Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите
од Н Р Македонија, кн. 1, 1950
Bulletin de la Société des mathématiciens et des physiciens
de la R. P. de Macédoine, t. 1, 1950

NEKE PRIMENE KOMPLEKSNOG BROJA U ELEMENTARNOJ GEOMETRIJI*)

J. KARAMATA

1. U drugom delu udžbenika „Kompleksan broj sa primenom na elementarnu geometriju" izneo sam najelementarnije pojmove analitičke geometrije onakve kako se ona danas shvaća, a koja se osniva na vektorskom metodu (vidi, na primer, W. Blaschke, Analytische Geometrie, Hannover, 1948). Ukoliko se zadržimo samo na planimetriji, ulogu vektora može preuzeti i kompleksan broj (smatran kao dvodimenzionalni vektor) sa kojim je lakše operisati, jer, za razliku od trodimenzionalnih vektora, skup kompleksnih brojeva sačinjava brojno telo u kome je, dakle, definisana i operacija deljenja. Medjutim, pri interpretaciji i rešavanju pojedinih problema planimetrije kompleksnim brojevima, naročito pri upotrebi paralelizma i ortogonalnosti, stalno nailazimo pored proizvoda ab i na proizvod $\bar{a}b$, gde je $\bar{a}$ konjugovani broj broja a. Ovo iz razloga što, smatrajući a i b kao slobodne vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, proizvod ab zavisi od rotacije, dok je proizvod $\bar{a}b$ invariantan prema translaciji i rotaciji koordinatnog sistema i zavisi isključivo od medjusobnog položaja slobodnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Ustvari, pri računu sa kompleksnim brojevima stalno se pojavljuju realni deo A i imaginarni deo B proizvoda $\bar{a}b$. Ako, dakle, stavimo

$$\bar{a}b = A + iB, \tag{1}$$

i potražimo geometrisku interpretaciju, odnosno smisao izraza A i B i u tu svrhu brojeve a i b napišemo u obliku

$$\begin{aligned} a &= x_1 + iy_1 = r_1 e^{\alpha_1 i}, \\ b &= x_2 + iy_2 = r_2 e^{\alpha_2 i}, \end{aligned} \tag{2}$$

*) Ova rasprava donekle dopunjava članak B. Popova: *Prilog kon geometrijata na triagolnikot* (Godišen zbornik na Filozofskiot fakultet na Univerzitetot — Skopje, kniga 2, 1949, str. 111—134) u kome pisac uglavnom pokazuje primenu skalarnog proizvoda u planimetriji, dok je ovde prvenstveno istaknuta uloga vektorskog proizvoda.

tada vidimo da je

$$(3) \qquad A = (x_1 x_2 + y_1 y_2) = r_1 r_2 \cos \alpha ,$$

i

$$(4) \qquad B = (x_1 y_2 - x_2 y_1) = r_1 r_2 \sin \alpha ,$$

a gde je

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 .$$

Otuda vidimo da je A, ustvari, skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a B vektorski proizvod, ali smatran kao skalar, s tim da se kod ovog proizvoda zadržava nekomutativnost. Kako se ovaj poslednji proizvod, prema tome, razlikuje od vektorskog, to ćemo ga, da bismo ukazali na njegov geometriski smisao i kraćeg pisanja radi, obeležavati ovako

$$B = (a \mid b) ,$$

i zvaćemo ga *paralelni proizvod* brojeva a i b. Iz istih razloga izraz A zvaćemo *ortogonalni proizvod* brojeva a i b i kraće pisati

$$A = (a \perp b) .$$

Ovo iz razloga što se uslov za paralelnost vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ svodi na

$$(a \mid b) = 0 ,$$

a uslov za normalnost ovih vektora na

$$(a \perp b) = 0 .$$

Pomoću ova dva simbola, ako ih smatramo kao proizvode, mogu se neposredno algebarski interpretisati mnogi problemi planimetrije, a naročito oni koji se odnose na paralelizam i ortogonalnost. Da bismo istakli ulogu ovih proizvoda navešćemo niz obrazaca u kojima se oni javljaju, a zatim ukazati na njihovu ulogu pri izvodjenju i algebarskoj interpretaciji nekih osnovnih stavova projektivne geometrije.

2. Iz obrazaca (1) – (4) vidimo da izmedju proizvoda $(a \mid b)$ i $(a \perp b)$ (za razliku od skalarnog i vektorskog proizvoda), postoji veza oblika

$(a \perp b) = (a \mid i\, b)$, gde je i imaginarna jedinica.

To znači da jedan od njih uvek možemo svesti na drugi, tj. da se možemo zadržati na jednom, a ispostavlja se da je za rukovanje podesniji paralelni proizvod.

Komutativni zakon važi samo za ortogonalni proizvod,

$$(a \perp b) = (b \perp a),$$

dok je kod paralelnog proizvoda

$$(a \mid b) = -(b \mid a).$$

Medjutim, distributivni zakon važi za oba ova proizvoda, tako da je, na primer,

$$(a + b \perp c) = (a \perp c) + (b \perp c),$$

i

$$(a \mid b + c) = (a \mid b) + (a \mid c).$$

O asociativnom zakonu je bespredmetno govoriti, jer je paralelni proizvod skalar, tj. realan broj, ali ako je treći faktor realan, tada je

$$k(a \mid b) = (ka \mid b) = (a \mid kb). \tag{5}$$

Napomenimo još da je

$$(a \mid bc) = (a\bar{b} \mid c)$$

i

$$(ac \mid bc) = |c|^2 (a \mid b),$$

i da ovaj poslednji proizvod ne zavisi od argumenta broja c.

