Математички Билтен
15 (XLI)
1991 (59-67)
Скопје, Југославија

ЗА ЛП-ЗАДАЧАТА СО МОНОТОНА МАТРИЦА НА ОГРАНИЧУВАЊАТА

Димитра Л. Карчицка

Во [4] е разгледан парот заемно-дуални ЛП-задачи

$$\min\{z = c^T x \mid Ax \geq b,\ x \geq o\}, \qquad \max\{w = b^T y \mid A^T y \leq c,\ y \geq o\}$$

каде што A е nxn монотона матрица, т.е. квадратна матрица со ненегативна инверзна матрица, и е извршена дискусија за некои специјални случаи на матрица A со позната $A^{-1} \geq 0$. Оттука се наметна прашањето за последиците од воведувањето на дополнително ограничување $x \leq a$, каде што a е произволно даден ненегативен вектор, кои во овој труд се изведени и формулирани во вид на заклучоци.

Предмет на интересирање е ЛП-задачата

$$\min\{z = c^T x \mid Ax \geq b,\ o \leq x \leq a\} \tag{1}$$

каде што A е nxn несингуларна матрица со инверзна матрица

$$A^{-1} \geq 0;$$

c и b се произволно дадени n-вектори, a е ненегативен n-вектор, $a \geq o$. Дуалната ЛП-задача на (1) гласи

$$\max\{w = b^T y - a^T u \mid A^T y - u \leq c,\ y \geq o,\ u \geq o\}. \tag{2}$$

Очигледно, допустливата област на (1), ако не е празно множество, претставува конвексен полиедар, додека допустливата област на (2) во секој случај е неограничено одгоре конвексно многустрано множество, кое ја содржи барем полуправата

$$\left\{ \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o \\ \bar{u} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} o \\ e \end{bmatrix},\ \lambda \geq 0 \right\}$$

каде што компонентите на векторот $\bar{u}$, $\bar{u}_i$, $i \in N = \{1,\ldots,n\}$ се одредени на следниов начин:

$$\bar{u}_i = \begin{cases} -c_i & \text{ако } c_i < 0 \\ 0 & \text{ако } c_i \geq 0 \end{cases};$$

е го означува n-векторот со компоненти сите еднакви на 1; $c=[c_i]$.

Случајот на ЛП-задачата (1) (и на (2)), за која

$$b \leq o, \quad c \geq o \tag{3}$$

е тривијален, бидејќи тогаш $x^*=o$ ($y^*=o$, $u^*=o$) претставува оптимална програма, а $z^*=0$ ($=w^*$) е оптимумот на функцијата на целта.

Ако само $b \leq o$, тогаш $x=o$ останува програма на (1) и може да се заклучи дека (1) (и (2)) е решлива за произволно даден c. Наоѓањето на оптимална програма, согласно со горната дискусија, во овој случај е од интерес за $c \geq o$.

За тривијален може да се смета и случајот

$$c \leq o, \quad Aa - b \geq o \tag{4}$$

бидејќи тогаш $x^*=a$ ($y^*=o$, $u^*=-c$) претставува оптимална програма, а $z^*=c^Ta(=-a^T(-c)=w^*)$ е оптимумот.

Затоа, понатамошните разгледувања се прават при претпоставката дека е нарушен барем по еден од условите (3) и (4).

Еквивалентната на (1) ЛП-задача во стандарден облик гласи

$$\min\{z = c^Tx \mid Ax-v = b,\ x+s=a,\ x \geq o,\ v \geq o,\ s \geq o\} \tag{1'}$$

така што блок-матрицата

$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & -I & O \\ I & O & I \end{bmatrix}$, каде што I означува единична nxn матрица,

ја претставува матрицата на битните ограничувања на (1'). Непосредно се уочува дека матрицата

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} A & O \\ I & I \end{bmatrix}$$

претставува база со инверзна матрица

$$\hat{B}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -A^{-1} & I \end{bmatrix}$$

