МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 7 (2020), 81 – 105
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-7.html

ИГРИТЕ ЕРЕНФОЈТ-ФРАЈСЕ: ЗА ЛОГИЧКИТЕ ИСКАЗИ И СТРОГИТЕ ДОКАЗИ

Невена Серафимова [1]

Луѓето имаат способност за гледање шеми во комплексните феномени. Посматрајќи ги системите, ја наоѓаме нивната внатрешна логика, множеството од правила и релации кои управуваат со нивното однесување. Така доаѓаме и до врските помеѓу причините и последиците и се издигнуваме на повисоките скалила, градејќи теории и хипотези со кои ќе проектираме логички системи во иднината. И како и сите хипотези и теории, тие ќе бидат онолку добри колку што е и логиката којашто се користи при нивното креирање. Да го замислиме логичкиот модел како сообраќајната мапа која го покажува патот по кој се стигнало до одредена дестинација. Слабото и нејасно резонирање и користењето на некакви ’магични‘ претпоставки, ги зголемуваат шансите дека работите нема да се одвиваат според предвиденото или посакуваното, т.е. нема да нè однесат на вистинското место.

Примената на математички пристап кон некој проблемски тип се остварува преку формирање на група од методи кои ќе овозможат креирање на формална структура на дадениот проблем, по што следи негово решавање и на крајот, проверка на добиените резултати. Со текот на времето, во овој процес почнале да се издвојуваат нови, специјализирани области како што се математичката физика, математичката биологија, математичката економија, теоријата на контрола. Во сите нив, покрај обезбедувањето на одговори за прашањата кои се разгледуваат, математиката може да даде и препораки за подобрување на резултатите, да открие и нови проблеми, па дури и да придонесе во создавањето на нови дисциплини. Оваа симбиоза на математички модели и техники со одредени специјализирани знаења, заради нивна примена во науката, инженерството, индустријата или во општеството, како и за решавање на секојдневните проблеми, е општо позната како *применета* математика.

Од друга страна, *теориската* (уште наречена и *чиста*) математика, иако не нужно различна од применетата, повеќе се занимава со апстрактни проблеми наместо со проблеми од секојдневието. Чистата математика не е ограничена на појавите во физичкиот свет, бидејќи се движи во рамките на широко, а сепак ригорозно поставена теорија, според правила кои се во склад со човековиот рационален ум. Корените на многу од овие *теоретски* проблеми ќе ги пронајдеме во конкретни проблеми од физиката, со кои се наметнуваат разни техничко-теоретски потреби кои чистата математика се обидува да ги задоволи. Некои од овие напори доведоа до фундаментални откритија, како што е на пример *универзалната Тјурингова машина*, апстрактна идеја врз која се поставени темелите за развој на модерните компјутери.

Чистата и применетата математика не се исклучуваат меѓусебно, иако комплексните математички алатки кои се користат во применетата математика се, за повеќето просечни корисници, главно неразбирливи. Оттука, иако е веројатно дека нема да имаме никакви потешкотии кога на случаен познаник сакаме да му ги објасниме правилата на некоја друштвена игра, еднакво веројатно е дека истиот тој познаник нема да биде во состојба да ја анализира таа игра од аспект на математичката *теорија на игри*.

Теоријата на игри е создадена заради испитување на ситуации во кои разни страни, наречени *играчи* или *агенти*, треба да донесат одлуки кои се, на одреден начин, заемно поврзани. Оваа заемна поврзаност го упатува секој играч, при донесување на сопствените одлуки (*потези*) во рамки на можните опции (*стратегии*) кои ги има на располагање, да ги анализира одлуките кои другите учесници во играта би можеле да ги донесат, како и соодветно преземените чекори. Анализата треба да ги вклучи и нивните преференци, однесувања, информациите кои ги поседуваат и целите кои сакаат да ги постигнат. Додека различните потези вообичаено водат до различен исход, *решението* на играта ќе ги опишува оптималните одлуки на сите учесници (зависно од тоа дали нивните интереси се слични, спротиставени или пак мешани), заедно со исходот кој притоа ќе се појави.

Јасно е дека една ваква теорија ќе биде силно насочена кон примената, кон проучување на различните појави на интеракција кои се дел од нашето секојдневие. Сепак, овде ќе се насочиме кон нешто поинакво – ќе ја примениме теоријата на игри во некои проблеми од математичката логика, која е непресушен извор на фундаментални проблеми и предизвици за човековиот ум, но и за темелите на севкупната наука која човештвото ја има создадено. Низ игри ќе се осврнеме и на делови од дискретната математика, во која објектите може да се опишат со цели броеви, релациите да се претставуваат во вид на графови и најпосле, да се овозможат пресметки на математички јазик без кои денешните моќни компјутери не би биле нешто повеќе од бескорисна збирка на логички кола.

1. ИГРИ И ЛОГИКА

Зборот *логика* има многу дефиниции. Во философијата, логиката се занимава со процесот на донесување заклучоци, трудејќи се да го одвои доброто од лошото размислување. Во математиката, таа е формализиран и структуриран метод за размислување од кој зависат математичките докази. Во светот на сметачките машини, единствениот разбирлив јазик е логиката преточена во компјутерска програма. Во секојдневието постојано се среќаваме со логиката на функционирање на нештата. Еден таков пример е нашето справување со сообраќајниот метеж каде што преку искуството изнаоѓаме различни начини како да го избегнеме (движење порано или подоцна од активните часови, користење јавен превоз, одење по алтернативни патишта).

Врската помеѓу логиката и игрите има долга историја. Ако разгледуваме една дебата како вид игра, тогаш таа врска е воспоставена уште од Аристотел, кој ги проучувал целите и правилата на дебатирањето, а неговите гледишта се пресликале во заедничкото средновековно име за логиката: *дијалектика*. Имено, се смета дека корените на поврзаноста меѓу игрите и логиката се наоѓаат во процесот на аргументирање, во кој валидните заклучоци се аналогија на дозволени потези во игра.

Аргументирањето во дебатите е всушност вид игра во која треба да му се даде одговор на противникот, следејќи одредени правила и почитувајќи ги временските ограничувања. Крајот на оваа игра значи победа или пораз, во зависност од квалитетот на употребените стратегии. Логиката утврдила дека оние играчи кои се истрајни во одбраната на логички валидни тврдења (т.е. тврдења во кои точноста на претпоставките гарантира логичка точност на заклучокот) имаат победничка стратегија, односно стратегија која може да им гарантира дека од таа дебата ќе излезат како победници.

За да илустрираме игра на аргументација, ќе го употребиме едноставниот логички исказ $(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\varphi \Rightarrow \psi$, познат и како *правило на дисјунктен силогизам*. Двајца опоненти, да ги означиме со П (поддржувач) и О (одрекувач), се соочиле околу овој исказ, при што П сака да го одбрани, а О се обидува да го отфрли. За таа цел, П го усвојува тврдењето ψ чијашто последичност треба да се докаже, наспроти О кој ги прифаќа двете тврдења $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$. Тоа се всушност нивните стратегии во играта. Понатаму, секој од нив „зборува“ (е на потег) по наизменичен редослед.