Kao posledicu obrazaca (3) i činjenice da su tri kompleksna broja tri komplanarna vektora, tj. da izmedju tri kompleksna broja postoji uvek relacija oblika

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0,$$

gde su α, β i γ realni brojevi, dobivamo obrazac u obliku Poisson-ovih zagrada koji važi za tri proizvoljna kompleksna broja,

$$a(b \mid c) + b(c \mid a) + c(a \mid b) = 0. \tag{6}$$

Ovo je istovremeno uslov komplanarnosti, tj. njime je samo preciznije izražena činjenica da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.

Iz obrasca (6) dobivamo neposredno rastavljanje vektora na komponente u datim pravcima. Ako hoćemo da vektor $\vec{z}$ rastavimo u pravcu vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, stavimo u obrascu (6) $c=z$, koji se tada svodi na

$$z(a \mid b)=a(z \mid b)+b(a \mid z). \tag{7}$$

Prema tome, ako je $(a \mid b) \neq 0$, tj. ako vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu istog pravca, komponenta vektora $\vec{z}$ u pravcu $\vec{a}$ iznosi

$$\frac{(z \mid b)}{(a \mid b)} \vec{a},$$

a komponenta u pravcu vektora $\vec{b}$ iznosi

$$\frac{(a \mid z)}{(a \mid b)} \vec{b}.$$

Obrazac (7) može poslužiti i za odredjivanje kompleksnog broja ako znamo njegova dva paralelna proizvoda, tj. za rešavanje sistema jednačina

$$(z \mid a)=p,$$

$$(z \mid b)=q.$$

Ovaj sistem ima odredjeno rešenje ako je $(a \mid b) \neq 0$, koje je dato obrascem (7), gde treba paralelne proizvode na desnoj strani zameniti datim brojevima p, odnosno q, tj.

$$z=\frac{pa+qb}{(a \mid b)}.$$

3. Neki od obrazaca iz kojih se vidi uloga paralelnog proizvoda i gde se simetrija naročito ističe bili bi ovi.

1° Uslov da bi se tri tačke odredjene kompleksnim brojevima z_1, z_2 i z_3 nalazile na jednoj pravoj je da bude

$$(z_1 \mid z_2)+(z_2 \mid z_3)+(z_3 \mid z_1)=0.$$

Ako se ove tačke ne nalaze na pravoj, one obrazuju trougao čija površina P iznosi

$$2P=(z_1 \mid z_2)+(z_2 \mid z_3)+(z_3 \mid z_1).$$

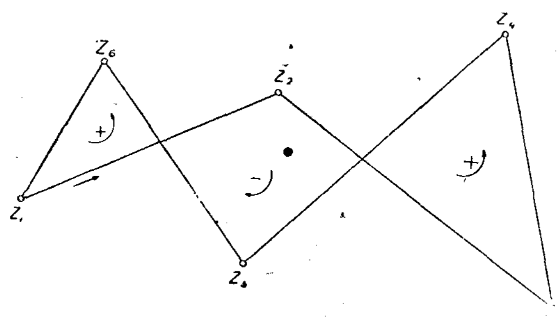
Iz ovog obrasca dobivamo neposredno da površina poligona čija su temena odredjena kompleksnim brojevima z_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$, iznosi

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(z_\nu \mid z_{\nu+1}),$$

gde smo stavili da je

$$z_{n+1} = z_1 .$$

Ako je poligon zvezdast, na primer, oblika slike 1, treba površine uzeti pozitivne ili negativne prema smeru obilaženja koji je odredjen indeksima, a tada gornji obrazac daje algebarski zbir ovih površina.



Sl. 1

2° Da bi se tri prave, od kojih je svaka odredjena parom tačaka

$$z_1 \text{ i } z_1', \; z_2 \text{ i } z_2', \; z_3 \text{ i } z_3',$$

sekle u jednoj tački, treba da bude

$$Q = (z_1 \mid a)(b \mid c) + (z_2 \mid b)(c \mid a) + (z_3 \mid c)(a \mid b) = 0,$$

gde smo stavili

$$z_1' = z_1 + a, \quad z_2' = z_2 + b, \quad z_3' = z_3 + c .$$

Ako ove prave ne prolaze kroz istu tačku, i ako nijedna od njih nije paralelna drugoj, tada površina P trougla odredjenog ovim pravama iznosi

$$2P = \frac{Q^2}{(a \mid b)(b \mid c)(c \mid a)} .$$

3° Ako su tačke z', z'' i z''' odredjene u odnosu na osnovni trougao $z_1 z_2 z_3$ trouglim koordinatama

$$p' + q' + r' = 1,$$

$$p'' + q'' + r'' = 1,$$

$$p''' + q''' + r''' = 1,$$

tj. ako je

$$z' = p' \, z_1 + q' \, z_2 + r' \, z_3,$$

$$z'' = p'' \, z_1 + q'' \, z_2 + r'' \, z_3,$$

$$z''' = p''' \, z_1 + q''' \, z_2 + r''' \, z_3,$$

i ako stavimo

$$\triangle = \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \\ p''' & q''' & r''' \end{vmatrix},$$

tada je

$$(z' \mid z'') + (z'' \mid z''') + (z''' \mid z') = \triangle \{ (z_1 \mid z_2) + (z_2 \mid z_3) + (z_3 \mid z_1) \}.$$

Drugim rečima, ako sa P označimo površinu trougla $z_1 \, z_2 \, z_3$, a sa P' površinu trougla $z' \, z'' \, z'''$, biće

$$P' = \triangle P.$$

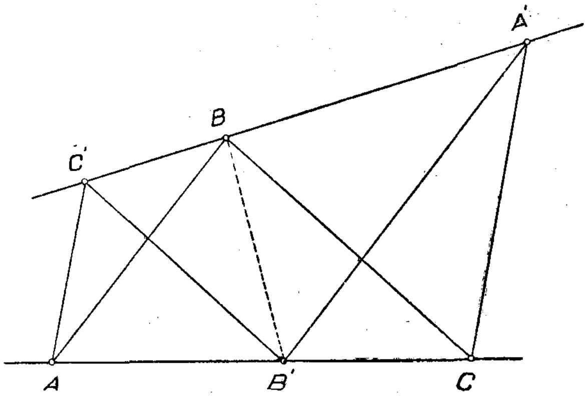
Prema tome, da bi se tačke z', z'' i z''' nalazile na jednoj pravoj potrebno je da bude $\triangle = 0$. Specialno, ako ove tačke izaberemo na stranama trougla $z_1 \, z_2 \, z_3$ dobivamo kao specialan slučaj Menelaos-ov stav.

