Математички Билтен ISSN 0351-336X
26 (LII)
2002 (55–60)
Скопје, Македонија

ЗАБЕЛЕШКИ ЗА ДЕФИНИЦИЈАТА НА 2-НОРМИРАН ПРОСТОР

Алекса Малчески

Абстракт

Во оваа работа е даден осврт на аксиомите за 2-нормиран простор. Имено, со помош на матрици е даден еквивалентен запис на дефиницијата на 2-нормиран простор, од кој може да се види дека овој поим е потполно аналоген на поимот нормиран простор, при што улогата на скаларот ја превзема квадратната матрица од втор ред.

1. Вовед

Во [1], S. Gähler го воведува поимите 2-норма и 2-нормиран реален простор. Неговата дефиниција за 2-нормиран реален векторски простор гласи.

Дефиниција 1. *Нека X е векторски простор над полето реални броеви и* $\dim X > 1$. *Функцијата* $\|\cdot,\cdot\|: X \times X \to R$ *која ги задоволува условите:*

$(N1)$ $\|x,y\| = 0$ *ако и само ако* $\{x,y\}$ *е линеарно зависно множество,*

$(N2)$ $\|x,y\| = \|y,x\|$, *за секои* $x \in X$,

$(N3)$ $\|\alpha x,y\| = |\alpha|\,\|x,y\|$, *за секој скалар* α *и за секои вектори* $x,y \in X$,

$(N4)$ $\|x+x',y\| \leq \|x,y\| + \|x',y\|$, *за секои вектори* $x,x',y \in X$

ја нарекуваме 2-норма на векторскиот простор X, *а подредениот пар* $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ *го нарекуваме 2-нормиран простор.*

Непосредна последица на дефиницијата за 2-нормиран реален простор, е дека функцијата $\|\cdot,\cdot\|$ е ненегативна, $\|x, y + \alpha x\| = \|x, y\|$ за секои $x, y \in X$ и за секој $\alpha \in \mathbf{R}$ и $\|x, y + y'\| \leq \|x, y\| + \|x, y'\|$.

Лема 1. *Нека* $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *е 2-нормиран простор. За секои* $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbf{R}$ *исполнето е равенството*

$$\|x, y\| = \|x, y + \alpha x\|.$$

Доказ. Од својствата на 2-норма имаме

$$\begin{aligned}\|x, y + \alpha x\| &\leq \|x, y\| + \|x, \alpha x\| = \|x, y\| + \|\alpha x, x\| = \\ &= \|x, y\| + |\alpha| \cdot \|x, x\| = \|x, y\| + |\alpha| \cdot 0 = \|x, y\|\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\|x, y\| &= \|x, y + \alpha x - \alpha x\| \leq \|x, y + \alpha x\| + \|x, -\alpha x\| = \\ &= \|x, y + \alpha x\| + \| - \alpha x, x\| = \|x, y + \alpha x\| + | - \alpha| \cdot \|x, x\| = \\ &= \|x, y + \alpha x\| + | - \alpha| \cdot \|x, x\| = \\ &= \|x, y + \alpha x\| + | - \alpha| \cdot 0 = \|x, y + \alpha x\|.\end{aligned}$$

Од последните две неравенства добиваме $\|x, y\| = \|x, y + \alpha x\|$. □

Лема 2. *Ако* $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *е 2-нормиран простор, тогаш за секои* $x, y \in X$ *важи* $\|x, y\| \geq 0$.

Доказ. Бидејќи множествто вектори $\{0, y\}$ е линеарно зависно имаме

$$\begin{aligned}0 &= \|0, y\| = \|x - x, y\| \leq \|x, y\| + \| - x, y\| = \\ &= \|x, y\| + \| - 1x, y\| = \|x, y\| + | - 1| \, \|x, y\| = 2\|x, y\|. \quad \Box\end{aligned}$$

2. Мој резултат

Во овој дел ќе докажеме една лема и една теорема, од кои се гледа дека дефинициите за норма и 2-норма се аналогни.

Непосредна последица од дефиниција 1 и лемите 1 и 2 е следната лема.

Лема 3. *Ако* X *е 2-нормиран простор и* $A \in M_2(\mathbf{R})$, *тогаш*

$$\|A \cdot (x,y)^T\| = |\det A| \cdot \|x,y\|, \quad \text{за секои} \quad x, y \in X.$$

Доказ. Во натамошните разгледувања за $A \cdot (x,y)^T$ ќе ја користиме ознаката $A(x,y)^T$. Јасно, ако A е нулта матрица, тогаш равенството важи, бидејќи

$$\|A(x,y)^T\| = \|0,0\| = 0 \cdot \|x,y\| = |\det A| \cdot \|x,y\| .$$

За ненулта матрица A ќе разгледаме два случаи и тоа:

1. $\det A \neq 0$ и
2. $\det A = 0$.

