ЗА ЕДНА МЕТОДА НА ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ОПРЕДЕЛЕНИТЕ ИНТЕГРАЛИ ОД РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ СО ПОМОШ НА СУМИ ОД КОНЕЧЕН БРОЈ ЧЛЕНОВИ

Драган Димитровски

I. УВОД

Во литература по математичка анализа и по теорија на функциите од комплексна променлива ([1], [2], [3], [4] итн.) како примена на сметањето со остатоците при аналитичките функции е дадена метода за пресметување на определените интеграли од облик

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$$

каде R (x) е рационална функција таква интегралот (1) да има смисол.

Таа метода се состои во примената на сметањето со остатоците врху линискиот интеграл

(2) $$\int_{\Gamma} R(z)\,dz$$

каде што Γ е контурата составена од полукружната линија

$$\Gamma_1\colon\ |z| = R,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi,$$

и нејзиниот дијаметар

(3) $$\Gamma_2\colon\ -R \leqslant x \leqslant +R,\ y = 0.$$

Докажувајки да е

(4) $$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_1} R(Re^{i\theta})\,Re^{i\theta}\,i\,d\theta = 0,$$

се добива познатата формула за овој вид несвојствени интеграли

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum B_k \tag{5}$$

каде што ΣB_k е збир на остатоците на функцијата $R(z)$ за половите кои се наоѓаат во горната полурамнина.

Оваа метода има тој недостаток што позволува пресметување на интеграли само од облик $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$ т. е. на несвојствени во смисол на бесконечни граници, додека ништо не кажува за интеграли од рационални функции во произволни конечни граници, т. е. за интеграли од рационални функции од облик

$$\int_a^b R(x)\,dx \tag{6}$$

Славиша Прешиќ преку еден пример во [5] даде идеја да е можно сметањето со остатоците да се примени при пресметувањето на произволен определен интеграл од рационална функција, меѓутоа таму недостасува доказ за општ случај. Во оваа работа се покажува да е можно секој определен интеграл (па и неопределен, ако една граница се смета за променлива) да се пресмета со помош на една сума од конечен број остатоци од една соодветна аналитичка функција, за која постапка не сме нашле трагови во широко познатата литература.

Познатите до денес методи за егзактно пресметување на определените интеграли од рационални функции, заедно со бројни методи на приближно интегрирање, се сметаат за доволни да ни го дадат определениот интеграл од рационална функција со произволна точност. Покрај тие општи методи на интегрирање, за одделни класи функции можни се поспецијални методи кои пресметувањето во многу го олеснуваат и имаат предност пред останалите.

Во оваа работа ние ќе дадеме една општа метода за пресметување на определени интеграли од рационални функции во произволни конечни граници. Оваа метода ќе се покаже особено полезна при пресметувањето на оние класи интеграли од функции кои задоволуваат извесни услови (дадени во примената), а за кои другите методи се недоволно ефикасни.

II. ТЕОРЕМА

Нека е $R(x)$ нейрекинаша рационална функција на $[a, b]$. Тоїаш е

$$\int_a^b R(x)\,dx = -4(b-a)^2 \sum Res\left\{\frac{z\,lnz}{[1+(b-a)z^2]^2}\,R\left[\frac{a(b-a)z^2+b}{1+(b-a)z^2}\right]\right\} \tag{7}$$

каде $\Sigma\, Res\, F(z)$ означуђа збир на осшашоциише на функцијаша ğадена со (13) *за синїулариѿеѿиѿе ђо їорнаѿа ѿолурамнина.*

Доказ. Нека е во најопшт случај рационалната функција

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \tag{8}$$

каде $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ се полиноми од реалната променлива x и од степени респективно n и m; ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$); т. е.

$$P_n(x) = \sum_{k=o}^{n} a_k x^k, \quad Q_m(x) = \sum_{l=o}^{m} b_l x^l. \tag{9}$$

Овде условот функцијата (8) да е непрекината на $[a, b]$ бара полиномот $Q_m(x)$ да нема реални нули на $[a, b]$. Да го проучиме сега пресликувањето $x = \varphi(t)$ определено со

$$x = \frac{a(b-a)t^2 + b}{1 + (b-a)t^2} \tag{10}$$

Тоа има особина целата бројна t-оска $(-\infty, +\infty)$ да ја преслика на сегментот $[a, b]$ од x-оската. Оттука произлегува дека множествата на вредностите што ги примаат функциите

$$Q_m\left[\frac{a(b-a)t^2+b}{1+(b-a)t^2}\right] \text{ и } Q_m(x)$$

респективно во интервалите $(-\infty, +\infty)$ и $[a, b]$, се идентични. Тоа значи да ако $Q_m(x)$ нема нули на $[a, b]$, тогаш ни $Q_m[\varphi(t)]$ нема реални нули по целата t-оска. т. е. функцијата

$$R\left[\frac{a(b-a)t^2+b}{1+(b-a)t^2}\right] \tag{11}$$

е непрекината.