4. Simetrija i skladnost koje se ogleda već kod navedenih obrazaca postaje još upadljivija kad predjemo na samo izvodjenje pojedinih stavova planimetrije. Ovde ćemo se zadržati samo na dva, i to osnovna stava projektivne geometrije, naime na Papos-Pascal-ovu i Desargues-ovu stavu.

Uočimo prvo specialan slučaj Paposova stava, oslanjajući se na pojam paralelizma, tj. smatrajući da se prava nedogleda nalazi u beskonačnosti, a koji tada glasi: (v. sl. 2)

Ako se tačke A, B' i C nalaze na jednoj, a tačke A', B i C' na drugoj pravoj, i ako je $AB \parallel A'B'$ i $BC \parallel B'C'$, tada je

$$AC' \parallel A'C.$$



Sl. 2

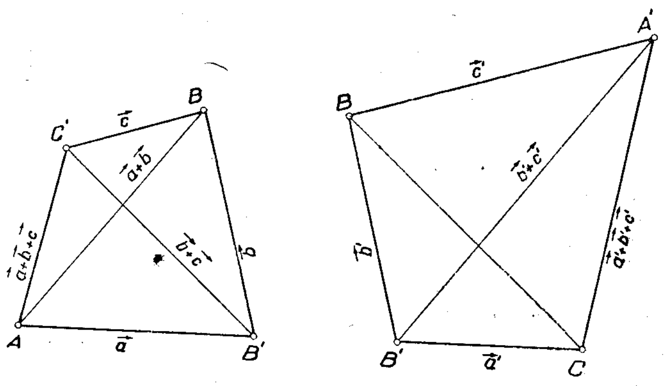
Ako ovu sliku podesno rastavimo na dva četvorougla, strane i diagonale ovih četvorouglova smatramo kao slobodne vektore (v. sl. 3), tada vidimo da se Paposov stav svodi na ovaj.

Ako je

$$\vec{a} \parallel \vec{a}', \quad \vec{b} \parallel \vec{b}', \quad \vec{c} \parallel \vec{c}',$$

i

$$\vec{a} + \vec{b} \parallel \vec{b}' + \vec{c}', \quad \vec{b} + \vec{c} \parallel \vec{a}' + \vec{b}',$$



Sl. 3

tada je

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\,//\,\vec{a}'+\vec{b}'+\vec{c}',$$

tj. iz paralelnosti tri homologe strane i nehomologih diagonala sledi paralelnost četvrtih strana posmatranih četvorouglova.

Sam dokaz Paposova stava je veoma jednostavan i osniva se samo na distributivnom zakonu paralelnog proizvoda i činjenici da je

$$(a\,|\,b)=0 \text{ ekvivalentno sa } \vec{a}\,//\,\vec{b}.$$

Zaista, kako je za dokaz ovog stava potrebno da pokažemo da je

$$(a+b+c\,|\,a'+b'+c')=0, \tag{8}$$

ako je

$$(a\,|\,a')=0,\ (b\,|\,b')=0,\ (c\,|\,c')=0, \tag{9}$$

i

$$(a+b\,|\,b'+c')=0, \quad (b+c\,|\,a'+b')=0, \tag{10}$$

to kad proizvod u (8) na osnovu distributivnog zakona raščlanimo i, vodeći računa o pretpostavkama (9), ponovo skupimo biće

$$\begin{aligned}(a+b+c\,|\,a'+b'+c') &= (a\,|\,a')+(a\,|\,b')+(a\,|\,c')+\\ &\quad+(b\,|\,a')+(b\,|\,b')+(b\,|\,c')+\\ &\quad+(c\,|\,a')+(c\,|\,b')+(c\,|\,c')=\\ &= \begin{matrix}(a\,|\,b')+(a\,|\,c')\\ (b\,|\,b')+(b\,|\,c')\end{matrix} + \begin{matrix}(b\,|\,a')+(b\,|\,b')\\ (c\,|\,a')+(c\,|\,b')\end{matrix} =\\ &= (a+b\,|\,b'+c')+(b+c\,|\,a'+b').\end{aligned}$$

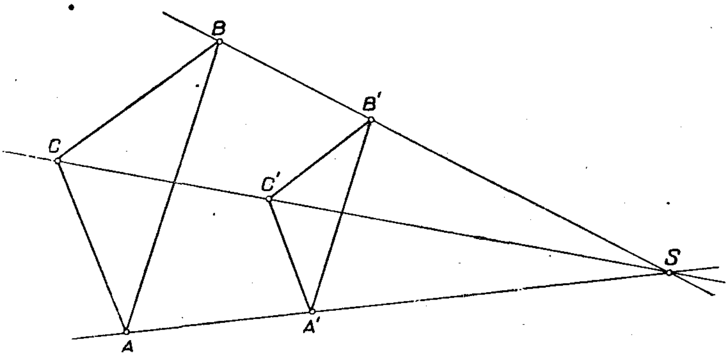
Kako su, prema pretpostavkama (10), ova dva poslednja proizvoda jednaka nuli, to otuda vidimo da iz (9) i (10) sledi (8), a iz čega neposredno sledi tvrdjenje Paposova stava.