1 Започнува О, предизвикувајќи го П да го одбрани тврдењето ψ .

2 П го соочува О со едно од неговите тврдења, $\varphi \vee \psi$, барајќи да одбере меѓу φ и ψ .

3 Бидејќи нема што друго да каже, О мора да одговори. Можни се следните две варијанти, 4 или 5.

4 О го прифаќа φ. Тогаш П му укажува на неговиот друг аргумент, $\neg\varphi$, и победува бидејќи О е во контрадикција.

5 О го прифаќа ψ . Тогаш П го користи ова како сопствена одбрана за првичниот предизвик во 1. Бидејќи О нема што друго да каже, ја губи играта.

Аргументацијата не е единствениот пример за спој на игри и логика. Разбирањето на комплексните логички искази и семантичкото значење на поимот на *вистинитост*, може исто така да се посматра преку игра. Постојат многу таканаречени *логички игри*, чија задача е да ги оценат формулите во некој модел, да споредат два модела или да најдат докази. Од друга страна, и логиката може да се примени во игрите, или, пак, и двете заедно во други области, како на пример, компјутерската наука и философијата (особено *епистемологијата*). Ова особено доаѓа до израз со формализирањето на математичката *теорија на игри* во раниот дваесетти век. Иако врските со логиката се појавуваат дури некаде во 1950-те, впечатливо е колку од нејзините промотори се исто така и логичари: вон Нојман, Цермело, Хулиа Робинсон, Кемени, МекКинси и други, [6].

Кога сме кај формализмот, во математичката логика постои *теорија на модели*, која ги проучува математичките структури (како на пр. групи, полиња, графови, универзуми), од логичка гледна точка. За таа цел, се користат претходно создадени *формални* јазици налик на обичните говорни јазици, со свои „букви“ (знаци, симболи), зборови и реченици. Буквите (симболи) може да припаѓаат во три категории: функционални симболи (операции), релациони симболи и константи. На пример, јазикот на една алгебарска *група* е (+, =, 0), каде што „+“ е функционален, „=“ е релационен симбол, а „0“ е константа. Во алгебарскиот *прстен*, јазикот е даден со ({+,·}, = , {0,1}) и тој има еден функционален симбол, „·“ и една константа, „1“, повеќе од групата. Јазикот на графовите е даден со (∅, {R, =}, ∅), па се забележува дека тој нема функционални симболи и константи, што не треба да нè изненадува бидејќи двете универзални барања во теоријата на графови се однесуваат на утврдување дали две темиња од графот се соседни и дали се исти.

За да може да се користи, јазикот треба да биде интерпретиран во некоја структура, која може да ја сфатиме како дополнителна информација составена од универзум (множество) M и дефинирани функции, релации и константи на M со определена *арност* (опсег на дејство). При формирањето на искази, т.е. *зборувањето* на тој јазик користиме *сврзници*: „и“ $\wedge$, „или“ $\vee$, „не“ $\neg$, и *квантификатори* „постои“ $\exists$ и „за секој“ $\forall$. Дополнително на константите, постои и множество *променливи* кои немаат фиксна вредност и го претставуваат било кој елемент од универзумот на структурата.

Релациониот симбол = (’е еднакво на‘) е секогаш вклучен во формалниот јазик, со своето вообичаено значење. Но, кога разгледуваме математички објекти, честопати поимот „исто“ или „еднакво“ го заменуваме со „изоморфно“ или „еквивалентно“. Ова го правиме кога во некоја конкретна ситуација, она што е за нас важно е *обликот* или *однесувањето*, а не самите објекти. Така, за два ’објекти‘ велиме дека имаат својство на *изоморфност* ако во нив препознаваме ист облик (од старогрчки ἴσος – еднакво, μορφή – облик), а велиме дека се *еквивалентни* ако се однесуваат на ист начин (како да се работи за ист објект), во однос на некое својство или карактеристика. Изоморфизмот е биективно пресликување кое ги запазува релациите и константите. Што се однесува до еквивалентноста, овде ќе го користиме поимот на елементарна еквивалентност. Ќе нагласиме дека е возможно два објекти да не се изоморфни (да немаат ист облик), но да се еквивалентни (да се однесуваат идентично). Понатаму, ќе сметаме дека во даден контекст ние, на одреден начин или до одреден степен, не правиме разлика помеѓу објектите кои се меѓусебно изоморфни или еквивалентни.

По создавањето (дефинирање) на некоја структура, вообичаено следи прашањето: Дали усвоената дефиниција ја опишува таа структура *до изоморфизам*? Или еквивалентно: Дали структурата која ги задоволува дадените услови, е единствена? Ако е единствена, дали можеме да го ослабиме описот или условите? Или ако не е единствена, тогаш колку е добар тој опис? Во теоријата на модели и во математичката логика постои долга историја на проучување на овие прашања, а првиот исход е формирањето на класи од структури кои покажуваат исти својства или однесување. Посебно внимание е посветено на класифицирање на описите кои нема да доведат до единствено решение, на проучување на информациите кои се добиваат од овие описи, на различните еквиваленции меѓу структурите кои се послаби од изоморфизам (но се колку што е можно поблиску), на конструирање на силно еквивалентни неизоморфни модели и изнаоѓање на методи за утврдување на вакви *слаби* еквиваленции, кои под одредени услови може да водат кон единствен опис.

Од друга страна, потребни се методи за разликување меѓу структурите, таканаречени *инваријанти*, кои би биле математички едноставни, но сепак доволно силни за да ја овозможат класификацијата во одредена класа. Иако изоморфниот е најдобриот можен тип на инваријанти коишто се користат за ова цел, во многу случаи тие може да се пресилни. Истовремено, ако се покаже дека некоја силна инваријанта не разликува меѓу структурите во некоја структурна класа, тогаш е извесно дека секоја друга инваријанта која би правела разлика, ќе биде уште помоќна, [1].

И најпосле, тука е проблемот на изразување на логичкиот јазик кој сме го усвоиле. Прашањето на *експресивна моќ* е фундаментално за математичката логика. Интуитивно, две логики имаат иста експресивна моќ ако „можат да ги кажат истите работи“ – на пример, да ги дефинираат истите класи на структури. Од друга страна, експресивната моќ на една логика се огледува во нејзината способност да утврди дали две структури се исти или различни. За таа цел, потребен е опис на еквиваленција помеѓу структурите, која ќе важи во случаите кога тие се однесуваат исто во врска со формулите од таа логика. Попрецизно, проблемот на *експресибилност* (изразување) се однесува на следното: „За дадена класа *C* од реченици и класа *A* од структури, да се најдат својствата *P* на структурите од *A* кои може да се изразат со речениците од *C*“ [2]. Еве една упростена аналогија на проблемот на експресибилност. Да претпоставиме дека класата С е некоја колекција на *емотикони* (сликички кои искажуваат чувство или расположение), додека класата А е колекција од фотографии на лица (Слика 1). Прашањето е: *Дали постои чувство или расположение P кое е изразено на некоја од фотографиите во A, но не и со некој од емотиконите во C*? Ако одговорот е „не“, тогаш постои чувство кое е „експресибилно“ во С, но е истовремено „неекспресибилно“ во А.

