Similarly, we may show that

$$(3)\qquad \sum_{\varkappa=0} (-2)^{\varkappa} \binom{n+\varkappa}{\varkappa} \binom{k+1}{2n+\varkappa+1} = \binom{\frac{k}{2}}{n}, \text{ for } k \text{ even},$$
$$= 0 \quad , \text{ for } k \text{ odd}.$$

We perceive, that by a good choose the identity of the form (1), by the showed method, it is possible to get[2]) a great number of formulas of the kind (2) and (3).

REFERENCES

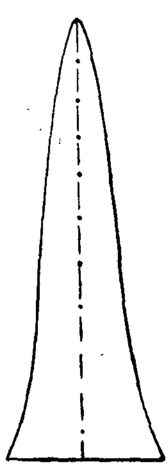
1. E. Grosswald, On sums involving binomial coefficients, The American Mathematical Monthly, vol. 60, p. 179 (1953).

2. E. Netto, Lehrbuch der Combinatorik, B. G. Teubner, Leipzig, 1927.

СТЕРЕОМЕТРИСКО ПРОУЧУВАЊЕ ТОЧНОСТА НА ПРОСТОТО И СЕКЦИСКОТО КУБИРАЊЕ НА ДРВНИТЕ СТЕБЛА

ИЛИЈА МИХАЈЛОВ

Надолжниот пресек на секое правилно дрвно стебло, кој што минува низ неговата надолжна оска, претставува правилна фигура, ограничена со две еднакви криви линии, симетрично расположени спрема оската на стеблото (види фиг. 1). Формата на тие линии ја одредуваат формата на стеблото, а со тоа — и неговиот волумен. Затоа тие линии ги викаме *формени криви на дрвното стебло.*



Фиг. 1

По својата форма, формените криви на стеблата личат многу на оние криви линии, што во математиката се познати под општиот назив *параболи*. Нивната општа равенка е

$$(1)\qquad y^2 = c\,x^r.$$

Во таа равенка параметарот r ја определува формата на кривата. Така, ако $r > 2$, кривата е испупчена спрема апсцисната оска, ако $r < 2$ таа е вдлабната, а ако $r = 2$, тогаш ќе имаме права во општа положбе, што излегува од координатниот почеток.

Ако завртиме една која и да е парабола околу апсцисната оска, таа ќе опише едно ротационо тело, наречено *параболоид*. Видот и формата на последниот зависи од видот и формата на параболата, што сме ја завртеле. Значи, константата r од равенката (1) ги определува не само видот и формата на параболата, туку го определува видот и формата на ротациониот параболоид, што се обележува при вртењето на параболата околу апсцисната оска. Зато таа константа ја викаме *формен показател*.

При $r=0$ равенката (1) го добива видот $y^2=c$, што претставува равенка на еден пар прави, паралелни на апсцисната оска. При нивното завртување околу таа оска, истите ќе опишат еден цилиндер. При $r=2$ имаме $y^2=cx^2$, што во сашност претставува равенка на еден пар прави во општа положба, кои што минуваат низ координатниот почеток. При нивното вртене околу апсцисната оска, тие опишуват конус. При вредности на r помеѓу 0 и 2 имаме испупчени параболоиди, а при $r>2$ вдлабнати.

Поради тоа, што дрвното стебло по својата форма личи на ротационите параболоиди, формулите за волуменот на некои од овие параболоиди најдуват примена за кубирање на стеблата.

Но треба да се подвлече, дека формата на дрвните стебла не е еднаква со формата на нито еден определен ротационен параболоид (со определен формен показател r), а поскоро претставува една сложена комбинација од сосема различни пресечени параболоиди, наставени еден на друг, чиј формен показател r варира во доста широки граници. Затоа, употребата на било која формула за волуменот на некој ротационен параболоид за кубирање на цели стебла или на делови од нив е сврзано со поголеми или помали грешки.