5. Uočimo sada Desargues-ov stav koji, oslanjajući se takodje na pojam paralelizma, glasi

Ako su homologe strane trouglova ABC i $A'B'C'$ paralelne, tj. ako je

$$AB\,//\,A'B',\ BC\,//\,B'C' \ i\ CA\,//\,C'A',$$

tada se prave koje prolaze kroz homologa temena AA', BB' CC' seku u jednoj tački S.



Sl. 4

Ako i ovu sliku podesno rastavimo na dva četvorougla, a strane i diagonale ovih četvorouglova smatramo kao slobodne vektore (v. sl. 5) tada možemo Desargues-ov stav formulisati i ovako:

Ako je

$$\vec{a} \,//\, \vec{a}', \quad \vec{b} \,//\, \vec{b}', \quad \vec{c} \,//\, \vec{c}',$$

i

$$\vec{a}+\vec{b} \,//\, \vec{a}'+\vec{b}', \quad \vec{b}+\vec{c} \,//\, \vec{b}'+\vec{c}',$$

tada je

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \,//\, \vec{a}'+\vec{b}'+\vec{c}',$$

tj. iz paralelnosti tri homologe strane i homologih diagonala sledi palalelnost četvrtih strana posmatranih četvorouglova.

Prema tome, za dokaz Desargues-ova stava potrebno je da pokažemo da će (8) slediti iz (9) i iz

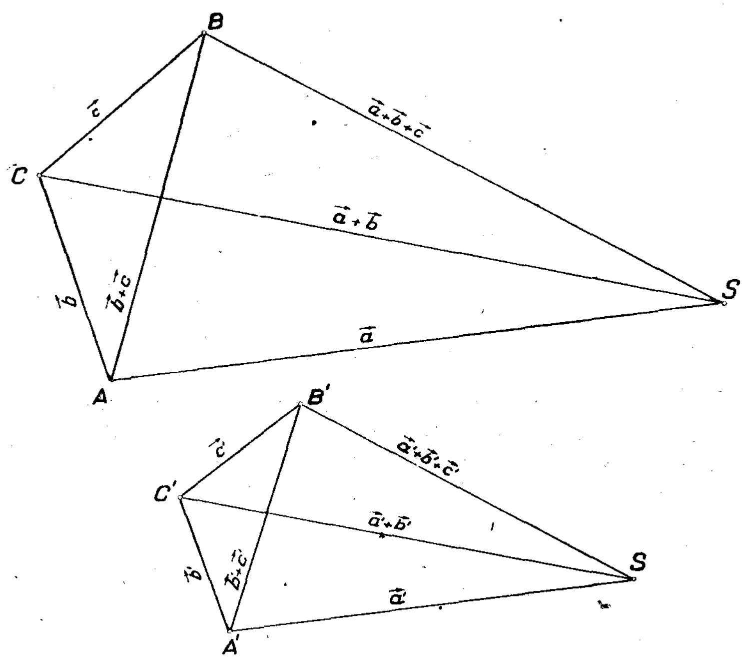
$$(11) \qquad (a+b \mid a'+b')=0, \quad (b+c \mid b'+c')=0.$$

Medjutim ako pokušamo da ovo dokažemo sličnim rastavljanjem proizvoda u (8), vidimo da ovo ne ide. Jedino što možemo dobiti je, da je pod pretpostavkama (9),

$$(a+b+c \mid a'+b'+c')=(a+b \mid a'+b')+(b+c \mid b'+c')+(c+a \mid c'+a').$$

Prema tome, ako pretpostavkama (9) dodamo i pretpostavke (11) vidimo da je za dokaz Desargues-ova stava potrebno dokazati bilo jednačinu (8), bilo da je

$$(c+a\,|\,c'+a)=0\,.$$



Sl. 5

Medjutim, uvodjenjem posrednog četvorougla možemo ipak uzastopnom primenom dva Paposova stava dobiti Desargues-ov stav i to ovako.

Konstruišimo četvorougao (v. sl. 6) sa stranama $\vec{a}''$, $\vec{b}''$ i $\vec{c}''$ tako da sa prvim četvorouglom zadovoljava uslove Paposova stava, tj. da bude

$$(12)\qquad (a\,|\,a'')=0\,,\quad (b\,|\,b'')=0\,,\quad (c\,|\,c'')=0\,,$$

i

$$(13)\qquad (a+b\,|\,b''+c'')=0\,,\quad (b+c\,|\,a''+b'')=0\,.$$

Na osnovu Paposova stava iz (12) i (13) sledi da je

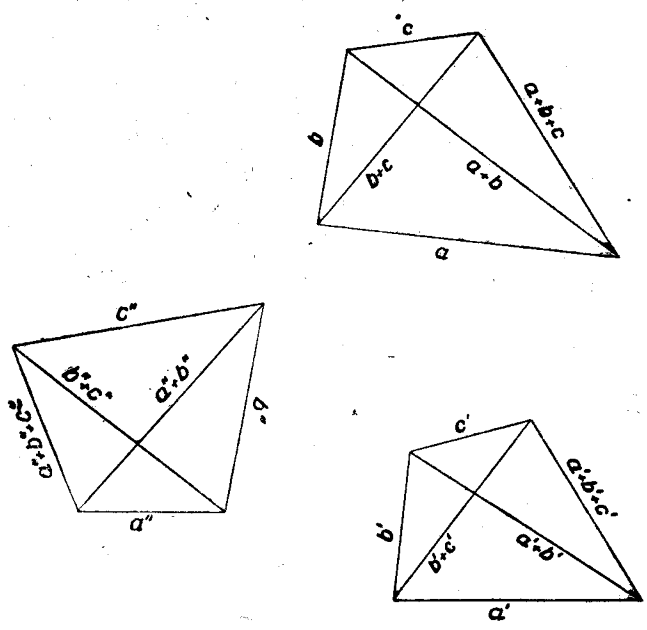
$$(14)\qquad (a+b+c\,|\,a''+b''+c'')=0\,.$$