Слика 1. Класа С (емотикони) и класа А (експресии на лице).

При испитувањата, од интерес се не само позитивните резултати како што е експресибилноста, туку и негативните (неекспресибилност). За покажување на позитивен резултат, доволно е да се најде одредена реченица од *C* и да се покаже дека таа го поседува својството *P* над дадената структурна класа *A*. Ова најчесто не е многу тешко. Од друга страна, за да се докаже негативен резултат, потребно е да се покаже дека не постои реченица од *C* која го искажува даденото својство над класата *A*. Бидејќи неретко *C* е бесконечна класа, ова значи дека доказот мора симултано да покаже дека ниту една од бесконечните реченични класи го запазува својството, што е огромна работа. За среќа, постојат најразлични алатки кои може да помогнат во докажувањето на неекспресибилност, како што се теоремата за компактност, теоремата за некомплетност на Гедел, теоремата на Ловенхајм-Сколем (Lowenheim-Skolem) и секако, игрите Еренфојт – Фрајсе. Сепак, ако класата *A* се состои само од конечни структури, тогаш игрите Еренфојт – Фрајсе може да се единствениот начин. Понатаму дискутираме за некои резултати и техники кои се корисни во употребата на Е-Ф игрите, посебно при олеснување на доказите за неекспресибилност.

2. ШТО СЕ Е-Ф ИГРИ?

Во 1930, Алфред Тарски го формулирал поимот на *елементарна еквивалентност* во *логиката од прв ред* која ни овозможува од основните да градиме покомплексни изрази, да искажуваме својства и релации. Имено, две структури *A* и *B* се елементарно еквивалентни, ако точно истите реченици кои се точни во *A*, се точни и во *B* (симболички, $A \vDash \varphi \Leftrightarrow B \vDash \varphi$). Поимот елементарна еквивалентност Тарски го претставил на конференција во Принстон во 1946, при што ја искажал својата надеж за развивање на теорија која ќе биде „длабока како поимите на изоморфизам и други, кои се сега во употреба“. Еден природен дел на ваквата теорија би бил чисто структурен потребен и доволен услов за елементарна еквивалентност на две структури. Првиот кој нашол употреблив потребен и доволен услов за оваа цел, бил Ролан Фрајсе (Roland Fraïssé, француско-алжирски математичар), во чија докторска дисертација е презентиран поголемиот дел од потребната теорија. Овој услов бил повторно откриен неколку години подоцна од казахстанскиот логичар Тајманов (Asan Dabsovich Taimanov), а бил формулиран со поимите на игри од полскиот логичар Анджеј Еренфојт (Andrzej Ehrenfeucht), денес познати како *Еренфојт – Фрајсе* или *напред – назад* игри. Се покажало дека тие се една од најразновидните идеи во логиката на дваесеттиот век, со способност за адаптирање на широк спектар од логики и структури. [5]

Иако Еренфојт – Фрајсе (Е-Ф) игрите всушност произлегле од потрагата по потребните и доволни услови за елементарна еквивалентност, благодарение на широката прилагодливост, нивната примена во логиката е мошне разновидна. Особено се корисни кога ќе наидеме на сложени, тешко разбирливи искази кои може да се преформулираат во вид на игра, со што се олеснува натамошната работа. Често се среќаваат во логичките списанија, а со нивната примена се придонесува за добивање на нови, но и на поинакви перспективи на веќе познати резултати. Инаку, се работи за интересни и едноставни (но не секогаш и лесно применливи) модели кои спаѓаат во класата на **комбинаторни игри**, т.е. игри со два играчи кои наизменично преземаат потези, имаат *совршена информација* (нема скриени елементи) и се *детерминистички* (нема механизми на случајност). Комбинаторната игра завршува кога еден од играчите не може да направи потег и тогаш тој губи, а истовремено другиот играч е победник. Кога играта е конечна, во неа не постои низа од потези која би можела да доведе до бесконечна игра, т.е. секоја можна комбинација на потези води до конечен исход. *Стратегија*та на еден играч ја изразуваме како функција од множеството на сите возможни комбинации на противнички потези, во множеството на сите можни сопствени потези. *Победничка* се нарекува секоја стратегија со чие користење, играчот секогаш победува, без разлика на тоа што го прави противникот. За играта велиме дека е *определена*, ако еден од играчите има победничка стратегија – во спротивно, таа е неопределена.

Како изгледа една вообичаена Е-Ф игра? Таа има двајца учесници кои овде ќе ги именуваме како Расипувач (анг. *spoiler*) и Повторувач (анг. *duplicator*). Расипувачот секогаш настапува прв, а неговата цел, како што укажува и името, е да го расипе планот на Повторувачот. Планот на Повторувачот, пак, се состои во што ’поверно‘ повторување (т.е. дуплирање) на она што го прави расипувачот.

На почеток, потребни се две структури во кои всушност и се одвива самата игра. Секоја структура е составена од *домен* (универзум) и на него дефинирани *константи*, *функции* и *релации*, заедно со соодветна *интерпретација*. Играчите се договараат за должината на играта т.е. бројот на рунди (една рунда се состои од по еден наизменичен потег на секој играч). Во секоја рунда, Расипувачот избира домен од кој бира еден елемент, по што Повторувачот бира елемент од другиот домен. Играчот кој не може да направи нареден потег ја губи играта, а другиот е победник.

Теоријата врз која се потпираат Е-Ф игрите користи мошне мал број логички претпоставки и оттука, тие се меѓу ретките техники кои успешно се користат како во конечните, така и во бесконечните структури. Како такви, можат да се вбројат меѓу темелниците на теоретската компјутерска наука, каде што се користат за мерење на експресивната моќ на формалните јазици. На пример, еден типичен резултат може да укажува дека некој јазик не може да разликува помеѓу поимите *парен* и *непарен*. Ова може да го утврдиме така што ќе изнајдеме, за секое ниво на комплексност n за формулите на јазикот, еден пар од конечни структури за кои Повторувачот има победничка стратегија во игра со n рунди, при што една од структурите има парен број елементи, а другата непарен.