така што експлицитниот облик на (1'), соодветен на базата $\hat{B}$ гласи:

$$\min\{z-z_o = -(y_o^T v) \mid x-A^{-1}v=b_o,\ s+A^{-1}v=s_o,\ x\geq o,\ v\geq o,\ s\geq o\} \qquad (1")$$

при ознаките

$$b_o = A^{-1}b, \quad s_o = a-b_o, \ y_o = (A^{-1})^T c, \ z_o = c^T b_o (=b^T y_o = w_o).$$

Оттука може да се извлечат следниве заклучоци:

(i) $s_o \geq o$ е потребен услов за допустливост (и решливост) на (1);

(ii) При $s_o \geq o$, условот $b_o \geq o$ е доволен за решливост на (1);

(iii) Ако $b_o \geq o$, тогаш $\{x=b_o+\sum_{j\in N} \mu_j (A^{-1})^j,\ \mu_j \geq 0,\ j\in N\}$ претставува точкеста дефиниција на конвексното многустрано множество

$$T = \{x \mid Ax \geq b,\ x \geq o\}.$$

Овде, а и понатаму во излагањето, $(A^{-1})^j$ ја означува j-та колона на матрицата A^{-1}, $j=1,\ldots,n$; за произволен n-вектор t, t_i или $(t)_i$ ја означува i-та компонента.

(iv) При $s_o \geq o$ и $b_o \geq o$, условот $y_o \geq o$ е доволен за оптималност на програмата $x^*=b_o$ на (1) ($y^*=y_o$, $u^*=o$ на (2)); z_o ($=w_o$) е оптимумот на функцијата на целта.

При $s_o \geq o$, $b_o \geq o$, сите точки на $T=\{x = b_o+\sum_{j\in N} \mu_j (A^{-1})^j$, $\mu_j \geq 0,\ j\in N\}$ по конструкција се ненегативни. Затоа, за допустливата област D на (1) е точно дека

$$D = \{x\in T \mid x \leq a\}$$

и оттука може да се извлече заклучокот:

(v) Ако $b_o \geq o$ и $b_o \nleq a$, тогаш (1) е недопустлива ((2) е нерешлива).

Исто така е јасен и заклучокот:

(vi) Ако $o \leq b_o \leq a$ и за барем еден $i\in N$ е точно дека $(b_o)_i=a_i$, тогаш b_o е единствена програма на (1), па и оптимална.

За $j \in N$, $(A^{-1})^j \geq o$ има барем една позитивна компонента и затоа, при претпоставката $o \leq b_o < a$, постои $i_j \in N$ така што

$$\frac{a_{i_j} - (b_o)_{i_j}}{(A^{-1})^j_{i_j}} = \min_{i:(A^{-1})^j_i > 0} \frac{a_i - (b_o)_i}{(A^{-1})^j_i} \tag{5}$$

Тогаш, по конструкција,

$$\mu_{j_o} = \frac{a_{i_j} - (b_o)_{i_j}}{(A^{-1})^j_{i_j}} > 0, \tag{6}$$

$$\hat{x}^j = b_o + \mu_{j_o}(A^{-1})^j \in D \tag{7}$$

и уште $\hat{x}^j$ задоволува како равенства n услови, кои ја дефинираат допустливата област D на (1). Имено, $\hat{x}^j$ е пресечна точка на работ

$$L_j = \{x = b_o + \mu_j(A^{-1})^j \mid \mu_j \geq 0\}$$

со граничната хиперрамнина

$$H_{i_j} = \{x \mid e^T x = a_{i_j}\}.$$

Затоа може да се заклучи:

(vii) Ако $o \leq b_o < a$, тогаш $\hat{x}^j$, $j \in N$ одредени со условите (5)-(7), претставуваат темиња на D.