Лесно може да се провери дека реалните нули на $Q_m(x)$ надвор од $[a, b]$ се пресликуваат во парови имагинарни нули на $Q_m[\varphi(t)]$ а пак комплексните нули на $Q_m(x)$ во комплексни корени на $Q_m[\varphi(t)]$. Од друга страна, со непосредна замена на (10) во (8) се уверуваме, каква и да е рационалната функција (8), т. е. какви и да се степените на полиномите (9), рационалната функција (11) има еднакви највисоки степени на броителот и именителот, рамни на $2m + 2n$.

Нека сега во интегралот (6) ја извршиме смената на променливата (10). Од непрекинатоста на $R(x)$ на $[a, b]$ и од монотоноста и непрекинатоста на (10) следува точноста на равенството

$$\int_a^b R(x)\,dx = 2(b-a)^2 \int_o^{+\infty} \frac{t}{[1+(b-a)t^2]^2} \; R\left[\frac{a(b-a)t^2+b}{1+(b-a)t^2}\right] dt. \tag{12}$$

Ќе покажеме сега дека десната страна на (12) може да се пресмета преку остатоци. Во таа цел ке формираме една функција од комплексна променлива z, $F(z)$, на следниот начин:

$$F(z) = \frac{z \ln z}{[1 + (b-a) z^2]^2} \; R\left[\frac{a(b-a) z^2 + b}{1 + (b-a) z^2}\right] \tag{13}$$

и ќе го земеме интегралот од функцијата (13) по контурата G составена од: а) полукружната линија која лежи во горната полурамнина и чии радиус R е доволно голем да ги опфати сите сингуларитети на (11), а центарот и е во координатниот почеток; б) од деловите на реалната оска кои се дијаметар на спомнатиот полукруг; и ц) од мал полукружен лак со радиус $r < R$ кој ја изолира есенцијалната сингуларна точка $z = 0$.

Поради непрекинатоста на (11) по целата t-оска, како и поради конечниот број на сингуларитети на (11), за R доволно големо функцијата (13) е аналитичка на контурата G, па за неа тогаш важи Cauchy-евата теорема за сметањето со остатоците

$$\int_G F(z)\, dz = 2\pi i. \sum_{bo\; G} Res\, F(z)$$

Ако контурата G ја разбиеме на нејзини глатки делови, добиваме збир од линиски интеграли:

$$\int_r^R F(x)\, dx + \int_0^\pi F(Re^{i\theta})\, Re^{i\theta}\, i\, d\theta + \int_R^r F(e^{\pi i} x)\, e^{\pi i}\, dx + \int_\pi^0 F(re^{i\theta})\, re^{i\theta}\, i\, d\theta = \tag{14}$$

$$= 2\pi i \sum_{bo\; G} Res\, F(z).$$

Може да се покаже дека вториот и четвртиот интеграл во сумата на левата страна од (14) тежат кон нула при граничните процеси $R \to \infty$ и $r \to O$. Навистина, со оглед на тоа што (11) има исти степени во броителот и именителот, тоа почнувајќи од некое R доволно големо по полукруговите $|z| = R$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, аналитичната функција

$$R\left[\frac{a(b-a) z^2 + b}{1 + (b-a) z^2}\right]$$

има ограничен модул, т. е. постои некое M такво да важи

$$\left| R\left[\frac{a(b-a) z^2 + b}{1 + (b-a) z^2}\right]\right| < M,$$

Со оглед на тоа за вториот интеграл во (14) брзо ја добиваме следната мајоранта

$$\left| \int_{0}^{\pi} F(Re^{i\theta})\, Re^{i\theta} i\, d\theta \right| < \frac{M\pi R(\ln R + 2\pi)}{[(b-a)R^2-1]^2} \to 0, \quad R \to \infty$$