Инаку, поимот структура којшто овде го користиме е прилично широк. На пример, структурите A и B може да бидат графови (да ги замислиме како две патни мрежи) па оттука, играта ќе биде прикажана со помош на нивните елементи. Играчите најизменично бираат од A и B, при што во n рунди ќе се формираат низи (да речеме, од населени места) $a_1,a_2,...,a_n$ од A и $b_1,b_2, \ldots,b_n$ од B. Ваквата состојба ќе претставува победа за Расипувачот ако зададената формула е задоволена од низата од A, но не и од низата од B или пак обратно, зависно од тоа која од A или B сме ја избрале. Така на пример, ако после 4 рунди темињата a_1, a_2, a_3, a_4 определуваат подграф на A со својство да постои раб (директен пат) помеѓу a_1 и секое од останатите темиња, но истовремено темето b_1 не е поврзано со некое од другите три темиња во подграфот b_1, b_2, b_3, b_4 на B, тогаш Расипувачот ќе победи во Е-Ф играта од 4 рунди дефинирана на A и B.

Да забележиме дека во игра со конечен број рунди (на пример, 4), Повторувачот (П) ќе оствари победа само ако Расипувачот (Р) не победи во ниту една од рундите 1, 2, 3 и 4. Специјално, во игра со 0 рунди победник е П. Доколку се работи за бесконечна игра, тогаш на П за победа му е потребно да не загуби во ниту една конечна фаза од играта (односно, во првите n рунди, за секоја вредност на n).

Во следниот пример, нека структурите се две целосно подредени множества A со 7 и B со 8 елементи, а Е-Ф играта $G_3(7,8)$ се состои од три рунди (n = 3) во кои се избира по еден елемент. Од секоја рунда ќе произлезе пар од елементи, по еден од A и B, при што првиот е избран од Р а вториот од П. На крајот од играта, ќе добиеме множества $\{a_1, a_2, a_3\}$ од A и $\{b_1, b_2, b_3\}$ од B (индексите ги означуваат рундите). Ќе сметаме дека победил П ако двете множества се исто подредени т.е. $a_1 < a_2$ ако и само ако $b_1 < b_2$, $a_2 < a_3$ ако и само ако $b_2 < b_3$, итн.

На пример, да претпоставиме дека Р и П бираат како на Слика 2. Анализирајќи ја оваа како и други почетни позиции на Р, ќе воочиме дека во оваа игра тој не може да го донесе П во позиција, во која П нема да може да го запази подредувањето на избраните елементи. Оттука, П ќе биде победник во $G_3(7,8)$. Но тоа нема да биде случај на пример, во играта $G_4(7,8)$ со четири рунди или пак во $G_3(5,6)$ со три рунди, каде Р има победничка стратегија.

$G_3(7,8)$	*A*								*B*							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
рунда 1				**П**									**Р**			
рунда 2		**П**									**Р**					
рунда 3			**П**									**Р**				

Слика 2. Илустрација на игра $G_3(7,8)$ за Р и П.

3. ДОКАЖУВАЊЕ НА (НЕ)ЕКВИВАЛЕНТНОСТ

Иако Е-Ф игрите вообичаено се користат како метод за мерење на моќта на изразување, тие се истовремено и флексибилен начин за споредување на структури. За да се искористи оваа компаративна моќ, потребно е да се дефинираат јасни услови со кои ќе се утврдат победничките стратегии на двата играчи.

Нека A и B се дадени структури и нека n е број кој ја определува должината на играта, т.е. е еднаков на бројот на рунди. Еренфојт –

Фрајсе (Е-Ф) игра со должина n помеѓу двајца играчи Расипувач (Р) и Повторувач (П) се игра според следните правила:

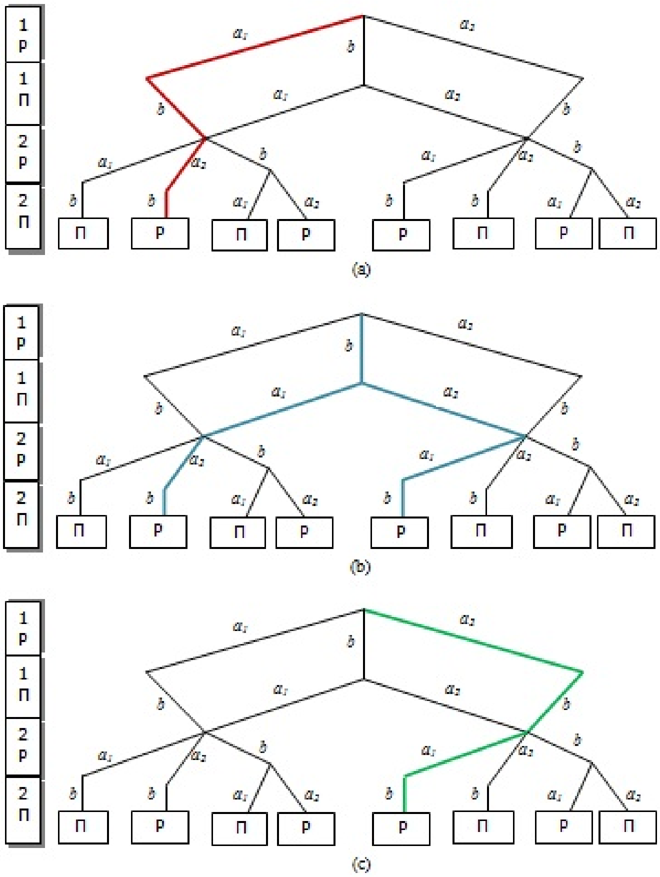
1. Исход (улоги, цел на играта)
   Р: „Структурите А и В се неизоморфни!“
   П: „Не е точно!“
- Нека $k < n$. Во потегот k:
- Р бира елемент $a_k \in A$ или $b_k \in B$;
- П одговара со бирање на елемент од другата структура, $b_k \in B$ или $a_k \in A$;
2. По n потези играта завршува. Кој ќе победи?
- Ако функцијата $a_n \to b_n$ е *парцијален изоморфизам* меѓу A и B, тогаш победува П. Во спротивно, ќе победи Р.
- Завршен услов: П го повторува потегот или во спротивно, не постои парцијален изоморфизам.

Споменатиот ’парцијален изоморфизам‘ е всушност изоморфизам, кој е ограничен на моменталното множество од слики, т.е. на *опсегот* на пресликувањето до ’моментот‘ k. Тој ги запазува дефинираните релации во структурите: ако постои релација помеѓу два елементи во првата структура, тогаш ќе постои и помеѓу нивните слики во втората.

Бидејќи времетраењето на играта може да се ограничи со претходно утврдување на бројот на рунди, потребно е и соодветно дефинирање на нејзиниот исход. Така, велиме дека еден играч има победничка стратегија во k потези, ако може да победи во рундата k без разлика како притоа ќе игра противничкиот играч. На пример, П има победничка стратегија во рундата k, ако секоја конфигурација на играта сè до последната претставува парцијален изоморфизам, независно од она што натаму ќе игра Р. Овде ќе нагласиме и дека *секогаш* постои победничка стратегија за Р или за П.