Од аналогни причини се точни и следниве заклучоци:

(viii) При $o \leq b_o < a$ и $\hat{x}^j$, $j \in N$ одредени со (5)-(7), за секој пар $\kappa, \ell \in N$, $\kappa \neq \ell$, за кој $i_\kappa \neq i_\ell$, постои решение $\bar{\lambda} > 0$, $\bar{\mu} > 0$ на системот

$$\lambda(\hat{x})^\kappa_{i_\kappa} + \mu(\hat{x})^\ell_{i_\kappa} = a_{i_\kappa}$$

$$\lambda(\hat{x})^\kappa_{i_\ell} + \mu(\hat{x})^\ell_{i_\ell} = a_{i_\ell}$$

и притоа точката $\bar{\lambda}\hat{x}^\kappa + \bar{\mu}\hat{x}^\ell$ е теме на D.

(ix) Ако $i_j = \kappa$ за секој $j \in N$, тогаш сите $\hat{x}^j$, $j \in N$ лежат на граничната хиперрамнина $H_\kappa = \{x \mid e^T_\kappa x = a_\kappa\}$, $\{b_o, \hat{x}^j, j \in N\}$ го претставува профилот на D и $z^* = \min\{c^T\hat{x}^j, j \in N, c^T b_o\}$

е оптимумот на ЛП-задачата (1).

Во продолжение се разгледува случајот кога

$$b_o \ngeq o \tag{8}$$

при претпоставката $s_o \geq o$.

Нека J и $\underline{J}$ се дефинирани како што следува

$$J = \{i \in N \mid (b_o)_i < 0\}$$

$$\underline{J} = \{i \in N \mid (b_o)_i \geq 0\}$$

Согласно (8), $J \neq \emptyset$ и конвексното многустрано множество

$$T_o = \{x \mid Ax \geq b\} = \{x = b_o + \sum_{j \in N} v_j (A^{-1})^j,\ v_j \geq 0,\ j \in N\}$$

може да се запише во следнава блок-форма

$$\left.\begin{aligned} x_J &= (b_o)_J + \sum_{j \in N} v_j (A^{-1})_J^j \\ x_{\underline{J}} &= (b_o)_{\underline{J}} + \sum_{j \in N} v_j (A^{-1})_{\underline{J}}^j \end{aligned}\right. \quad v_j \geq 0,\ j \in N \tag{9}$$

каде што $(b_o)_J < o$, $(b_o)_{\underline{J}} \geq o$.

Конвексното многустрано множество $T = \{x \mid Ax \geq b,\ x \geq o\}$ е еднакво на пресекот на T_o со ненегативниот ортант $\{x \mid x \geq o\}$, т.е.

$$T = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_J \\ x_{\underline{J}} \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{aligned} x_J &= (b_o)_J + \sum_{j \in N} v_j (A^{-1})_J^j \geq o \\ x_{\underline{J}} &= (b_o)_{\underline{J}} + \sum_{j \in N} v_j (A^{-1})_{\underline{J}}^j \geq o \end{aligned},\ v_j \geq 0,\ j \in N \right\}$$

Јасно е дека за T, како подмножество од T_o, рестрикциите доаѓаат од условот $x_J \geq o$, бидејќи во секој случај, по конструкција, $x_{\underline{J}} \geq o$. Значи,

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} x_J \\ x_{\underline{J}} \end{bmatrix} \in T_o \;\middle|\; x_J \geq o \right\}$$

каде што x_J и $x_{\underline{J}}$ се зададени со (9).

Утврдувањето на v_j, $j \in N$, за кои е исполнет условот $x_J \geq o$ со истовремено наоѓање на профилот $\bar{\bar{T}}$ на T, наједноставно може да се изврши во случајот

$$(A^{-1})^j_J > o \text{ за секој } j \in N. \tag{10}$$

Имено, тогаш постојат n темиња на T, $\hat{x}^j$, $j \in N$, соодветни на пресечните точки на бескрајните рабови на T_o, L_j, $j \in N$, со страните на ненегативниот ортант $\{x \mid x \geq o\}$, кои претставуваат почетни точки на бескрајните рабови на T одредени со векторите $(A^{-1})^j$, $j \in N$,

$$\hat{x}^j = \begin{bmatrix} \hat{x}^j_J \\ \hat{x}^j_{\underline{J}} \end{bmatrix}$$