Од различните стереометриски формули, користени за кубирање на дрвните стебла, најширока, скоро исклучива примена во шумарската пракса најде т. н. *средно-површинската формула*, позната во шумарската пракса уште под името *Хуберова формула*. Таа гласи:

$$v=\frac{\pi}{4}\,d_{1/2}^{2}\,h=g_{1/2}\,h. \tag{2}$$

Тука h е должината на кубираното стебло, $d_{1/2}$ е дебелината (дијаметарот) му во неговата средина, т. е. при $h/2$, а $g_{1/2}$ е кружната површина, која одговара на $d_{1/2}$.

Во сашност таа формула претставува една формула за волуменот на целиот и пресечниот обикновен (Аполониев) параболоид, кој што има формен показател $r = 1$. Приложена за кубирање на дрвни стебла ова формула дава поголеми или помали грешки во зависност од тоа колку формата на целото стебло и на неговите делови се разликува од формата на Аполониевиот параболоид.

За да си составиме појасна претстава за величината на грешките, кој што ги дава формулата (2) при кубирањето на дрвните стебла, ние тука ќе установиме какви грешки дава оваа формула при употребата ѝ за определување волуменот на различните ротациони параболоиди (со различни вредносни на формениот показател r). Притоа, овие грешки ќе ги изразиме во проценти од вистинските волумени на соодветните параболоиди. Со други зборови, ќе установиме процентните грешки на формулата (2) при кубирањето на севозможните цели и пресечени параболоиди.

Прво ќе разгледаме процентните грешки при целите параболоиди.

Ако означиме со v вистинскиот волумен на кубираниот ротационен параболоид, а со v' — неговиот погрешен волумен, т. е. волуменот, определен со средно-површинската формула (2), тогаш апсолутната грешка на таа формули ќе биде

$$\Delta v = v' - v. \tag{3}$$

Означиме ли понатаму со p процентот на оваа грешка од вистинскиот волумен v, можеме да составеме пропорцијата

$$v : (v' - v) = 100 : p, \tag{4}$$

од која што следува

$$p = 100 \frac{v' - v}{v}. \tag{5}$$

Во таа равенка можеме да поставиме на местото на v' (погрешниот волумен) средно-површинската формула 2., а на местото на v (вистинскиот волумен) општата формула за волуменот на целите ротациони параболоиди

$$v = \frac{1}{r+1} \frac{\pi}{4} d_0^2 h, \tag{6}$$

во којашто d_0 е дијаметарот на параболоидот при неговата основа. Тогаш добиваме

$$(7)\qquad p = 100\,\frac{\frac{\pi}{4}\,d_{1/2}^2\,h - \frac{1}{r+1}\,\frac{\pi}{4}\,d_0^2\,h}{\frac{1}{r+1}\,\frac{\pi}{4}\,d_0^2\,h} = 100\left[\frac{(r+1)\,d_{1/2}^2}{d_0^2} - 1\right].$$

Согласно равенката (1) можеме да ја напишеме пропорцијата

$$\frac{d_{1/2}^2}{d_0^2} = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^r}{h^r},$$

од којашто следува

$$(8)\qquad d_{1/2}^2 = \frac{d_0^2}{2^r}.$$

Ако сега тоа значење на $d_{1/2}^2$ го замениме во равенката (7) добиваме

$$(9)\qquad p = 100\left(\frac{r+1}{2^r} - 1\right),$$

т. е. формулата за процентната грешка на средно-површинската формула при кубирањето на целите ротациони параболоиди со различни формени показатели. Од неа се гледа, дека процентната грешка p зависи само од r, т. е. само од видот на кубираниот ротационен параболоид.