Kako je, medjutim,

$$(a'' \mid a') = 0\,, \text{ jer je } (a'' \mid a) = 0 \text{ i } (a \mid a') = 0\,,$$

to iz (8) i (12) sledi da je

(15) $(a'' \mid a') = 0, \quad (b'' \mid b') = 0, \quad (c'' \mid c') = 0.$



Sl. 6

Iz istih razloga sledi iz (10) i (13) da je

(16) $(b'' + c'' \mid a' + b') = 0 \quad \text{i} \quad (a'' + b'' \mid b' + c') = 0\,.$

Ponovnom primenom Paposova stava vidimo da iz (15) (16) sledi da je

$$(a'' + b'' + c'' \mid a' + b' + c') = 0\,,$$

a otuda i iz (14) sledi konačno da je

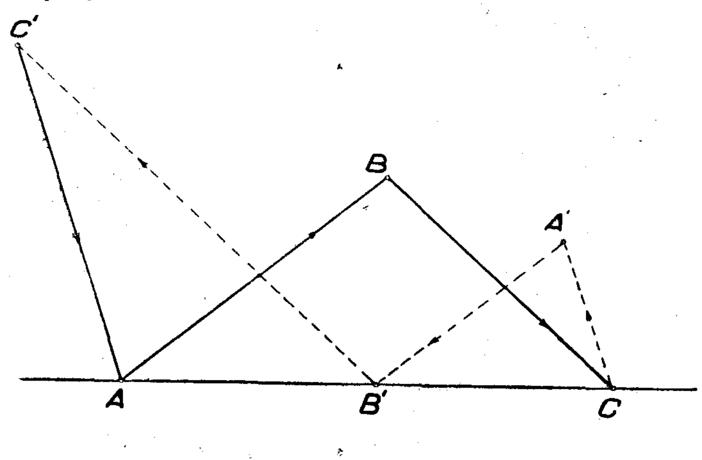
$$(a+b+c \mid a'+b'+c')=0,$$

a što se svodi na tvrdjenje Desargues-ova stava.

6. Stav koji smo izveli u prethodnoj tački je stav koji je Hessenberg dokazao tek 1905 god. i koji se sastoji u tome da se Desargues-ov stav može izvesti iz Paposova stava oslanjajući se jedino na aksiome veza.

U izvodjenju pod 5 pomenutog stava, služili smo se ne samo pojmom paralelnosti, već i translacijom, tj. implicirali smo i pojam kongruencije. Medjutim, kao što ćemo videti u tački 7, pri izvodjenju opšteg Paposova stava, ovi pojmovi nisu bitni i ne zadiru u suštinu dokaza, već smo se njima služili samo zbog preglednosti.

Zbog toga ćemo ovde izneti još jedan čisto planimetriski dokaz Hessenberg-ova stava, a kako se u ovom dokazu ne pojavljuju vektori ni vektorski zbir, to on ne implicira pojam podudarnosti. Ali ćemo i ovde uzeti da se prava nedogleda nalazi u beskonačnosti, tj, oslanjaćemo se na pojam paralelnosti, jer se ovaj dokaz može neposredno izvesti i kad uzmemo da je prava nedogleda u konačnosti, samo što u tom slučaju slike gube u preglednosti.



Sl. 7

Napomenimo najzad da smo u prethodnom, analitičkom dokazu Hessenberg-ova stava izveli Desargues-ov stav tako što smo dvaput uzastopce primenili Paposov stav, dok za planimetrisko izvodjenje moramo ovaj stav primeniti tri puta.

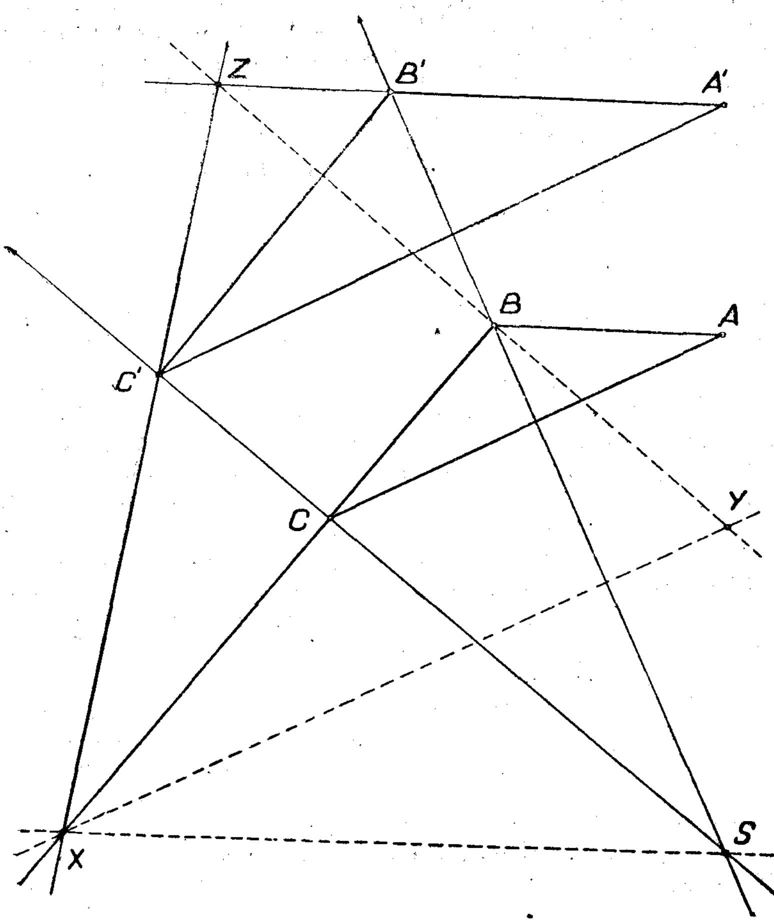
Za pomenuto planimetrisko izvedjenje Hessenberg-ova stava pogodnije nam je da Paposov stav primenimo u ovom obliku.