На сличен начин може да се покаже дека логаритамската сингуларна точка $z = 0$ не влијае врху интегралот (14) кога $r \to 0$. За четвртиот интеграл од (14) ја имаме следната мајоранта:

$$\left| \int_{\pi}^{0} F(re^{i\theta})\, re^{i\theta} i\, d\theta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{0}^{\pi} \left| \frac{|re^{i\theta}| \cdot |\ln r + i\theta|}{|[1+(b-a)r^2e^{2\theta i}]^2|} \right| \left| R\left[\frac{a(b-a)r^2e^{2\theta i}+b}{1+(b-a)r^2e^{2\theta i}}\right] \right| r d\theta$$

$$\leqslant \frac{r(|\ln r| + \pi)}{[1-(b-a)r^2]^2} \left| \frac{\Sigma A_k r^k}{\Sigma B_v r^v} \right| \cdot r \int_{0}^{\pi} d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r^2(|\ln r| + \pi)\pi}{[1-(b-a)r^2]^2} \cdot \frac{|A_{2n}|\, r^{2n} + |A_{2n-1}|\, r^{2n-1} + \cdots + |A_1|\, r + |A_0|}{|B_0| - |B_1|\, r - \cdots - |B_{2m}| \cdot r^{2m}}$$

$$\to \frac{|A_0|}{|B_0|} r^2 (|\ln r| + \pi)\pi \longrightarrow 0, \ r \longrightarrow 0.$$

Наведените гранични процеси применети во (14) даваат:

$$\int_{0}^{+\infty} F(x)\, dx + \int_{+\infty}^{0} F(e^{\pi i} x)\, d(-x) = 2\pi i \sum_{\text{во } G} Res\, F(z).$$

Ако на негативната x-оска ја земеме вообичаената детерминација на функцијата $\ln z$: $\ln(-x) = \ln x + \pi i$, тоа со оглед на (13) од последното равенство би добиле:

$$-\pi i \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{[1+(b-a)x^2]^2} R\left[\frac{a(b-a)x^2+b}{1+(b-a)x^2}\right] dx = 2\pi i \sum_{\text{во } G} Res\, F(z)$$

од каде, со оглед на (12), следува (7).

Со тоа точноста на теоремата е докажана.

III. ПРИМЕНА

Суштината на методата е очевидно во супституцијата (10) и во сумирањето на остатоците на (13). Како (13) содржи една општа рационална функција, тоа овде е битно прашањето на пресметувањето на остатоците, т. е. определувањето на половите на (13), или на нулите на полиномот $Q_m(x)$ од (9). Но ако се знаат нулите од именителот на $R(x)$, тогаш и други методи се ефикасни, напр. примитивна функција. Следователно оваа метода е рамноправна со методата на примитивна функција, ако се познати нулите на именителот, и доведува до исти потешкотии како и другите методи, ако нулите не се познати.

Изложената метода очевидно не е најповолна за пресметување на определени интеграли од цели рационални функции (полиноми), или пак рационални функции чии именители се полиноми од прва или втора степен. Оти за вакви интеграли имаме лесни методи на пресметување преку примитивна функција, додека замената (10) не воведува без потреба во дробно рационални изрази.

Меѓутоа, може да се случи оваа метода сепак да дава извесни предности пред другите методи. Може да се случи со супституцијата (10) именителот на (11) да поприми таква форма во која корените лесно се одделуваат. Во тој случај сметањето со остатоците е знатно полесно од другите методи, како што ќе се види од примерите бр. 5, 6, 7, 8 и 9.

Пример 1.

$$\int_0^1 dx = 1,$$

Соответна аналитичка функција е

$$\frac{2z \ln z}{(1+z^2)^2},$$

со единствен пол од втори ред $z = i$ во контурата G. Остатокот е

$$B = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} (z-i)^2 \frac{2z \ln z}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2}$$

и формулата (7) го дава горниот резултат.

Пример 2.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2.$$

Супституцијата (10) овде е

$$x = \frac{t^2 + 2}{t^2 + 1}.$$

Соответната аналитичка функција е

$$\frac{2z \ln z}{(z^2+1)(z^2+2)}.$$

Остатоците се

$$B_1 = \frac{\pi i}{2}, \; B_2 = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi i}{2},$$

и од формулата (7) го добиваме резултатот.