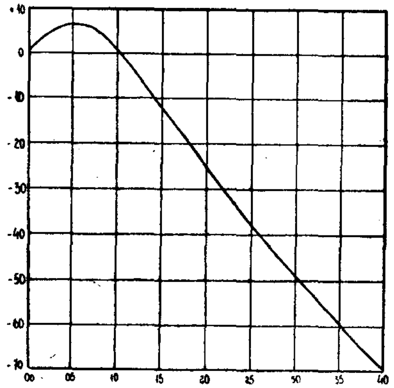
Според таа формула, процентната грешка на средно-површинската формула (2) при кубирање на некои цели ротациони параболоиди (со некои формени показатељи) се следните:

r	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
p	0,0	+4,5	+6,1	+5,6	+3,4	0,0	−4,0

r	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	4,0
p	−9,1	−14,2	−19,6	−25,0	−50,0	−68,8

Функционалната зависност помеѓу процентната грешка p и формениот показател r е покажана графички на фигура 2.

Од горните податоци и од фигура 2 се гледа, дека за $r=0$ и $r=1$, т. е. при цилиндерот и при Аполониевиот параболоид процентната грешка на средно-површинската формула (2) е нула. За сите значења на r помеѓу 0 и 1 процентната грешка е позитивна со максимална вредност околу 6,1%. За сите вредности на $r > 1$ процентната грешка е негативна, при кое што за $r=2$ (кон.) имаме $p = -25\%$, за $r=3$ (нејлоид) $p=-50\%$, за $r=4$ $p=-68{,}8\%$ и т. н.



Фиг. 2

Од сето тоа може да се заклучи, дека ако би дрвното стебло, општо земено, имало форма на Аполониев параболоид, тогаш кубирањето му со средно-површинската формула би било без погрешно. Но поради това што обично стеблото е помалку испупчено од Аполониевиот параболоид, а при долните си делови дури е вдлабнато, може да се заклучи, дека таа формула дава негативни грешки при кубирањето на дрвните стебла.

Како што наглосивме, средно-површинската формула (2) се употребува за кубирање и на обли делови од стеблото. За да видиме какви грешки дава таа формула во тој случај, ќе установиме какви грешки дава истата формула при определување со неа волумените на пресечните ротациони параболоиди.

И во тој случај ќе бидат установени процентните грешки и то по аналоген пат, како при целите ротациони параболоиди.

Така, ако во формулата (5) поставиме на местото на v' средно-површинската формула (2) а на местото на v општата формула за волуменот на пресечените ротациони параболоиди:

$$v = \frac{1}{r+1}\,\frac{\pi}{4}\left(\frac{d_0^2\,d_0^{2/r} - d_n^2\,d_n^{2/r}}{d_0^{2/r} - d_n^{2/r}}\right)h, \tag{10}$$

(каде што d_0 е дијаметарот на пресечениот параболоид при дебелиот му крај, а d_n — дијаметарот при тенкиот му крај), ќе добиеме

$$p = 100\,\frac{\dfrac{\pi}{4}\,d_{1/2}^2\,h - \dfrac{1}{r+1}\,\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{d_0^2\,d_0^{2/r} - d_n^2\,d_n^{2/r}}{d_0^{2/r} - d_n^{2/r}}\right)h}{\dfrac{1}{r+1}\,\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{d_0^2\,d_0^{2/r} - d_n^2\,d_n^{2/r}}{d_0^{2/r} - d_n^{2/r}}\right)h} = \tag{11}$$

$$= 100\left[\frac{(r+1)\, d_{1/2}^{2}\,(d_0^{2/r} - d_n^{2/r})}{d_0^2\, d_0^{2/r} - d_n^2\, d_n^{2/r}} - 1\right].$$

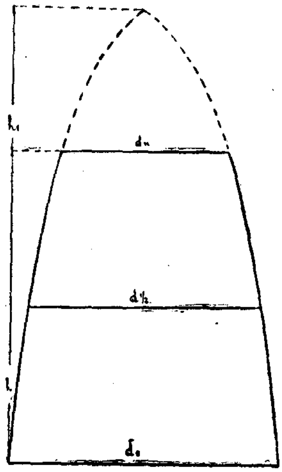
Ако просечениот параболоид, чија височина е h, крајни дијаметри d_0 и d_n и дијаметарот во средната му (при $h/2$) е $d_{1/2}$, го продолжиме до цел параболоид и со h_1 ја означиме височината на неговото продолжение (види фиг. 3), согласно равенката (1) и ознаките на фиг. 3, можеме да напишеме пропорциите:

$$\frac{d_n^{2/r}}{d_{1/2}^{2/r}} = \frac{h_1}{h_1 + \dfrac{h}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{d_n^{2/r}}{d_0^{2/r}} = \frac{h_1}{h_1 + h},$$