Neka je $C'ABC$ (v. sl. 7) *proizvoljna poligonalna linija i $CA'B'C'$ takva poligonalna linija da su njene strane paralelne odgovarajućim stranama prethodne poligonalne linije, tj. da je*

$$CA' // C'A, \quad A'B' // AB, \quad B'C' // BC.$$

Ako se tačka B' nalazi na pravoj AC, tada se i tačka B mora nalaziti na pravoj $A'C'$.

Ovakvu Paposovu sliku označićemo ukratko sa ($C'ABCA'$ $B'C'$) i pokazaćemo da se na osnovu tri ovakve Paposove slike može izvesti Desargues-ov stav koga ćemo formulisati ovako.



Sl. 8

Ako se trouglovi ABC i $A'B'C'$ nalaze u perspektivnom položaju, tj. ako su strane AB, BC i CA prvog trougla paralelne odgovarajućim stranama $A'B'$, $B'C'$ $C'A'$ drugog trougla, i ako sa S označimo tačku preseka pravih BB' i CC', tada se tačke S, A i A' nalaze na jednoj pravoj.

D o k a z. (v. sl. 8): Povucimo kroz tačku S paralelu sa stranom AB (i $A'B'$) do preseka X sa produženjem strane BC. Povucimo, zatim, kroz tačku B paralelu zraku SCC' s jedne strane do preseka Z sa produženjem strane $A'B'$, a s druge strane do preseka Y sa paralelom strani AC (i $A'C'$) koja prolazi kroz tačku X.

Iz Paposove slike $(XSC'B'ZBX)$ sledi da se tačke X, C' i Z nalaze na jednoj pravoj. Iz Paposove slike $(SC'A'ZYXS)$ sledi da se tačke S, Y i A' nalaze na jednoj pravoj, i najzad iz Paposove slike $(SXYBACS)$ sledi da se i tačke S, Y i A moraju nalaziti na jednoj pravoj.

Kako se, dakle, tačke A i A' nalaze na pravoj SY, to se tačke S, A i A' nalaze na jednoj pravoj, što je trebalo dokazati.

7. Iz izvodjenja kako Paposova tako i Desargues-ova stava vidimo da smo se, uglavnom, oslanjali na distributivni zakon paralelnog proizvoda, kao i na činjenicu da je paralelnost vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ekvivalentna sa $(a\,|\,b)=0$. Što smo pri ovom izvodjenju upotrebljavali vektore i preko njih se implicitno oslanjali ne samo na pojam paralelnosti, već i na translaciju i kongruenciju, za sam dokaz i nije bitno. Stvarno, ako želimo prvo da se u dokazu rešimo paralelnosti, treba umesto prave u beskonačnosti pretpostaviti da se prava nedogleda nalazi u konačnosti i ceo dokaz interpretisati projektivno. Drugo, treba primetiti da se pri vektorskom sabiranju, na koje nailazimo u dokazima, ne javlja komutativni zakon, tako da ovo sabiranje ne iziskuje konstrukciju paralelograma sila, pa ga možemo interpretisati u mnogo opštijem vidu.

Suštinski u ovom dokazu se javlja pojam paralelnog proizvoda u vidu koordinacije izmedju skupa od četiri tačke i skupa realnih brojeva sa osobinom da za njega važi analogon distributivnog zakona i da on iščezava kad su duži odredjene ovim tačkama paralelne, odnosno kad se seku u nedogledu.

Uočimo četiri tačke, tj. dva para tačaka A, B i A', B' i pretpostavimo da ovim parovima možemo jednoznačno koordinirati odredjen realan broj Φ,

$$\Phi = \Phi\,(AB,\ A'B'),$$

tako da izmedju ova dva para tačaka i brojeva Φ važi:

1° analogon distributivnog zakona,
2° da adekvatno uvedemo smisao broja 0.

Ovakvu korespondenciju možemo uspostaviti na najraznovrsnije načine i, ne ulazeći za sad u njenu unutrašnju strukturu, mi ćemo je uvesti potpuno apstraktno u onom obliku u kome je možemo najbolje prilagoditi posmatranim problemima.

1° Analogon distributivnog zakona.—Uočimo pored parova tačaka A, B i A', B' još jednu tačku C, tada analogon distributivnom zakonu možemo postulisati tako da bude

$$\Phi(AB, A'B') = \Phi(AC, A'B') + \Phi(CB, A'B').$$

Da ovo ima analogije sa distributivnim zakonom uvidjamo ako AB smatramo kao izvestan „punktualan" zbir iz AC i CB, koga možemo, recimo, pisati ovako

$$AB = AC \overset{\wedge}{+} CB,$$

i gde pod „$\overset{\wedge}{+}$" ne smatramo ni obični, ni vektorski zbir. U tom slučaju gore definisani distributivni zakon možemo pisati i ovako

$$\Phi(AC \overset{\wedge}{+} CB, A'B') = \Phi(AC, A'B') + \Phi(CB, A'B').$$

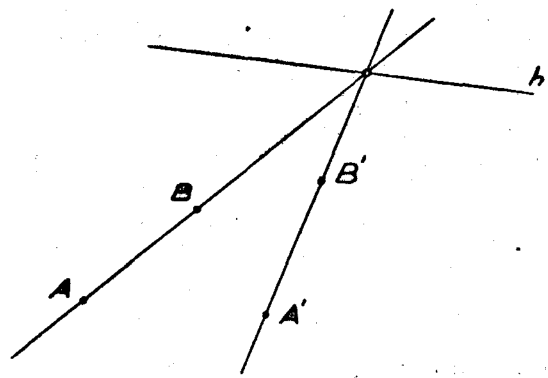
Ovaj zakon pretpostavljamo da važi i za drugi par tačaka, zadržavajući pri tome prvi par kao stalan. Dakle, pretpostavljamo da ovako definisan distributivni zakon važi kako za levi, tako i za desni par tačaka.