Пример 3. За интегралот

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$

соответна аналитичка функција е

$$\frac{z \ln z}{1 + (1 + z^2)^2}.$$

Во контурата G се два пола: $e^{\frac{3\pi i}{8}}$ и $e^{\frac{5\pi i}{8}}$. Остатоците се

$$\frac{1}{4i}\left(\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{3\pi i}{8}\right) \text{ и } -\frac{1}{4i}\left(\frac{1}{4} l_n 2 + \frac{5\pi i}{8}\right),$$

и формулата (7) го дава резултатот.

Пример 4. За интегралот

$$\int_1^2 \frac{dx}{1 + x^3}$$

соответна аналитичка функција поприма посложен облик

$$\frac{z(1 + z^2) \ln z}{(3 + 2z^2)(z^4 + 3z^2 + 3)},$$

и во контурата G таа има три пола. По пресметувањето на остатоците се добива овој резултат

$$\frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}},$$

што може лесно да се провери со примитивна функција.

Меѓутоа, поинтересно би било поопшто разгледување на интеграли од функции со повисока степен.

Ќе почнеме од трети ред. Нека е напр. даден интегралот

$$\mathrm{I} = \int_a^b \frac{dx}{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D} \tag{15}$$

каде именителот нема нули на $[a, b]$. Со смената (10) тој се сведува на интеграл од облик

$$2\,(b-a)^2 \int_0^{+\infty} \frac{t\,[1 + (b-a)\,t^2]\,dt}{\alpha t^6 + \beta t^4 + \gamma t^2 + \delta}$$

каде што е

$$\begin{aligned} \alpha &= a^3 A + a^2 B + a\,C + D, \\ \beta &= 3a^2 b\, A + (2ab + a^2)\, B + (2a + b)\, C + 3D, \\ \gamma &= 3ab^2 A + (b^2 + 2ab)\, B + (a + 2b)\, C + 3D, \\ \delta &= b^3 A + b^2 B + b\,C + D. \end{aligned} \tag{16}$$

За да именителот во трансформираниот интеграл биде бином од облик $t^6 + N$, потребно е да бидат задоволени условите:

$$\begin{aligned} 3a^2 b\, A + (2ab + a^2)\, B + (2a + b)\, C + 3\, D &= 0, \\ 3ab^2\, A + (b^2 + 2ab)\, B + (a + 2b)\, C + 3\, D &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Како двете последни равенки содржат 6 параметра, тоа преостанатите 4 параметра можеме слободно да ги вариираме, а двата да ги пресметаме од условите (17). Следува дека интегралите (15) чии коефициенти и граници ги задоволуваат условите (17) можат многу ефикасно да бидат пресметани по оваа метода.

Пример 5. Нека е даден интегралот

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3 - 9x^2 + 21x - 15}.$$

Именителот има еден ирационален корен поголем од 5. Условите (17) се задоволени. Соответна аналитичка функција е

$$\frac{2z\,(1 + z^2)\,lnz}{1 + 2z^6}$$

за која во контурата G пресметуваме само 3 остатка. Резултат е

$$-\frac{\sqrt[3]{4}\,\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4\sqrt[3]{2}}\right),$$

додека примената на Кардановата формула овде би била помало практична.

Пример 6. Интегралот

$$\int_0^5 \frac{dx}{1{,}653\,x^3+0{,}2\,x^2-x+1{,}6}$$

ги задоволува условите (17). Неговата вредност е $\frac{12\pi}{25\sqrt{3}}$.

Да минеме сега на случај од IV ред. Нека е даден интегралот:

$$\int_a^b \frac{dx}{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E} \tag{18}$$

На сличен начин трансформацијата (10) именителот го доведува до облик:

$$\alpha t^8+\beta t^6+\gamma t^4+\delta t^2+\eta$$

и условите аналогни на тие од III ред (17) би биле:

$$\begin{aligned} &4a^3b\,A+(3a^2b+a^3)\,B+(2a^2+2ab)\,C+(3a+b)\,D+4\,E=0\\ &6a^2b^2A+(3ab^2+3a^2b)\,B+(a^2+4ab+b^2)\,C+(3a+3b)\,D+6\,E=0\\ &4ab^3\,A+(b^3+3ab^2)\,B+(2ab+2b^2)\,C+(a+3b)\,D+4\,E=0. \end{aligned} \tag{19}$$

како овде имаме 7 параметра а само три равенки, очевидно е да една разновидност интеграли од облик (25) може да се реши по оваа метода.