како и соодветните на нив пропорции

$$\frac{d_n^{2/r}}{d_{1/2}^{2/r} - d_n^{2/r}} = \frac{h_1}{h_1 + \dfrac{h}{2} - h_1} \quad \text{и}$$

$$\frac{d_n^{2/r}}{d_0^{2/r} - d_n^{2/r}} = \frac{h_1}{h_1 + h - h_1}.$$



Фиг. 3

Преку разделување на последните пропорции една на друга добиваме

$$\frac{d_0^{2/r} - d_n^{2/r}}{d_{1/2}^{2/r} - d_n^{2/r}} = 2,$$

од каде што следува

$$(12) \qquad d_{1/2}^{2} = \left(\frac{d_0^{2/r} + d_n^{2/r}}{2}\right)^r.$$

Ако понатаму тоа значење на $d_{1/2}^2$ го замениме во равенката (11), добиваме

$$(13) \qquad p = 100\left[\frac{(r+1)}{2^r}\cdot\frac{(d_0^{2/r} + d_n^{2/r})^r\,(d_0^{2/r} - d_n^{2/r})}{d_0^2\, d_0^{2/r} - d_n^2\, d_n^{2/r}} - 1\right].$$

Нека понатаму односот помеѓу крајните дијаметри d_0 и d_n го означиме со K, т. е.

$$\frac{d_0}{d_n} = k.$$

Тогаш ќе имаме $d_0 = kd_n$. Заместиме ли го сега тоа значење на d_0 во формулата (13) добиваме

$$(14)\quad p = \left[\frac{(r+1)}{2^r} \cdot \frac{(k^{2/r}\, d_n^{2/r} + d_n^{2/r})^r\, (k^{2/r}\, d_n^{2/r} - d_n^{2/r})}{(k^2\, d_n^2\, k^{2/r}\, d_n^{2/r} - d_n^2\, d_n^{2/r})} - 1\right] =$$

$$= 100\left[\frac{(r+1)}{2^r} \cdot \frac{(k^{2/r}+1)^r\,(k^{2/r}-1)}{k^{2+2/r}-1} - 1\right].$$

Таа равенка претставува формула за процентната грешка на средно-површинската формула (2) при употребата ѝ за кубирање на пресечени ротациони параболоиди.

Од формулата 14. се гледа, дека во тој случај процентната грешка зависи не само од формниот показател r, но и од крајните дијаметри d_0 и d_n на пресечениот параболоид, или поточно — од односот помеѓу овие дијаметри $\frac{d_0}{d_n} = k.$

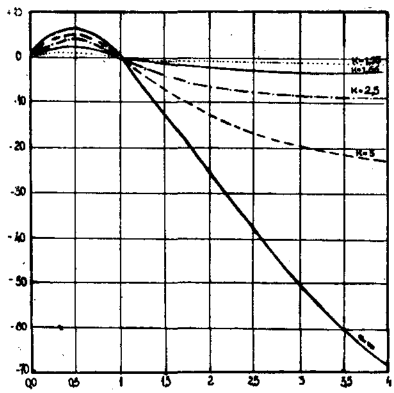
И таа формула при $r = 0$ и $r = 1$, т. е. при цилиндерот и при пресечениот Аполониев параболоид дава $p = 0\%$. За r помеѓу 0 и 1, вредностите на p се позитивни, а за $r > 1$ се негативни. Но апсолутните вредности на p при пресечените параболоиди се помали, од колку при соодветните цели параболоиди и то толку помали, колку односот помеѓу крајните дијаметри $\frac{d_0}{d_n}$ се приближува кон 1.