2° Interpretacija elementa 0.—Element, tj. broj 0 uvešćemo tako što ćemo postulisati da nula odgovara onim parovima tačaka AB i $A'B'$, tj. da je

$$\Phi(AB, A'B') = 0,$$

kad se prave AB i $A'B'$ seku u nedogledu, ili kad se ove četiri tačke nalaze na jednoj pravoj, i obratno. Pri tome za pravu nedogleda možemo izabrati proizvoljnu pravu h ravni, i ukoliko je potrebno da je naročito istaknemo, možemo za ovako definisan simbolički proizvod, umesto $\Phi(AB, A'B')$, kraće pisati $(AB, A'B')_h$ (v. sl. 9).

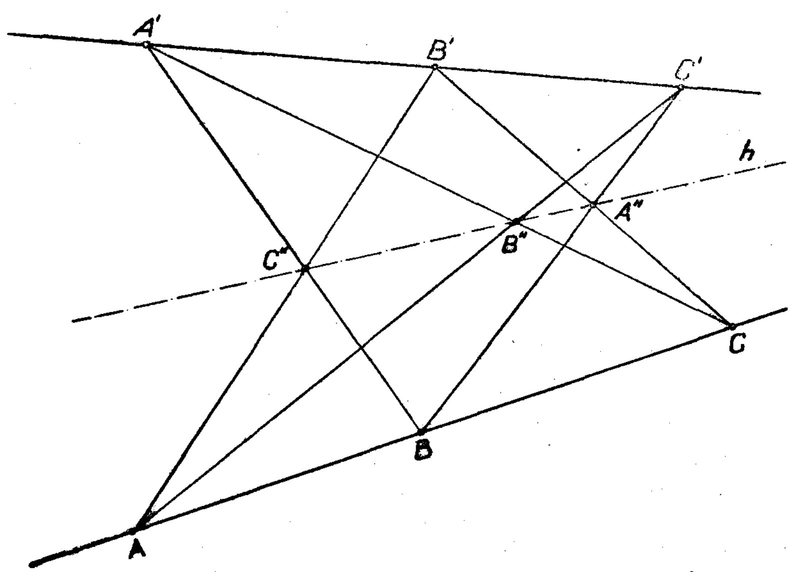
Ukoliko 1° i 2° možemo smatrati kao aksiome za ovako definisan simbolički proizvod, tada možemo pokazati da na njima, pored aksioma veza, počiva projektivna geometrija. Dovoljno je zato da pokažemo da važi Paposov stav, jer kao što smo videli iz njega sledi Desargues-ov stav, a iz ovih stavova, kao što je poznato, sledi osnovni stav projektivne geometrije, tj. invarijantnost dvojne razmere.



Sl. 9

8. Pokažimo ovde kako se gore definisanim simboličkim proizvodom može izvesti opšti Paposov stav koji glasi:

Neka se tačke A, B i C nalaze na jednoj pravoj, a tačke A', B' i C' na drugoj. Kada ove tačke spojimo poligonalnom linijom AB' CA' BC' A, tada tačka preseka C'' pravih AB' i BA', tačka preseka B'' pravih AC' i CA' i tačka preseka A'' pravih BC' i CB' leže na jednoj pravoj.



Sl. 10

D o k a z (v. sl. 10): Povucimo kroz tačke A'' i C'' pravu h i uzmimo ovu pravu za nedogled. Treba da dokažemo da će se tačka B'' takođe nalaziti na pravoj h, tj. da će se i prave AC' i CA' seći u nedogledu. Drugim rečima, na osnovu gore definisanog simboličkog proizvoda treba da dokažemo da će iz

$$(17) \qquad (AB',\ BA')_h = 0 \quad \text{i} \quad (BC',\ CB')_h = 0\,,$$

slediti

$$(18) \qquad (AC',\ CA')_h = 0\,.$$

Kako možemo staviti da je

$$AC' = AB \overset{\wedge}{+} BB' \overset{\wedge}{+} B'C',$$

$$CA' = CB \overset{\wedge}{+} BB' \overset{\wedge}{+} B'A',$$

i kako je

$$(19) \quad (AB,\ CB)_h = 0,\ (BB',\ BB')_h = 0,\ (B'C',\ B'A')^h = 0,$$

jer se svaki od ovih parova nalazi na istoj pravoj, to je na osnovu distributivnog zakona

$$\begin{aligned}(AC', CA')_h = {} & (AB, CB)_h + (AB, BB')_h + (AB, B'A')_h + \\ & + (BB', CB)_h + (BB', BB')_h + (BB'\ B'A')_h + \\ & + (B'C', CB)_h + (B'C', BB')_h + (B'C', B'A')_h .\end{aligned}$$

Vodeći računa o (19), tj. da su diagonalni članovi jednaki nuli, možemo na osnovu distributivnog zakona preostale članove desne strane skupiti u dva člana, a ovim dobivamo da je

$$\begin{aligned}(AC',\ CA')_h & = (AB \overset{\wedge}{+} BB',\ BB' \overset{\wedge}{+} B'A')_h + (BB' \overset{\wedge}{+} B'C',\ CB \overset{\wedge}{+} BB')_h = \\ & = (AB',\ BA')_h + (BC',\ CB')_h .\end{aligned}$$

Otuda vidimo da iz (17) sledi (18), čime je stav dokazan.

9. Ispitajmo najzad do koje mere možemo efektivno realizovati u tački 7 definisan simbolički proizvod $(AB,\ A'B')_h$, ili opštije operator $\Phi(AB,\ A'B')$, tako da uslovi 1° i 2° budu zadovoljeni.