Пример 7. Интегралот

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x^4-4x^3+6x^2-4x+1}$$

ги задоволува условите (19). Соответна аналитичка функција е

$$\frac{2z\,(1+z^2)^2\,lnz}{1+z^8}$$

која што има 4 пола во G. Негова вредност е:

$$\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right).$$

Пример 8.

$$\int_{-1/2}^{+1/2}\frac{dx}{16x^4+4x^3+24x^2+x+1}=\frac{\pi}{14\sqrt[4]{\left(\frac{9}{7}\right)^3}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt[4]{\frac{9}{7}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{9}{7}}\right].$$

Одделувањето на корените по методата на Ферари во примерите 7. и 8. би била покомплицирана работа.

Меѓутоа, се додека имаме егзактни методи на решавање на равенки оваа метода не доаѓа до потполн израз. Да земеме затоа интеграл со именител полином од V степен, но таков интегралот да има смисол:

$$\int_a^b\frac{dx}{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}. \tag{20}$$

И овде би можеле да поставиме услови аналогни на (17) и (19). Тоа би биле 4 равенки со 8 непознати. Очевидно 4 коефициента од равенката од петта степен би можеле да избереме произволно, додека другите два би биле зависни. Тоа значи дека сепак голем број интеграли (20) можат да се решат со оваа метода.

Пример 9. Во интегралот

$$\int_0^1\frac{dx}{x^5+0{,}5\,x^4-x^3+x^2-0{,}5\,x+0{,}1}$$

именителот има само една реална (негативна) нула, што може елементарно да се провери. Како при равенките од V степен и повисоки во општ случај не постои начин за егзактно наоѓање на корените, тоа обично вакви интеграли се пресметуваат со помошта на апроксимативни мероди. Меѓутоа, овој интеграл со супституцијата (10) се сведува на еден несвојствен интеграл кој лесно може да се пресмета. Неговата вредност е:

$$\frac{8\pi\sin\frac{\pi}{5}}{5\sqrt[5]{11^4}}\left\{4-3\sqrt[5]{11}-3\sqrt[5]{11^2}+2\sqrt[5]{11^3}+2\cos\frac{\pi}{5}\left(1+6\sqrt[5]{11^2}+6\sqrt[5]{11}+\sqrt[5]{11^3}\right)\right\}$$

Изнесената метода сметаме да е интересна од два аспекта: прво, таа е средство за пресметување на определени интеграли од некои класи рационални функции (иако важи и во општ случај), и второ, таа е метода без примена на примитивна функција.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Фихтенгольц: Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II, 1951, & 459 — Интеграли от рациональних функций между бесконечними пределами, р. 636.

[2] В. И. Смирнов: Курс висшей математики, том III, частьвторая, Москва 1958, Интегрирование рациональних дробей р. 219.

[3] А. И. Маркушевич: Кратκий курс теории аналитических функций, издание второе, Москва 1961, глава IV, V, VI и VII.

[4] И. И. Привалов: Введение в теорию функций комплексного переменного, Москва 1960, издание десятое, глава IV, V, VI и VII.

[5] Д. С. Митриновиќ: Зборник математичких проблема, том I, треће издање, Славиша Прешић: проблем бр. 235, р. 474

Dragan Dimitrovski

SUR UNE METHODE D' EVALUATION DES INTEGRALES DEFINIES DES FONCTIONS RATIONELLES AU MOYEN DES SOMMES D'UN NOMBRE FINI DES MEMBRES

(Résumé)

L'auteur présente une généralisation du méthode du calcul des intégrales impropres des fonctions rationelles au moyen du calcul des résidus, méthode bien connue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx = 2\pi i \sum_{sur\ G} Res\, R(x)$$

où G présente le contour

$$|z| = R, \quad o \leqslant arg\, z \leqslant \pi\,; \quad et \quad -R \leqslant x \leqslant +R.$$

On démontre qu' on peut évaluer au moyen d' un calcul des résidus chaque intégrale d' une fonction rationelle continue

$$\int_a^b R(x)\, dx$$

sans l' intervention d' une primitive. La formule est comme il suit:

$$\int_a^b R(x)\, dx = -4(b-a)^2 \sum_{sur\ G} Res \left\{ \frac{z\, lnz}{[1+(b-a)\, z^2]^2}\, R\left[\frac{a\,(b-a)\, z^2 + b}{1+(b-a)\, z^2} \right] \right\}$$

où G présente le contour ci — dessus cité.

La démonstration du théoreme est suivie des considérations sur les aspects pratiques et des certains exemples.