Случај 1. Ако $\det A \neq 0$ тогаш барем еден од броевите a_{11} или a_{12} не е нула, каде $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_{11} \neq 0$ (другата можност се разгледува потполно аналогно). Користејќи ги особините на 2-норма и претходната лема 1 добиваме:

$$\begin{aligned}
\|A(x,y)^T\| &= \left\| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} (x,y)^T \right\| = \|a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y\| = \\
&= \left\| a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{11}x + a_{12}y) \right\| = \\
&= \left\| a_{11}x + a_{12}y, a_{22}y - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}y \right\| = \left\| a_{11}x + a_{12}y, \frac{\det A}{a_{11}} y \right\| = \\
&= \left\| a_{11}x + a_{12}y - a_{12}\frac{a_{11}}{\det A}\left(\frac{\det A}{a_{11}} y\right), \frac{\det A}{a_{11}} y \right\| = \\
&= \left\| a_{11}x, \frac{\det A}{a_{11}} y \right\| = |a_{11}| \left\| x, \frac{\det A}{a_{11}} y \right\| = |a_{11}| \left\| \frac{\det A}{a_{11}} y, x \right\| = \\
&= |a_{11}| \left| \frac{\det A}{a_{11}} \right| \|y,x\| = |\det A| \cdot \|y,x\| = |\det A| \cdot \|x,y\| .
\end{aligned}$$

Случај 2. $\det A = 0$ и A не е нулта матрица. Бидејќи A не е нулта матрица барем еден од елементите на A не е нулти елемент. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_{11} \neq 0$ (сите останати случаи се разгледуваат аналогно). Тогаш

$$\begin{aligned}
\|A(x,y)^T\| &= \left\| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} (x,y)^T \right\| = \\
&= \|a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y\| = \\
&= \left\| a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{11}x + a_{12}y) \right\| = \\
&= \left\| a_{11}x + a_{12}y, a_{22}y - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}y \right\| = \\
&= \left\| a_{11}x + a_{12}y, \frac{\det A}{a_{11}} y \right\| = \\
&= \|a_{11}x + a_{12}y, 0 \cdot y\| = \|0 \cdot y, a_{11}x + a_{12}y\| = \\
&= 0 \cdot \|y, a_{11}x + a_{12}y\| = 0 = 0\|x,y\| = |\det A| \cdot \|x,y\|\,,
\end{aligned}$$

т.е. тврдењето важи и во овој случај. $\square$

Од дефинција 1 и лема 3 следува дека за секоја 2-норма важи:

($P1$) Ако $\|x,y\| = 0$ тогаш множеството вектори $\{x,y\}$ е линеарно зависно.

($P2$) $\|A(x,y)^T\| = |\mathrm{der} A| \cdot \|x,y\|$, за секои $x,y \in X$ и $A \in M_2(\mathbf{R})$.

($P3$) $\|x + x', y\| \leq \|x,y\| + \|x',y\|$.

Од претходната дискусија е јасно дека од својствата ($P1$), ($P2$) и ($P3$) следуваат аксиомите ($N1$), ($N2$), ($N3$) и ($N4$).

Навистина, ако множеството вектори $\{x,y\}$ е линеарно зависно, тогаш $x = \alpha y$ за некој скалар α. Тогаш

$$\|x,y\| = \|\alpha y, y\| = \left\| \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (y,0) \right\| = \left| \det\left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right| \cdot \|y,0\| = 0\,.$$

Според тоа, од тврдењата ($P1$) и ($P2$) следува аксиомата ($N1$).

Со непосредна примена на тврдењето ($P2$), за произволни $x, y \in X$, добиваме

$$\|\alpha x, y\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (x,y)^T \right\| = \left| \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right| \, \|y, x\|$$

$$= |-1| \cdot \|y, x\| = \|y, x\| .$$

Односно од тврдењето ($P2$) следува аксиомата ($N2$).

Со непосредна примена на тврдењето ($P2$), за произволни $x, y \in X$ и произволен $\alpha \in \mathbf{R}$ добиваме:

$$\|\alpha x, y\| = \left\| \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (x,y)^T \right\| = \left| \det\left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right| \, \|x, y\| = |\alpha| \, \|x, y\| .$$

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 1. *Условите* ($N1$) – ($N4$) *од дефиниција* 1 *се еквивалентни со условите* ($P1$) – ($P3$) □

Значи, како формалниот број на аксиоми со кој се дефинира 2-нормиран простор, така и по нивното суштинско значење е еднаков на бројот на аксиоми со кој се дефинира нормиран простор, што и беше основна цел на претходните излагања.

Литература

[1] Gähler S.: *Lineare 2-normierte Raume*, Math.Nach. 28(1965).

[2] Misiak A.: *n-inner product spaces*, Math. Nach. 140 (1989).

[3] Малчески Р.: *Забелешки за 2-нормиран простор*, Зборник на трудови од Прв конгрес на СМИМ, Охрид, 1996.

NOTICES FOR THE DEFINITION ON 2-NORMED SPACE

Aleksa Malčeski

Summary

In this paper is given a review on axioms for 2-normed space. Namely, by help of matrices is given an equivalent definitions for 2-normed spaces from which might be seen than this notion is a thoroughly analogous to the notion of normed space, so the role of the scalar is undertaking by the square matrix from second order.

University "St. Kiril and Metodij"

Faculty of Mechanical Engineering

P.O. Box 464, 1000 Skopje

Republic of Macedonia

e-mail: aleksa@mf.ukim.edu.mk