За да се даде појасна претстава за големините на p при формулата (14) на таблица 1 ги додавме пресметнатите величини на p при r рамно на: 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; и 4, и то при $\frac{d_0}{d_n} = k$ рамно на: $\frac{10}{8} = 1{,}25$; $\frac{10}{6} = 1{,}66$; $\frac{10}{4} = 2{,}5$; $\frac{10}{2} = 5$ и $\frac{10}{0} = \infty$.

$\frac{d_0}{d_n}$	k	Процентните грешки при формен показател r							
		0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
		+		—	—	—	—	—	—
10/8	1,25	0,75	—	0,29	0,41	0,49	0,55	0,59	0,61
10/6	1,66	2,92	—	1,33	2,04	2,48	2,77	2,98	3,13
10/4	2,5	5,04	—	3,62	5,77	7,11	8,07	8,74	9,25
10/2	5	5,98	—	7,43	12,90	16,70	19,38	21,35	22,87
10 0	∞	6,06	—	11,61	25,—	38,13	50,—	60,22	68,75

Дадените во неа броjеви ни покажуват функционалната зависност помеѓу p и формениот покрзател r при различни знaчења на $\frac{d_0}{d_n}$. Истата зависност е илустрирана графички на фигурата 5.

Од истата се гледа, дека кривата на процентната грешка при $\frac{d_0}{d_n} = \frac{10}{0} = \infty$, е кривата на процентната грешка при целите ротациони параболоиди. При другите вредности на $\frac{d_0}{d_n}$ кривите имаат слична форма, но се се послабо релефни, колку $\frac{d_0}{d_n}$ се приближува кон 1, а при $\frac{d_0}{d_n} = 1$ кривата на процентните грешки се слива со абсцисната оска.



Фиг. 4

Од кажаното до тука се гледа, дека процентната грешка p, која што ја дава средно-површинската формула (2) при кубирањето на пресечените ротациони параболоиди, ќе биде толку помала, колку големините на крајните дијаметри на пресечените параболоиди се поблизки помеѓу себе. Тоа се постигнува толку подобро, колку кубираниот пресечен параболоид е пократок. На таа чиненица се оснива така нареченото секциско кубирање на дрвните стебла, кога се бара поголема точност при тоа кубирање. Во тој случај стеблото мислено се разделува на нeкололко еднакво долги секции, кој што се кубираат оделно по средно-површинската формула (2) или општо за сите секции на стеблото — по т. н. секциска средно-површинска (Хуберова) формула

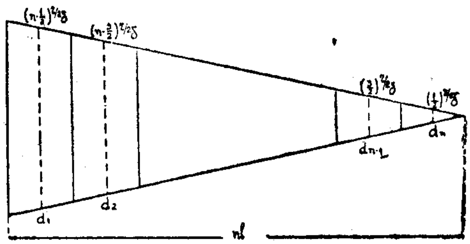
$$(15) \qquad v = \frac{\pi}{4} \left(d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2\right) l;$$

тука $d_1, d_2, \cdots d_n$ се дијаметрите во срединитe на секциите, а l е нивната еднаква должина.

Сега ќе разгледаме прашањето какви процентни грешки дава таа секциска фармула при кубирањето на ротационите параболоиди.

Нека земеме еден цел ротационен параболоид и да го разделиме на n секции со еднаква должина l (види ја фигурата 5).

Ако дијаметрите во срединитe на овие секции ги означиме со $d_1, d_2, \cdots d_n$, со δ, означиме основниот дијаметар на врвната секција, ние можеме дијаметрите d_1, d_2, $\cdots$ d_n да ги изразиме преку величините: n (бројот на секциите), δ (дијаметарот при основата на врвната секција, l (должината на секциите) и r (форменриот показател).