каде што

$$\hat{x}^j_J = (b_o)_J - \frac{(b_o)_{\ell_j}}{(A^{-1})^j_{\ell_j}}(A^{-1})^j_J, \qquad \hat{x}^j_{\underline{J}} = (b_o)_{\underline{J}} - \frac{(b_o)_{\ell_j}}{(A^{-1})^j_{\ell_j}}(A^{-1})^j_{\underline{J}}$$

а притоа $\ell_j \in J$ е одреден со условот

$$(b_o)_{\ell_j}/(A^{-1})^j_{\ell_j} = \min_{i \in J}\{(b_o)_i/(A^{-1})^j_i\}.$$

На тој начин е добиена точкестата дефиниција на конвексното многустрано множество, при $b \nleq o$,

$$T = \{x = \sum_{i \in N} \lambda_i \hat{x}^i + \sum_{j \in N} \mu_j (A^{-1})^j, \ \lambda_i \geq 0, \ i \in N, \ \sum_{i \in N} \lambda_i = 1, \ \mu_j \geq 0, \ j \in N\}$$

односно, при $b \leq o$,

$$T = \{x = \sum_{i \in N} \lambda_i \hat{x}^i + \sum_{j \in N} \mu_j (A^{-1})^j, \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i \in N} \lambda_i \leq 1, \ \mu_j \geq 0, \ i,j \in N\}$$

Оттука може да се извлечат следниве заклучоци во врска со допустливата област на (1), $D = \{x \in T \mid x \leq a\}$,

(x) При $b \nleq o$, $\hat{x}^j \leq a$ за барем еден $j \in N$, е доволен услов за допустливост (и решливост) на (1),

(xi) При $b \nleq o$, ако постои барем еден $k \in N$ така што

$$a_k < \min_{j \in N : (\hat{x})^j_k > o} \{(\hat{x})^j_k\}$$

тогаш (1) е недопустлива.

Ако условот (10) не е исполнет, тогаш не мора да постојат точките $\hat{x}^j$, дефинирани со (7)-(9), но од несингуларноста на $A^{-1} \geq 0$, следува дека за секој $i \in J$ постои барем еден $j \in N$, така што $(A^{-1})^j_i > 0$ и со комбинации на вааквите вектори $(A^{-1})^j$ може да се добијат екстремалните точки на T, како пресечни точки на страните на T_0 со страните на $\{x \mid x \geq o\}$. Секоја ваква точка $\hat{x}$ што го исполнува условот $\hat{x} \leq a$, претставува екстремална точка и на D и во ваква ситуација, исто како и во случаите при условот (10), кога експлицитно не е утврдена оптимална програма, најрационално е задачата (1") да се трансформира во експлицитниот облик, соодветен на $\hat{x}$ и да продолжи решавањето со примена на некој од симплекс алгоритмите.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Fiedler M., and V. Ptak: Some generalizations of positive definiteness and monotonicity, Numerische Mathematik, 9(1966), 163-172

[2] Hadeler K.P.: On Compositive Matrices Linear Algebra and its Applications, 49: 79-89, 1983

[3] Карчицка Д.Л.: За една класа линеарни системи, Матем. Билт., кн. 9-10, 1985-86, Скопје (1989)

[4] Карчицка Д.Л.: On the dual pair of LP-problems in canonical form with nonnegative inverse matrix, Матем. Билтен, кн. 14, Скопје, 1990, 55-62

[5] Karčicka D.L.: Linear and quadratic programs with monotone matrices of constraints, 12-th Triennial Conference on Operations Research, IFORS '90, Athens-Greecę, 1990

[6] Simonnard M.: Programowanie liniowe, PWN, Warszawa, 1967

[7] Tucker AW: Principal Pivotal Transforms of Square Matrices, SIAM Rewiev 5(1963), 305