Победничките стратегии може да бидат целосно опишани со помош на *дрво на играта*. Ова е особено погодно кога се работи за структури со мал број елементи, како што се на пример структурите со домени $|\mathbf{A}| = \{a_1, a_2\}$ и $|\mathbf{B}| = \{b\}$. Во Е-Ф играта на Слика 3. опишана со нејзиното дрво од наизменични потези на Р и П во две рунди (прва

1Р, 1П и втора 2Р, 2П), постои победничка стратегија за Р во втората рунда.



Слика 3. Дрво на игра во две рунди (1Р,1П) и (2Р, 2П).
Р победува во секоја од варијантите (a), (b) и (c).

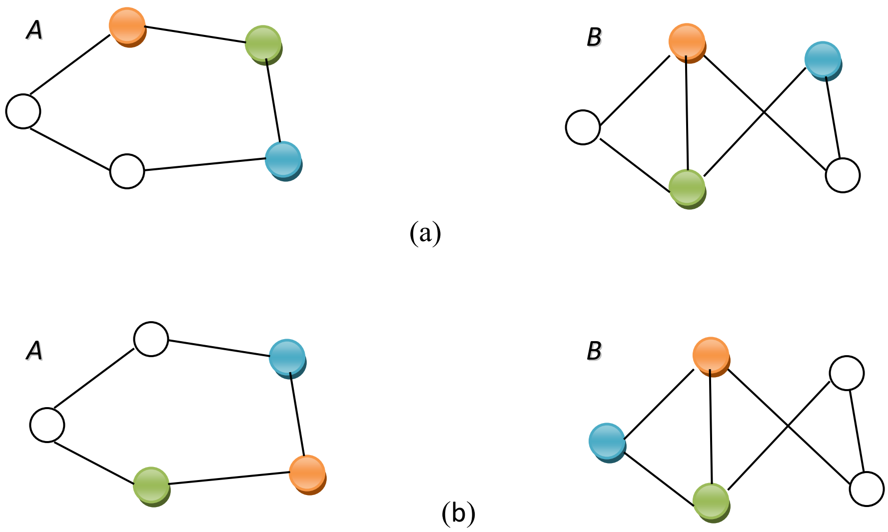
Колку долго трае една Е-Ф игра? Зависно од претходниот договор, таа може да биде:

– *ограничена*, ако бројот на рунди m кои се играат до крајот е фиксиран, што значи дека играта ќе заврши после m рунди;

– *неограничена*, ако се одвива сé додека П може да направи потег, или пак добиената конфигурација да не претставува парцијален изоморфизам.

Неограничените игри се корисни за споредување на конечни структури и се нарекуваат соодветно, *игри на споредување*, а длабочината (траењето) на неограничената игра се користи како *мерка за сличност* тие структури.

Да разгледаме уште еден пример, во кој структурите A и B се графови со по пет темиња, кои се различно поврзани (Слика 4). Во Е-Ф играта, Р има победничка стратегија во третата рунда – кој било нареден избор ќе води до неможност на П да одговори соодветно. Следствено, пресликувањето кое е генерирано до тој момент нема да претставува парцијален изоморфизам помеѓу A и B.



Слика 4. Две варијанти на Е-Ф игра на A и B
(*Секоја боја означува различна рунда.*)

Одредени својства по кои се разликуваат две структури, може да бидат искажани со помош на формулите на логиката од прв ред. Во врска со ова, Лајбниц (Gottfried Wilhelm Leibniz) имал едно интересно размислување за употребата на квантификаторите ∀ и ∃, како за играње на игра на предизвик и одговор. Имено, универзалниот квантификатор ∀ може да се посматра како поставување на предизвик од страна на едниот играч, дека тврдењето $\varphi(x, y)$ важи 'за секој објект x'. Другиот играч треба да одговори на предизвикот, наоѓајќи (∃) објект y за кој тврдењето $\varphi(x, y)$ нема биде точно. Во продолжение, ќе ја истражиме подлабоко оваа идеја.

4. ДОКАЖУВАЊЕ НА k – ЕКВИВАЛЕНТНОСТ

Експресивната моќ на логиката се мери преку нејзината способност да разликува меѓу различни структури, низ форми кои ги дозволува дадената семантика. Оттука, оценувањето на експресивната моќ на некоја логика се сведува на опишување на еквиваленција меѓу структурите, која важи ако тие не можат да бидат разликувани според формулите на таа логика. Но, наместо да се земат предвид сите формули кои би можеле да имаат улога во оваа еквиваленција, се бара нејзин опис кој ќе се однесува директно на алгебарските својства на структурата, па оттука, ќе биде полесен за работа. А кога логичкиот систем не може да разликува меѓу изоморфни структури, тогаш алгебарска формулација на логичката неразличност води до ослабување на изоморфизмот (или до самиот изоморфизам). [3]

Да претпоставиме дека при набљудување на две структури, во едната од нив забележуваме некое својство, која другата го нема. Следствено, сакаме да покажеме дека тие не се еквивалентни. Тогаш, Р ќе избере елемент од една од структурите (кој е дел од неговата победничка стратегија) така што за било кој елемент кој П би можел да го избере како одговор од другата структура, постои друг елемент во некоја од структурите кој Р може да го избере, така што што за било кој друг елемент кој П би можел да го избере како одговор од другата структура, постои друг елемент кој Р може да го избере итн., така што формулата која го искажува тоа својство е точна во едната, но неточна во другата структура. Значи, наместо да ги откриваме соодветните чекори за Расипувачот во Е-Ф играта, настојуваме да откриеме својство (искажливо во логиката од прв ред), кое го има само едната од овие структури.

Во ваквиот пристап, треба да ја имаме на ум врската која постои помеѓу комплексноста на формулата φ и бројот на изиграни рунди. Оваа комплексност се мери преку поимот на *квантификаторски ранг*. Имено, квантификаторскиот ранг $qr(\varphi)$ на формулата φ во логиката од прв ред ја претставува максималната *длабочина на дејство* на квантификаторите ($\forall$ или $\exists$) во φ. Ова всушност го изразува нивното *сместувачко* дејство, што е различно од бројот на квантификатори во една формула. Дефиницијата на квантификаторскиот ранг е индуктивна, т.е. важи:

$$qr(\forall x\, \varphi(x)) = qr(\exists x\, \varphi(x)) = qr(\varphi(x)) + 1.$$

Притоа, $qr(x = y) = 0$, $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$ и

$$qr(\varphi \wedge \psi) = qr(\varphi \vee \psi) = \max\left\{qr(\varphi), qr(\psi)\right\}.$$