Фиг. 5

Согласно равенката (1) и ознаките на фигура 6 можеме да напишиме

$$\frac{d_1^2}{\delta^2} = \frac{\left(nl - \frac{l}{2}\right)^r}{l^r},$$

од каде што следува, дека

$$d_1^2 = \delta^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^r.$$

По истиот начин установуваме, дека квадратот од дијаметрите при средините на другите секции ќе бидат:

$$d_2^2 = \delta^2 \left(n - \frac{3}{4}\right)^r; \; d_3^2 = \delta^2 \left(n - \frac{5}{2}\right)^r; \; \cdots$$

$$\cdots \; d_{n-1}^2 = \delta^2 \left(\frac{3}{2}\right)^r \text{ и } d_n^2 = \delta^2 \left(\frac{1}{2}\right)^r.$$

Ако сега овие значења на квадратите од дијаметрите во средините на секциите ги заместиме во секциската формула (15), добиваме:

$$(16) \quad v = \frac{\pi}{4} \delta^2 \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)^r + \left(n - \frac{3}{2}\right)^r + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^r + \left(\frac{1}{2}\right)^r\right] l =$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{\delta^2}{2^r} [1^r + 3^r + \cdots + (2n-3)^r + (2n-1)^r] \, l.$$

Последната равенка во сашност претставува една измена на секциската средно-површинска формула (15) при која волуменот на параболоидот е изразен преку величините: n, δ, l, и r.

Со истите овие величини ние можеме да изразиме и вистинскиот волумен на целите ротациони параболоиди преку една измена на општата формула за тој волумен. Така, ако основниот дијаметар на целиот параболоид е d_0, тогаш согласно равенката (1) и ознаките на фигура 6 можеме да напишеме пропорцијата

$$\frac{d_0^2}{\delta^2} = \left(\frac{nl}{l}\right)^r,$$

од која што следува

$$d_0^2 = \delta^2 n^r.$$

Ако тоа значење на d_0^2 го поставиме во општата формула за вистинскиот волумен на целите параболоиди 6. и при тоа имаме предвид, дека $h = nl$, добиваме соодветно изменетета формула за вистинскиот волумен на целите параболоиди

$$(17) \qquad v = \frac{1}{r+1} \frac{\pi}{4} \delta^2 n^{r+1} l.$$

Нека сега да побараме формула за процентот на грешката, кој што дава секциската формула (15) при кубирањето на цели параболоиди. И во тој случај ќе излеземе од равенката (5) за процентната грешка. Сега на местото на v' ќе поставиме погрешниот волумен на параболоидот, установен по изменетата секциска средно-површинска формула (16), а на местото на v формулата за вистинскиот волумен (17). Тогаш ќе добиеме

$$(18) \quad P = 100 \frac{\frac{\pi}{4} \frac{\delta^2}{2^r} [1^r + 3^r + \cdots + (2n-1)^r]\, l - \frac{1}{r+1} \frac{\pi}{4} \delta^2 n^{r+1} l}{\frac{1}{r+1} \frac{\pi}{4} \delta^2 n^{r+1} l} =$$

$$= 100 \left\{ \frac{r+1}{2^r} \cdot \frac{[1^r + 3^r + \cdots + (2n-1)^r]}{n^{r+1}} - 1 \right\}.$$

Тоа е формулата за процентната грешка, која што ја дава секциската средно-површинска формула при кубирањето на цели ротациони параболоиди. Од таа формула се гледа, дека во тој случај процентната грешка зависи од форменот показател r (од видот на параболоидот) и од бројот на секциите n.

За $r = 0$ и $r = 1$, и формулата (18) дава $p = 0$. Тоа значи, дека секциската средно-површинска формула (15) употребена за определување волуменот на цилиндарот и на Аполониевиот цел параболоид дава безпогрешни резултати, исто како и простата средно-површинска формула (2).