Uočimo prvo distributivni zakon i pored parova AB i $A'\,B'$ posmatrajmo još niz tačaka

$$C_\nu, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots n, \text{ sa } C_0 = A \text{ i } C_n = B.$$

Na osnovu distributivnog zakona je tada

$$\Phi(AB, A'B') = \sum_{\nu=1}^{n} \Phi(C_{\nu-1} C_\nu, A'B'),$$

a slično bi trebalo da važi i za drugi par tačaka $A'B'$. To znači da svakom od faktora operatora Φ odgovara osobina o nezavisnosti putanje. Svaki potencial koji isražava rad u Laplace-ovom polju zadovoljava ovaj uslov. Prema tome bi operator Φ trebao da ima oblik izvesnog proizvoda razlike potenciala, a za koji bi važio distributivni zakon.

Pretpostavimo da svakoj tački ravni odgovara odredjen kompleksan broj, na primer, tački A broj z_1, tački B broj z_2, itd., i uočimo funkcije kompleksne promenljive

$$w = F(z) \quad \text{i} \quad w' = G(z).$$

za koje ćemo pretpostaviti samo da su uniformne, a koje u opštem slučaju ne moraju biti analitičke, tako da one, ako ih definišemo elementarnim analitičkim izrazima, mogu biti oblika

$$F(z) = f(z, \bar{z}), \quad G(z) = g(z, \bar{z}).$$

Prema prethodno rečenom operator Φ bi trebao da ima oblik izvesnog proizvoda čiji bi faktori bili

$$w_2 - w_1 = F(z_2) - F(z_1) \quad \text{i} \quad w_2' - w_1' = G(z_2') - G(z_1'),$$

za koje bi trebao da važi distributivni zakon, a koji proizvod bi trebao da bude realan. Prema tome za operator Φ možemo uzeti bilo realni ili imaginarni deo proizvoda gornjih brojeva, bilo paralelni ili ortogonalni proizvod ovih brojeva, i tada će za svaki od ovih proizvoda važiti pomenuti distributivni zakon.

Da bismo u smislu posmatrane problematike mogli adekvatno definisati element nula uzećemo za operator Φ paralelni proizvod gornjih brojeva i stavićemo

$$\Phi(AB, A'B') = (w_2 - w_1 \mid w_2' - w_1'),$$

gde je

$$w_1 = F(z_1), \quad w_2 = F(z_2), \quad w_1' = G(z_1'), \quad w_2' = G(z_2').$$

Da bismo sad uveli element nula tako da gornji proizvod bude jednak nuli kad se duži AB i $A'B'$ produžene seku u nedogledu, uzmimo za obe funkcije $F(z)$ i $G(z)$ istu bilinearnu transformaciju oblika

$$(20) \qquad w = g(z) = \frac{a'z + b'\bar{z} + c'}{\bar{a}z + a\bar{z} + p}, \text{ gde je } p \text{ realno.}$$

Kako je imenitelj ovog izraza realan, to je preslikavanje ravni z na ravan w, koje je odredjeno ovom funkcijom $w = g(z)$, biunivoko i kolinearno, tj. svakoj tački i svakoj pravoj ravni z odgovara odredjena tačka i odredjena prava ravni w, i obratno, jer iz (20) sledi

$$z = \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} 1 & w & \bar{w} \\ \bar{a} & a' & b' \\ p & c' & \bar{c}' \end{vmatrix} \quad \text{sa } \triangle = \begin{vmatrix} 1 & w & \bar{w} \\ \bar{a} & a' & \bar{b}' \\ a & b' & \bar{a}' \end{vmatrix}.$$

Pored toga svim tačkama ravni z koje se nalaze na pravoj

$$\bar{a}z + a\bar{z} + p = 0,$$

odgovaraju tačke prave u beskonačnosti ravni w.

Prema tome, ako ovu pravu uzmemo za pravu nedogleda h i stavimo

$$(21) \quad w_1 = g(z_1), \quad w_2 = g(z_2), \quad w_1' = g(z_1'), \quad w_2' = g(z_2'),$$

tada će proizvod

$$(22) \qquad (AB, A'B')_h = (w_2 - w_1 \mid w_2' - w_1')$$

zadovoljavati oba uslova 1° i 2°.

Da je i uslov 2° zaista zadovoljen, tj. da je

$$(w_2 - w_1 \mid w_2' - w_1') = 0$$

kad se duži $z_1 z_2$ i $z_1' z_2'$ produžene seku u nedogledu, lako uvidjamo ako primetimo da tada duži $w_1 w_2$ i $w_1' w_2'$ moraju biti paralelne (tj. da njihov paralelni proizvod mora biti jednak nuli), jer tačka preseka duži $z_1 z_2$ i $z'_1 z'_2$ leži na pravoj h, pa joj u ravni w odgovara tačka koja se nalazi na pravoj u beskonačnosti ove ravni.

Otuda vidimo da se izrazom (22) sa (21) i (20) može efektivno obrazovati proizvod koji zadovoljava uslove 1° i 2°.

Primetimo najzad da paralelni proizvod dva vektora pretstavlja, ustvari, površinu paralelograma obrazovanog ovim vektorima, tj. da izraz (22) ima u izvesnom smislu površinski karakter, a da uslovi 1° i 2° pretstavljaju metričke osobine površine. Prema tome, iz gornjeg izlaganja izlazi da se, preko simboličkog proizvoda Φ, Paposov stav može izvesti postulisanjem dveju osnovnih metričkih osobina površine, naime aditivnosti površina i činjenice da ona iščezava kad lik degeneriše na pravu.

Kako ovom proizvodu, kao što smo pokazali, možemo dati veoma opšti oblik, to se podesnim izborom funkcija F i G mogu dobiti i drugi stavovi, a bilo bi od interesa da se vidi kako bi trebalo izabrati ove funkcije da bi se ovim dobio i opšti Pascal-ov stav koji se odnosi na konične preseke.