На пример, формулата $\exists x\Big(\forall y\Big(E\big(x, y\big) \vee \exists z\big(E(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \wedge \neg(\mathrm{x} = \mathrm{z})\big)\Big)\Big)$ има квантификаторски ранг $k = 3$, што ќе го покажеме на следниот начин:

$$\begin{aligned}
& qr\left(\exists x[\forall y[E\left(x, y\right) \vee \exists z[E(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \wedge \neg(\mathrm{x} = \mathrm{z})]]]\right) = \\
& = 1 + qr\left([\forall y[E\left(x, y\right) \vee \exists z[E(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \wedge \neg(\mathrm{x} = \mathrm{z})]]]\right) = \\
& = 1 + 1 + \max\left(qr\left(E\left(x, y\right)\right), qr\left(\exists z[E(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \wedge \neg(\mathrm{x} = \mathrm{z})]]\right)\right) = \\
& = 1 + 1 + \max\left(0, 1 + \max\left(qr\left(E(\mathrm{y}, \mathrm{z})\right), qr\left(\neg(\mathrm{x} = \mathrm{z})\right)\right)\right) = \\
& = 1 + 1 + \max\left(0, 1 + \max(0, qr(\mathrm{x} = \mathrm{z}))\right) = \\
& = 1 + 1 + \max\left(0, 1 + \max(0, 0)\right) = \\
& = 1 + 1 + \max\left(0, 1 + 0\right) = 1 + 1 + 1 = 3.
\end{aligned}$$

Кога две структури *A* и *B* ги задоволуваат истите реченици со квантификаторски ранг *k*, велиме дека се *k*-еквивалентни и означуваме $A \equiv_k B$. Поинаку кажано, во однос на речениците со квантификаторски ранг *k*, овие структури се исти. Поимот на *k*-еквивалентност е поврзан со бројот на рунди во Е-Ф играта, кои треба да го одразуваат квантификаторскиот ранг на реченици со кои треба да се разликува помеѓу *A* и *B*. Тогаш, П сака да докаже дека $A \equiv_k B$ и со тоа, дека *A* и *B* не разликуваат помеѓу речениците со квантификаторска длабочина *k*, додека Р сака истото да го оспори.

Теорема 1. (Фрајсе 1950, Еренфојт 1960) *Две структури A и B се n – еквивалентни, ако Повторувачот (П) има победничка стратегија во n рунди на Е-Ф игра на A и B.* □

Да речеме дека *p* е некое својство кое е задоволено во *A* но не и во *B*, при што $A \equiv_k B$. Тогаш, *p* не може да се изрази со реченица чиј квантификаторски ранг е k. На пример, ако за структурите од Слика 5., својството кое го испитуваме е поврзаноста на две темиња односно, постоење на пат помеѓу нив, тогаш П ќе има победничка стратегија во третата рунда па оттука, важи $A \equiv_3 B$ во однос на формулата со квантификаторски ранг 3:

$$\exists x\, \exists y\, \exists z\, \left(x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x \wedge E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge E(z,x)\right),$$

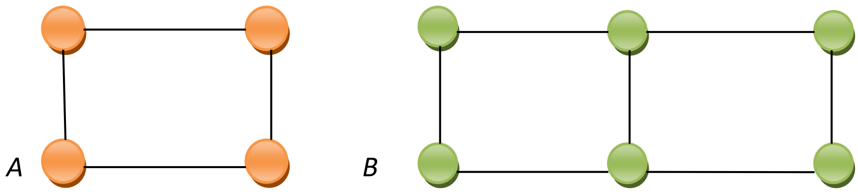
каде со E е означена релацијата на поврзаност.

Слика 5. Е-Ф игра со победничка стратегија за Р.
(*Секоја боја означува различна рунда.*)

Сега, ако во истата формула, релацијата E на „поврзаност" ја замениме со „соседност" на темиња т.е. постоење на директна линија помеѓу нив, тогаш добиваме својство кое важи во A, но не и во B. Ова може да се потврди и со победата на Р во третата рунда, која може да се обезбеди со бирање на три темиња во било која структура, по било кој редослед. Лесно може да се провери и дека овде, П нема победничка стратегија ниту за игра со две, ниту за игри со повеќе од 3 рунди. Според тоа, може да кажеме дека двете структури од Сликата 5. не се 3-еквивалентни.

Во примерот на Слика 6, структурите A и B се 2-еквивалентни. Но, внимателното набљудување ќе ни открие дека, на пример, во структурата B на десната страна постојат три различни темиња кои се пар по пар несоседни, што не е случај со ниту едно теме од A. Формулата φ која прецизно го опишува ова својство има ранг $qr(\varphi) = 3$ и гласи:

$$\exists x\, \exists y\, \exists z\, \left(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge \neg E(x,y) \wedge \neg E(y,z) \wedge \neg E(x,z)\right)$$



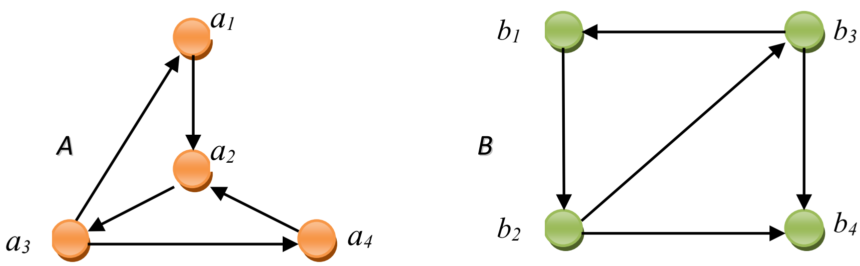
Слика 6. Нееквивалентни структури A и B

Во Е-Ф играта која е генерирана од оваа формула, Р ќе победи во 3 рунди со бирање на крајните темиња на еден од двата хоризонтални реда во *B*, и средното теме од другиот хоризонтален ред.

Еве уште еден пример, во кој *A* и *B* се *насочени графови* (Слика 7). Забележливо е дека во графот *A*, од секое теме излегува по една стрелка. Наспроти тоа, во графот *B* постои теме (b_4) од кое не излегува ниту една стрелка. Според тоа, може да формулираме својство кое ќе ја опишува ваквата разлика:

$$\exists x_1 \, \forall x_2 \, \neg E(x_1, x_2),$$

каде со *E* сега е дефинирана релацијата „постои пат од x_1 до x_2".



Слика 7. Нееквивалентни насочени графови *A* и *B*

Длабочината на оваа формула е 2, па во Е-Ф играта на *A* и *B*, Р ќе има победничка стратегија во две рунди. Во првата рунда, Р ќе го избере b_4, по што П треба да избере некое теме a_i од *A*. Во втората рунда, Р бира теме a_j ($j \neq i$) од *A*, за кое важи $E(a_i, a_j)$. Во овој момент Р победува, бидејќи П не може да најде теме b_k ($k \neq 4$) во *B* за кое би важело $E(b_4, b_k)$. Со други зборови, во втората рунда П не може да најде одговор со кој ќе го запази парцијалниот изоморфизам меѓу двата графа.

Размислувајќи во оваа насока, лесно ќе увидиме дека генерално, докажувањето на нееквивалентност на две структури е поедноставно од докажување на нивната еквивалентност. Ова се однесува и за случаите кога разгледуваме конкретни својства. Имено, од Теорема 1. произлегува тврдење со кое се утврдува пристапот кон покажување на неискажливост на некое својство во логиката од прв ред.