ON THE LP-PROBLEM WITH MONOTONE MATRIX OF CONSTRAINTS

D.L. Karčicka

S u m m a r y

In [4] we considered the dual pair of LP-problems in canonical form with an nxn monotone matrix A ($A^{-1} \geq 0$) of the constraints, and we discussed some special cases of A. Here we continue the considerations for the LP-problem

$$\min\{z = c^T x \mid Ax \geq b,\ o \leq x \leq a\} \qquad (1)$$

where A is an nxn monotone matrix, and for its dual problem

$$\max\{w = b^T y - a^T u \mid a^T y - u \leq c,\ y \geq o,\ u \geq o\}. \qquad (2)$$

We use the explicite form corresponding to the base B=A of the standard form of (1),

$$\min\{z - z_o = -(y_o^T v) \mid x - A^{-1} v = b_o,\ s + A^{-1} v = s_o,\ x \geq o,\ v \geq o,\ s \geq o\}, \qquad (1'')$$

where

$$b_o = A^{-1} b,\ s_o = a - b_o,\ y_o = (A^{-1})^T c,\ z_o = c^T b_o\ (= b^T y_o = w_o).$$

As (2) is feasible always, we can state:

(i) $s_o \geq o$ is a necessary condition for feasible (and solvable) (1);

(ii) Under $s_o \geq o$, $b_o \geq o$ is a sufficient condition for solvable (1) and (2);

(iii) If $b_o \geq o$, then $x = b_o$ is an unique vertex and $\{x = \mu_j (A^{-1})^j,\ \mu_j \geq 0\}$, $j \in N$, are infinite edges of the convex polyhedral set $T = \{x \mid Ax \geq b,\ x \geq o\}$, where $(A^{-1})^j$ denotes the j-th column of A^{-1};

(iv) If $s_o \geq o$ and $b_o \geq o$, then $y_o \geq o$ is a sufficient condition for the optimality of $x = b_o$, $y = y_o$;

(v) If $b_o \geq o$ and $b_o \nleq a$, then (1) is infeasible(((2) is unsolvable);

(vi) If $o \leq b_o \leq a$ and at least one component of b_o is egual to the corresponding component of a, then $x = b_o$ is an unique program of (1);

(vii) If $o \leq b_o < a$ and $\mu_{j_o} = \dfrac{a_{i_j} - (b_o)_{i_j}}{(A^{-1})^j_{i_j}} = \min\limits_{i:(A^{-1})^j_i > o} \dfrac{a_i - (b_o)_i}{(A^{-1})^j_i}$, $j \in N$, then $\hat{x}^j = b_o + \mu_{j_o} (A^{-1})^j$, $j \in N$, are vertices of the convex polyhedral set $D = \{x \in T \mid x \leq a\}$;

(viii) Under the assumptions of (vii), for any pair $k,r \in N$, $k \neq r$ such that $i_k \neq i_r$ the solution $\hat{\lambda},\hat{\mu}$ of the system

$$\lambda(\hat{x})^k_{i_k} + \mu(\hat{x})^r_{i_k} = a_{i_k}$$

$$\lambda(\hat{x})^k_{i_r} + \mu(\hat{x})^r_{i_r} = a_{i_r}$$

defines a vertex $\hat{\lambda}\hat{x}^k + \hat{\mu}\hat{x}^r$ of D;

(ix) For i_j, $j \in N$, defined in (vii) if $i_j = k$, $j \in N$, then b_o, $\hat{x}^j$, $j \in N$ are the vertices of D;

(x) If $b \nleq o$ and $\hat{x}^j \leq a$ for at least one $j \in N$, then (1) is feasible (and solvable);

(xi) If $b \nleq o$ and there exists $k \in N$ such that

$$a_k < \min_{j \in N : (\hat{x})^j_k > o} \{(\hat{x})^j_k\},$$

then (1) is infeasible.