За $r=2$, т. е. при целиот конус изразот, заграден со средни загради од формулата (18), има вредност

$$[1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2]=\frac{n(4n^2-1)}{3},$$

а самата формула станува

$$P=-\frac{25}{n^2}.$$

Това е процентната грешка на секциската средно-површинска формула при кубирањето на целиот конус. Кога се земе предвид, дека -25% е процентната грешка на простата средно-површинска формула 2. при кубирањето на целиот конус, следува да се зекључи, дека *процентната грешка на секциската средно-површинска формула P е еднаква на процентната грешка на соодветната проста формула p, која грешка е разделена со квадратот од бројот на земените секции,* т. е. $P=\frac{p}{n^2}$.

За $r=3$, т. е. при целиот нејлоид, изразот заграден со средни загради во формулата (18) добива вредност:

$$[1^3+3^3+\cdots+(2n-1)^3]=n^2\,(2n^2-1),$$

а самата процентна грешка во тој случај добива вредност

$$P=-\frac{50}{n^2}.$$

Ако и тука се земе предвид, дека — 50% е процентната грешка на простата средно-површинска формула при кубирањето на целиот нејлоид, следува заклучокот, дека и тука процентната грешка на секциската формула P е еднаква на процентната грешка на простата формула p, разделена со квадратот од бројот на земените секции, т. е. $P=\frac{p}{n^2}$.

Како логична последица од установеното при конусот и нејлоидот правило, следува уште следниот заклучок: Ако при кубирање на параболоидите со секциската средно-површинска формула при определен број на секциите несме задоволни од точноста и сакаме да ја уголемиме истата преку уголемување бројот на секциите, а преку тоа и со скратување должината на иститe, при уголемување бројот на секциите 2 пати, точноста се уголемува 4 пати, при уголемување бројот на секциите 3 пати, точноста се уголемува 9 пати и т. н.

Но сега се јавува прашањето: дали установеното при конусот и нејлоидот правило

$$P = \frac{p}{n^2}$$

важи при сите возможни параболоиди, т. е. за сите цели и дробни значања на r, или важи само за $r=2$ и $r=3$, а за останалите значења на r би важело правилото

$$P = \frac{p}{n^x}, \tag{19}$$

каде што показателот x е различен од 2. Најпрост и најлогичен одговор на тоа прашање би могло да се даје, ако заградениот со средни загради израз од формулата (18) би имал едно просто решение, каков што имавме при $r=2$ и $r=3$. Но поради тоа, што такво просто решение, до колку ни е познато, не постои, ние поставеното прашање го решивме преку установување големината на показател x од равенката (19) при конкретни параболоиди со различни формени показатели r.

Тоа установување одеше по следниот пат:

Од равенката 19. следува, дека

$$n^x = \frac{p}{P},$$

а од тука

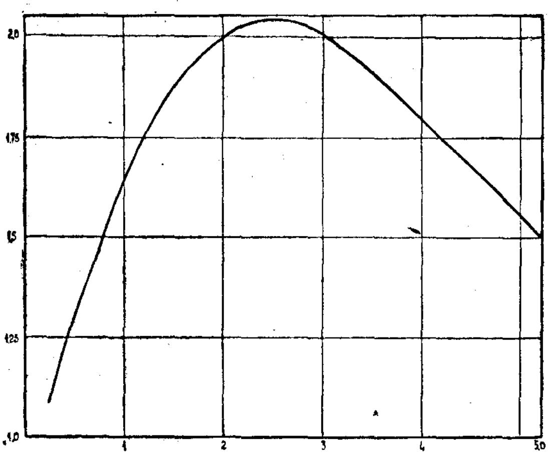
$$x = \frac{\log p - \log P}{\log n}, \tag{20}$$

По таа равенка пресметнавме големините на x. При тоа p го пресметнуваме по формулата 9. а P — по формулата (5) со конкретни примери.