5. ДОКАЖУВАЊЕ НА (НЕ)ЕКСПРЕСИБИЛНОСТ

Е-Ф игрите може да се користат за изразување на експресивната моќ на формалните јазици. За да покажеме дека, на пример, некој јазик не може да разликува помеѓу *парен* и *непарен*, потребно е за секое ниво n на комплексност на формулите од тој јазик, да најдеме пар од конечни структури за кои П има победничка стратегија во n рунди, при што едната структура има парен а другата непарен број на елементи.

Постојат неколку причини поради кое е пожелно развивање на техники кои го олеснуваат докажувањето на неекспресибилност (неискажливост) на некое својство во рамки на одредена класа. Првата е добивање на поедноставни докази на веќе познати резултати, со што тие ќе станат поразбирливи и попристапни. Втората причина е овозможување на нови, подлабоки резултати за неекспресибилноста. Развојот на нови техники често пати може да ги постигне и двете цели.

За дадено својство τ, ќе заклучиме дека не постои реченица во логиката од прв ред која може да го изрази, ако за секое n може да се најдат структури A и B од дадената класа така што:

– τ е точно во A;

– τ е неточно во B;

– $A_n \equiv_n B_n$ т.е. П има победничка стратегија во Е-Ф игра на A и B од n рунди .

Важно е да се нагласи дека, ако Р има победничка стратегија во рундата k, тогаш ќе има победничка стратегија и во секоја наредна рунда, т.е. П не може да победи во ниту една рунда која следи после рундата k! Според тоа, оваа методологија ќе ја примениме така што ќе започнеме за најниските вредности ($k = 2$) и потоа напредуваме чекор по чекор, сé додека не најдеме победничка стратегија за Р – во тој момент, доказот за неекспресибилност е завршен.

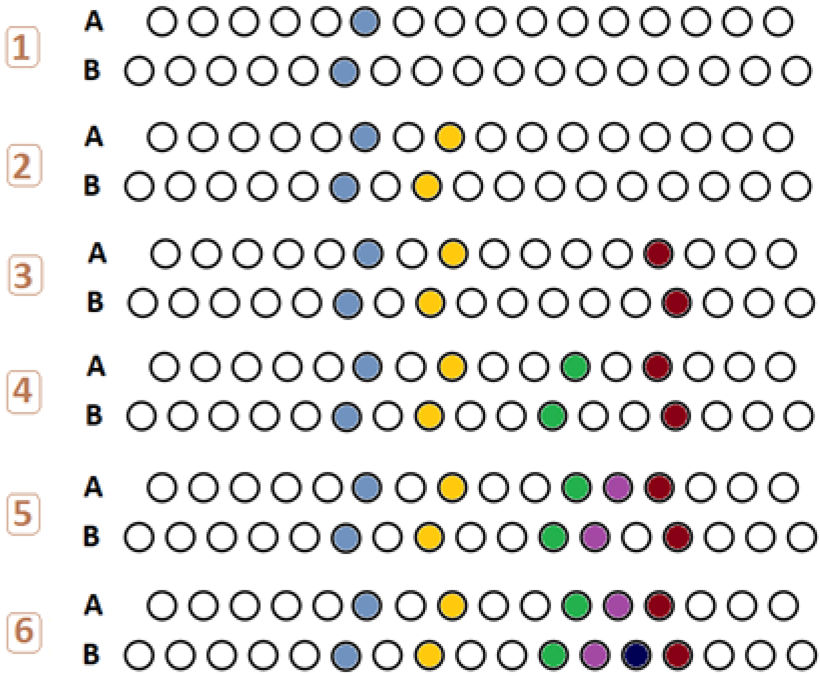
За да покажеме дека една класа (својство) може да се дефинира во дадена логика, треба едноставно во таа логика да ја напишеме формулата со која се дефинира конкретната класа. Но, како да покажеме дека истата класа *не може* да биде дефинирана во некоја логика, на пример во логиката од прв ред за која дискутираме? Ќе го разгледаме овој проблем на конкретен пример. Имено, во едно тврдење на Гуревич (Gurevich) од 1984, се вели: Секои две линеарни подреду-ва-ња чијашто кардиналност (број на елементи) е поголема или еднаква на 2^k , се k-еквивалентни. Оттука произлегува следното тврдење.

Теорема 2. *Класата на парни линеарни подредувања не може да се дефинира во логиката од прв ред.*

Доказ. Општо, за една класа велиме дека е *парна*, ако има парен број на елементи. Нека сега, φ е формула во логиката од прв ред која го дефинира својството на парност на линеарно подредување и нека $qr(\phi) = k$. Ако A и B се линеарни подредувања при што A има 2^k и B има $2^k + 1$ елементи, тогаш φ е точна во A, неточна во B и притоа, $A \equiv_k B$. Значи, φ ќе биде точна и во двете класи, иако едната има парен, а другата непарен број елементи.

Ќе го илустираме ова преку Е-Ф игра на линеарни подредувања A и B, доделувајќи победничка стратегија на П во рундата k. На Слика 8, класата A е парна со ($16 = 2^4$) а B непарна со ($17 = 2^4+1$) елементи. Во првите пет рунди, Р бира елемент од A а П од B. Во четвртата рунда, П е победник. Р овде победува во шестата рунда, откако го бира темно-синото топче од B, по што П не може да одговори соодветно т.е. да го запази подредувањето во A.

Сепак, П може да обезбеди победничка стратегија во произволна рунда ако подредувањата се доволно големи, и таа гласи: *Во рундата j, одржувај го растојанието меѓу избраните елементи не помало од* 2^{k-j}. Со тоа, претходниот заклучок ќе важи за формула φ со произволна квантификаторска длабочина.



Слика 8. Е-Ф игра меѓу подредувања со парен и непарен број елементи.

Оттука, заклучуваме дека експресивноста на логиката од прв ред не е доволно моќна за да разликува помеѓу парен и непарен број на елементи во линеарните подредувања. □

Во следниот пример, ќе покажеме дека својството на густа распореденост на елементите не може да се дефинира во логиката од прв ред, за класата на линеарни подредувања. За таа цел, ги користиме подредените структури на целите и рационалните броеви $(\boldsymbol{Z},<)$, $(\boldsymbol{Q},<)$ и формулата $\varphi \equiv \forall x_1\ \forall x_2\ \exists x_3\ \left(x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 < x_3 < x_2\right)$, со која се искажува својството дека елементите од едно подредување се *густо* распоредени т.е. меѓу секои два различни елементи постои трет кој е различен од нив. Со помош на Е-Ф игра, ќе покажеме дека таа важи во $(\boldsymbol{Q},<)$, но не и во $(\boldsymbol{Z},<)$. Бидејќи $qr(\varphi)=3$, Р има победничка стратегија во 3 рунди, а редоследот на потезите на Р и П се прикажани во Табелата 1.

