) \cap P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \{0\}
\end{aligned} \tag{5}$$

следува дека $y = \lambda z$, за некој $\lambda > 0$.

**Доказ.** Нека $(L, \|\bullet, \dots, \bullet\|)$ е строго конвексен простор таков што важи (5). Тогаш

$$\|z+y, x_1, \dots, x_{n-1}\| \cdot \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^{p-1} \geq |\,[z+y, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}]\,|$$

$$\geq |\,[z, y \mid x_1, \dots, x_{n-1}]\,| + |\,[y, y, \mid x_1, \dots, x_{n-1}]\,|$$

$$= \|z, x_1, \dots, x_{n-1}\| \cdot \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^{p-1} + \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^p$$

$$= (\|z, x_1, \dots, x_{n-1}\| + \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|)\, \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^{p-1},$$

Според тоа,

$$\|z+y, x_1, \dots, x_{n-1}\| \geq \|z, x_1, \dots, x_{n-1}\| + \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|. \qquad (6)$$

Но, $L$ е $n$-нормиран простор, па затоа важи

$$\|z+y, x_1, \dots, x_{n-1}\| \leq \|z, x_1, \dots, x_{n-1}\| + \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|, \qquad (7)$$

Од (6) и (7) имаме

$$\|z+y, x_1, \dots, x_{n-1}\| = \|z, x_1, \dots, x_{n-1}\| + \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|$$

и како $L$ е строго конвексен $n$-нормиран простор според теорема 1 од [1] имаме $y = \lambda z$, за некој $\lambda > 0$.

Обратно, нека е исполнет условот (5) и нека

$$\|z+y, x_1, \dots, x_{n-1}\| = \|z, x_1, \dots, x_{n-1}\| + \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\| \quad \text{и}$$

$$P(z, y) \cap P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \{0\}.$$

Тогаш

$$\|z+y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^p = [z+y, z+y \mid x_1, \dots, x_{n-1}]$$

$$= [z, z+y \mid x_1, \dots, x_{n-1}] + [y, z+y \mid x_1, \dots, x_{n-1}]$$

$$\leq \|z, x_1, \dots, x_{n-1}\| \cdot \|z+y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^{p-1}$$
$$+ \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\| \cdot \|z+y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^{p-1}$$

$$= (\|z, x_1, \dots, x_{n-1}\| + \|y, x_1, \dots, x_{n-1}\|)\, \|z+y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^{p-1}$$

$$= \|z+y, x_1, \dots, x_{n-1}\|^p,$$

од што следува дека

$$[z, z+y \mid x_1, \ldots, x_{n-1}] = \|z, x_1, \ldots, x_{n-1}\| \cdot \|z+y, x_1, \ldots, x_{n-1}\|^{p-1} \quad (8)$$

и

$$[y, z+y \mid x_1, \ldots, x_{n-1}] = \|y, x_1, \ldots, x_{n-1}\| \cdot \|z+y, x_1, \ldots, x_{n-1}\|^{p-1}. \quad (9)$$

Од (8) следува дека $z+y=\alpha z$, за некој $\alpha>0$, а од (9) следува дека $z+y=\beta y$, за некој $\beta>0$. Според тоа, $\alpha z=\beta y$, за некои $\alpha,\beta>0$. односно $z=\lambda y$, за некој $\lambda=\frac{\beta}{\alpha}>0$. Според теорема 5, [5] добиваме дека $L$ е строго конвексен $n$-нормиран простор.

## Литература


[1] Kim, S.S.; Cho, Y,J.: *Strict Convexity in Linear Normed Spaces*, Demonstratio Mathematica, XXIX, No 4, (1996)

[2] Franić, I.: *Two Results in 2-Normed Spaces*, Glas. Mat. Ser. III 17 (37) (1982),

[3] Малчески, Р.: *Забелешки за n-нормирани простори*, Мат. билтен 20 (1996)

[4] Malčeski, R.: *Strong n-convex n-normed spaces*, Matematichki bilten 21 (1997).

[5] Malčeski, R.:*Strong convex n-normed spaces*, Macedonian Academy of Sciences and Arts, Contributions, XVIII 1-2, (1997)

[6] Malčeski, R.: *The Hahn-Banach Theorem for bounded n-linear functionals*, Matematichki bilten 23 (1999).

[7] Misiak, A.: *n-Inner Product Spaces*, Math. Nachr. 140 (1989)

# $n$-SEMI INNER PRODUCT SPACES

Risto Malčeski

We prove some results in the theory of $n$-normed spaces. In first part we introduce $p$-semi inner product and in the second part we characterize the strict convexity in $n$-normed space.

Prirodno-matematički fakultet
Gazi baba, b.b.
1000 Skopje
Makedonija