Преку такви пресметувања установивме, дека големините на r при различни вредности на r се следните:

r	0,2	0,4	0,6	0,8	1,2	1,4		
x	1,08	1,23	1,38	1,51	1,77	1,82		
r	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6		
x	1,91	1,96	2,0	2,03	2,04	2,04		
r	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	5,0
x	2,03	2,0	1,96	1,93	1,89	1,84	1,79	1,51

Од тука се гледа, дека установеното правило при конусот и нејлоидот $P = \frac{p}{n^2}$ не важи при сите параболоиди, поради тоа, што степенот на n при другите параболоиди не е 2, а се менува во зависност од r. Се гледа, дека за $r < 2$ и ва $r > 3$ овој степен показател е помал од 2, а за r помеѓу 2 и 3 е малку поголем од 2. Самата зависност помеѓу r и x е покажена графички на фигура 6.



Фиг. 6

Ако се земе предвид, дека поголемиот дел од дрвните стебла имаат форма на параболоид со формен показател помеѓу $r = 0,8$ и $r = 4$ може да се прими, дека процентната грешка на секциската средно-површинска формула ќе биде таа, одредена по формулата 19. со вредност на x помеѓу 1,5 и 2,04 или грубо, средно земено околу 1,8.

Од направените тука проучувања дојдовме до заклучокот, дека при простото кубирање на дрвните стебла со средно-површинската формула, се прават негативни грешки. Такви грешки се прават и при кубирање на трупци, столбове и други обли дрвни материјали, но тука нивната апсолутна големина е во толку помала, во колку односот помеѓу крајните им дијаметри се приближува кон 1. При секциското кубирање грешките се пак негативни, но се во толку помали во колку $n^{1,8}$ (тука n е бројот на секциите) е поголем.

Сите овие заклучоци се потврдуваат од непосредните испитувања врз конкретни стебла преку мерење.

Il. Michajlov

ÉTUDE STÉRÉOMÉTRIQUE DE L'EXACTITUDE DU CUBAGE SIMPLE ET SECTIONNÉ DES TIGES DES ARBRES

(Résumé)

Les tiges des arbres ont une forme semblable à celle des paraboloïdes de rotation, dont les courbes formées se definissent par l'équation générale (1). Pour cela la plupart des formules consernant le volume de quelques paraboloïdes de rotation s'emploient pour le cubage des tiges des arbres. La formule la plus employée pour cette but c'est la formule de Huber (2).

Plus exactement elle s'emploie à évaluer le paraboloïde d'Apollonius antier et tronqué. Et comme la forme des tiges des arbres n'est pas identique à celle du paraboloïde d'Apolonius, mais elle varie dans les diverses parties de la tige, il s'en suit que la formule (2) donne des erreurs, lors du cubage des tiges. Pour déterminer quelles peuvent être ces erreurs l'auteur examine ici les erreurs que donne la même formule lors du cubage de différents paraboloïdes de rotation (avec diverses valeurs de r de l'équation 1).

Pour les paraboloïdes de rotation entiers l'erreur percentile de la formule (2) se détermine d'après la formule (9). La dépendance fonctionnelle entre l'erreur percentile p et l'exposant de la forme r est montrée graphiquement sur la fig. 2.

Pour les paraboloïdes de rotation tronqués l'erreur percentile se détermine d'après les formules (13) et (14). On y voit que l'erreur percentile ici dépend de l'exposant de la forme r et du rapport entre les diamètres extrêmes du paraboloïde moyen $\frac{d_v}{d_n} = K$. Les grandeurs de ces erreurs sont montrées sur le tableau 1 et la fig. 4.

Pour l'augmentation de la précision lors du cubage de la tige on emploie la formule de la section moyenne de surface (15), dans laquelle la tige est partagée fictevement en sections de longueurs égales.

Cette formule donne, lors de la determination du volume du paraboloïde de rotation, des erreurs dont la grandeur se détermine par la formule (19).

Dans la dernière formule p est l'erreur percentile de la formule simple de surface moyenne pour le paraboloïde entier correspondant, n est le nombre de sections prises, et x est le paramètre changeant qui dépend de r. Sa grandeur dans les tiges des arbres est environ 1,8.