Рунда	Играч	Структура	Потег	Формула
1	Р	$(\boldsymbol{Z},<)$	$x_1 = z$	$\forall x_2\ \exists x_3\ (z < x_2 \Rightarrow z < x_3 < x_2)$
	П	$(\boldsymbol{Q},<)$	$x_1 = q$	$\forall x_2\ \exists x_3\ (q < x_2 \Rightarrow q < x_3 < x_2)$
2	Р	$(\boldsymbol{Z},<;z)$	$x_2 = z+1$	$\exists x_3\ (z < z+1 \Rightarrow z < x_3 < z+1)$
	П	$(\boldsymbol{Q},<;q)$	$x_2 = q'$	$\exists x_3\ (q < q' \Rightarrow q < x_3 < q')$
3	Р	$(\boldsymbol{Q},<;q,q')$	$x_3 = q + \frac{q'-q}{2}$	$q < q' \Rightarrow q < q + \frac{q'-q}{2} < q'$
	П	$(\boldsymbol{Z},<;z,z+1)$	/	/

Табела 1. Тек на Е-Ф игра за φ, $(\boldsymbol{Z},<)$ и $(\boldsymbol{Q},<)$.

Во првите две рунди Р го бира $(\boldsymbol{Z},<)$ и броевите $z, z+1$. Истовремено, П мора да бира во $(\boldsymbol{Q},<)$ и притоа, мора да го избере q' т.ш. $q < q'$, во спротивно веднаш ја губи играта. Во третата рунда, Р го бира $(\boldsymbol{Q},<)$ и во него соодветно избран $x_3 = q''$. Сега, П не може да одговори, т.е. да најде $z' \in \boldsymbol{Z}$ така што да важи $z < z' < z+1$. Поинаку кажано, за било кој избран $z' \in \boldsymbol{Z}$, генерираното пресликување:

$$q \to z, \quad q' \to z+1, \quad q + \frac{q'-q}{2} \to z',$$

нема да биде е парцијален изоморфизам, бидејќи не го запазува подредувањето помеѓу елементите. Значи, Р е победник во третата рунда а П ја губи играта.

Постојат и други својства кои не можат да бидат дефинирани во логиката од прв ред, како што се *конечност*, *сврзливост*, *ацикличност*, *дофатливост* итн.

6. ПОВТОРНО, ЗА ИГРИТЕ И ЛОГИКАТА

Постојат многу начини на кои може да зборуваме за светот околу нас. Некои од нив ни овозможуваат да ги искажеме нештата на подобар начин од други, да размислуваме попрецизно, логички, *рационално*.

Секоја дискусија за рационалноста и за социјалните интеракции природно допира до неколку различни дисциплини и често пати, предизвикува различни размислувања. Ова е посебно воочливо кога ќе ги земеме предвид експериментите кои покажуваат како луѓето навистина се однесуваат во ситуации на игра.

Теоријата на игри е полна со длабоки загатки, кои се извор на чести несогласувања околу предложените решенија. Овие несогласувања не се ниту емпириски ниту математички, туку првенствено искажуваат загриженост околу значењето на фундаменталните концепти како што се решение, рационалност, комплетна информација, како и за цврстината на одредени аргументи. Оттука, логичкиот пристап се чини соодветен бидејќи се однесува директно на размислувањето, знаењето и спротиставеноста, како и поради неговата функција во утврдување на валидноста на аргументите. Притоа, различни логички рамки може да се користат во прецизирањето на важни поими, како што се знаењето и спротиставеноста, кои во анализите од теоријата на игри често се земаат неформално или имплицитно.

Па така, додека логичарите со векови ги користеле игрите во своите анализи, во последните децении оваа врска оди и во спротивната насока. Се прилагодуваат постоечките логички системи и се развиваат нови, со цел да се овозможи поинакво размислување за различните аспекти на една формална игра. Иако логичките методи во игрите ги потенцираат шемите на резонирање на еден идеализиран играч кој е ангажиран во одредено математичко размислување, ваквиот традиционален пристап сé повеќе се проширува, вклучувајќи елементи на една формална игра како што се рационална интеракција или проток на информации, притоа применувајќи ги традиционалните логички методи, [4].

На крајот, да се навратиме уште еднаш на игрите Еренфојт – Фрајсе: тие се меѓу малкуте методи кои може да се применат кај конечните структури, а со тоа и во многубројни проблеми од компјутерската наука. Ова веројатно се должи и на фактот што нивната примена е погодна и транспарентна кај релациони структури со *унарни* и *бинарни* релации, како што се графовите, линеарните и делумните подредувања, кои доминираат во многу области од компјутерската наука. Е-Ф игрите се згоден, флексибилен метод за определување на експресивната моќ на логичкиот формализам, а нивната примена е фокусирана на однесувањето на квантификаторите, опишувајќи ја на таков начин динамиката на формулите, [3].

E-F игрите може да бидат интересни и за љубителите на креативни, но ригорозни математички докази. Иако нивната применливост можеби нема да биде веднаш забележлива, долгорочно голем дел од нив ќе остварат практична вредност во одредени области, овозможувајќи подобри техники на моделирање кај комплексните системи. Добро е и притоа да се има на ум фундаменталното стојалиште од теоријата на модели, дека математичката вистина, како и секоја друга вистина, е релативна: едно тврдење може да биде точно или неточно, зависно од тоа како и каде се интерпретира. Сепак, ова не е последица од самата математика, туку од ’јазикот‘ кој се користи за интерпретирање на математичките идеи. Но она што е наизглед недостаток на јазикот, може најпосле да биде обликувано во моќно оружје за разбирање на математиката. Оттука, треба да се има на ум дека во овие игри не е важно да се победи, туку пред сé се важни начините на кои тие може да се играат.

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Fagin. *Easier Ways to Win Logical Games*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol.31, 1997

[2] R. Fagin, *Monadic generalized spectra*, Zeitschrift fur Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 21 (1975) 89 – 96

[3] W. Thomas, *On the Ehrenfeucht-Fraïssé game in theoretical computer science*, Proceedings of TAPSOFT'93: Theory and Practice of Software Development, CAAP 1993. Lecture Notes in Computer Science, vol 668. Springer, Berlin, Heidelberg, 1993

[4] E. Pacuit, *On the use (and abuse) of Logic in Game Theory*, J Philos Logic 44 (2015) 741–753

[5] Math Explorers' Club, Cornell Department of Mathematics | *Ehrenfeucht-Fraïssé Games* http://pi.math.cornell.edu/~mec/Summer2009/Raluca/index.html

[6] *Stanford Encyclopedia of Philosophy | Logic and Games*
https://plato.stanford.edu/entries/logic-games/

[1] Воена академија,
ул. Васко Карангелески бб, (1000) Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: nevena.serafimova@gmail.com

Примен: 5.4.2020
Поправен: 24.4.2020
Одобрен: 30.6.2020
Објавен на интернет: 14.7.2020