Мат. Бил. 7-8 (XXXIII-XXXIV),
1983-1984, (6-9),
Скопjе, Југославија

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.М. Эйшинский

Д.С.Митринович [1,2,3], Б.С.Попов [4], И.А.Шапкарев [5] рассмотрели необходимые и достаточные условия интегрируемости в квадратурах уравнений

$$y'' + (\alpha x+\beta)y' + (Ax^2+Bx+C)y = 0, \tag{1}$$

$$y'' + (\alpha e^{bx}+\beta)y' + (Ae^{2bx} + Be^{bx} + C)y = 0. \tag{2}$$

Покажем, что дифференциальные уравнения (1) и (2) интегрируются в конфлюэнтных гипергеометрических функциях.

I. Подстановка

$$y = y_1 \cdot \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{4} - \frac{\beta x}{2}\right) \tag{1.2}$$

преобразует дифференциальное уравнение (1) к виду

$$y_1'' + \left(A - \frac{\alpha^2}{4}\right)\left[\left(x + \frac{B - \frac{\alpha\beta}{2}}{2\left(A - \frac{\alpha^2}{4}\right)}\right)^2 + C - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta^2}{4} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\left(\frac{B - \frac{\alpha\beta}{2}}{A - \frac{\alpha^2}{4}}\right)^2\right]y_1 = 0. \tag{1.3}$$

Обозначим

$$C - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta^2}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{B - \frac{\alpha\beta}{2}}{A - \frac{\alpha^2}{4}}\right)^2 = R.$$

Если, $R = 0$, то уравнение (1) интегрируется в Бесселевых функциях.

Подстановка

$$\left(x + \frac{B - \frac{\alpha\beta}{2}}{2\left(A - \frac{\alpha^2}{4}\right)}\right)^2 = S \tag{1.4}$$

преобразет дифференциальное уравнение (1.3) к виду

$$\frac{d^2y_1}{dS^2} + \frac{1}{2S}\frac{dy_1}{dS} + \left(\frac{A - \frac{\alpha^2}{4}}{4} + \frac{R}{4S}\right)y_1 = 0. \qquad (1.5)$$

Подстановка

$$y_1 = y_2 \cdot S^{-1/4} \qquad (1.6)$$

преобразует дифференциальное уравнение (1.5) к виду

$$\frac{d^2y_2}{dS^2} + \left(\frac{A - \frac{\alpha^2}{4}}{4} + \frac{R}{4S} + \frac{3}{16S^2}\right)y_2 = 0. \qquad (1.7)$$

С помощью (1.7)

$$y = \exp\left\{-\frac{\alpha x^2}{4} - \frac{\beta x}{2} - \frac{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - A}}{2}\left(x + \frac{B - \frac{\alpha\beta}{2}}{2(A - \frac{\alpha^2}{4})}\right)^2\right\} \times$$

$$\times\left[C_1\Phi\left(\frac{3}{4} + \frac{R\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - A}}{4}, \frac{3}{2}, \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - A}\left(x + \frac{B - \frac{\alpha\beta}{2}}{2(A - \frac{\alpha^2}{4})}\right)^2\right) + \right.$$

$$\left. + C_2\Psi\left(\frac{3}{4} + \frac{R\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - A}}{4}, \frac{3}{2}, \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - A}\left(x + \frac{B - \frac{\alpha\beta}{2}}{2(A - \frac{\alpha^2}{4})}\right)^2\right)\right].$$

Φ, Ψ – конфлюэнтные гипергеометрические функции [6].

II. Подстановка

$$y = \exp\left(-\frac{\alpha}{2b}e^{bx} - \frac{\beta}{2}x\right) \cdot y_1 \qquad (2.1)$$

преобразует дифференциальное уравнение (2) к виду

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + \left[(A - \frac{\alpha^2}{4})e^{2bx} + (B - \frac{\alpha b}{2} - \frac{\alpha\beta}{2})e^{bx} + \right.$$
$$\left. + C - \frac{\beta^2}{4}\right]y_1 = 0. \qquad (2.2)$$

Если $A - \frac{\alpha^2}{4} = 0$, то дифференциальное уравнение (2.2) интегрируется в Бесселевых (в частности, в элементарных) функциях.

$$A - \frac{\alpha^2}{4} \neq 0.$$

Подстановка

$$e^{bx} = z (b > 0) \qquad (2.3)$$

преобразует дифференциальное уравнение (2.2) к виду

$$\frac{d^2y_1}{dz^2} + \frac{1}{z}\,\frac{dy_1}{dz} + \left[\frac{A - \frac{\alpha^2}{4}}{b^2} + \frac{B - \frac{\alpha b}{2} - \frac{\alpha\beta}{2}}{b^2 z} + \frac{C - \frac{\beta^2}{4}}{b^2 z^2}\right] y_1 = 0. \tag{2.4}$$

Подстановка

$$y_1 = y_2 \cdot z^{-1/2} \tag{2.5}$$

преобразует дифференциальное уравнение (2.4) к видув

$$\frac{d^2y_2}{dz^2} + \left[\frac{A - \frac{\alpha^2}{4}}{b^2} + \frac{B - \frac{\alpha b}{2} - \frac{\alpha\beta}{2}}{b^2 z} + \frac{\frac{C - \frac{\beta^2}{4}}{b^2} + \frac{1}{4}}{z^2}\right] y_2 = 0 \tag{2.6}$$

Как и в пункте I, получаем:

$$A - \frac{\alpha^2}{4} < 0, \quad y = \exp\left\{e^{bx}\left(-\frac{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - A}}{b} - \frac{\alpha}{2b}\right) + \frac{x}{2}\left(\sqrt{\beta^2 - 4C} - \beta\right)\right\} \times$$

$$\times \left[C_1 \Phi\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4C}}{2b} - \frac{B - \frac{\alpha b}{2} - \frac{\alpha\beta}{2}}{2b\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - A}} + \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{\beta^2-4C}}{b} + 1,\ \frac{2\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - A}}{b}\, e^{bx}\right) + \right.$$

$$\left. + C_2 \Psi\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4C}}{2b} - \frac{B - \frac{\alpha b}{2} - \frac{\alpha\beta}{2}}{2b\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - A}} + \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{\beta^2-4C}}{b} + 1,\ \frac{2\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - A}}{b}\, e^{bx}\right)\right].$$

Критерии [1-5] теперь дают возможность выразить конфлюэнтные метрические функции через кдаврaтуры .

Литература

[1] Д.С.Митринович: Поступак за формирање критериjума интеграбилитета линеарних диференциjалних jедначина чиjи коефициjенти имаjу облике унапред дате. Faculté de philosophie de l'Université de Skopje. Section des sciènces naturelles 2(1949), 165-182.

[2] D.S.Mitrinović: Sur un cas de reductibilité d'equations differentielles lineaires. C.R.Acad.Sci.Paris 230(1950), 1130-1132.

[3] D.S.Mitrinović: Sur un procede fournissant des equations differentielles lineaires integrables d'un type assigne d'avance. Publ. Inst. Math. (Beograd) 3(1950), 227.

[4] B.S.Popov: Formation des criteriums de reductibilité des equations differentielles lineaires ayant des formes donnes a l'avance. Faculté de philosophie de l'Université de Skopje. Section des sciences naturelles 5(1952).

[5] I.A.Šapkarev: Sur une classe d'equations differentielles lineaires du deuxieme ordre resolubles par quadratures. "Математички весник" 6(21), 1969, 335-338.

[6] Е.Янке, Ф.Эмде, Ф.Лёш: Специјальные функции. ИЛ, Москва, 1968.