ЗА МЕШАНИОТ ПРОИЗВОД НА ТРИ ВЕКТОРИ

В. Јанекоски

1. Правилото на циклична замена на произволните вектори **a**, **b**, **c** во мешаниот производ

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \tag{1}$$

е еден од основните ставови на векторската алгебра и со неговата примена — релативно полесно одошто со другите методи — можат да се докажат некои други основни ставови како на пример: дистрибутивен закон за векторско множење {[1], p. 164}, трансформациона формула за двојниот векторски производ[1]) со повеќе методи и сл.

За докажување на правилото (1), во литература наидуваме на, покрај добро познатата метода на паралелопипед {[1], p. 191} уште и на координатна {[3], p. 26} која во себе ги вклучува дистрибутивните закони за скаларно и векторско множење, векторска {[4], p. 31}[2]) која користи развивање на сложениот векторски производ $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ по векторот **b** на два начина како и една метода која што ја користи *Gram*-овата детерминантна од трети ред {[2], p. 66}.

При изложувањето доказот на правилото за цикличната замена на векторите во мешаниот производ (1), ќе ги користиме идентитетите коишто непосредно следат од дефиницијата на векторскиот и скаларниот производ

$$(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \tag{2}$$

$$(\mathbf{a} + \mu \mathbf{b}^*) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \tag{2'}$$

каде што λ, μ се произволни скалари, а векторот $\mathbf{b}^*$ е нормален на **b**.

---

[1]) Да се види на пр. {[2], стр. 68—70}.

[2]) Да се види и {[5]}.

2. Трите некомпланарни ортови $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{c}_0$, во наведениот ред, нека образуваат триедар од одредена ориентација и помеѓу себе нека зафаќаат еднакви агли $\varphi < 120°$:

$$\sphericalangle(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0) = \sphericalangle(\mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0) = \sphericalangle(\mathbf{c}_0, \mathbf{a}_0). \tag{3}$$

Триедрите $\mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0, \mathbf{a}_0$ и $\mathbf{c}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0$ ја имаат ориентацијата на триедарот $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0$, пак, со оглед на (3), од причини на симетрија следува дека е $\sphericalangle(\mathbf{b}_0 \times \mathbf{c}_0, \mathbf{a}_0) = \sphericalangle(\mathbf{c}_0 \times \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0)$. Од тука, од геометриската дефиниција на скаларен и векторски производ, непосредно следува дека е

$$(\mathbf{b}_0 \times \mathbf{c}_0) \cdot \mathbf{a}_0 = (\mathbf{c}_0 \times \mathbf{a}_0) \cdot \mathbf{b}_0, \tag{4}$$

или, со оглед на асоцијативноста на векторскиот и скаларниот производ во однос на скаларните множители

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}, \tag{4'}$$

каде што $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се вектори во смер на ортовите $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{c}_0$.

Ако воведеме смена:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \lambda\mathbf{c}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mu\mathbf{c}, \tag{5}$$

каде што λ, μ се произволни скалари а векторите $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}$ ја задоволуваат докажаната релација (4′), тогаш, спрема втората смена (5) и со оглед на (2), имаме $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}' \times \mathbf{c}$ и, понатаму, спрема првата смена (5) и со оглед на (2′), поради нормалноста на векторот $\mathbf{b}' \times \mathbf{c}$ на векторот $\mathbf{c}$:

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b}' \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}'. \tag{6}$$

Со помош смената (5) и идентитетите (2) и (2′), наполно аналогно се докажува дека важи и

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}') \cdot \mathbf{b}', \tag{6'}$$

пак од (6) и (6′) за произволните вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ следува

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}. \tag{7}$$

Со циклична замена на векторите $\mathbf{a} \to \mathbf{b} \to \mathbf{c} \to \mathbf{a}$, од (7) имаме и

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, \tag{7'}$$

со што правилото (1) е докажано во потполност, бидејќи во случај на компланарни вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, векторите $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$ се нормални на рамнината на векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, пак сите производи $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$, $(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ се еднакви на нула.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Chattelun L.: Calcul vectoriel, t. I, Paris, 1952.

[2] Јанекоски В.: Прилог доказима неких ставова векторске алгебре (Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, Vol. VIII, 1—2, Beograd, 1956.

[3] Cisotti U.: Meccanica Razionale, quinta edizione Milano, 1947.

[4] Burali — Forti C. e Marcolongo R.: Elementi di Calcolo vettoriale, seconda edizione, Bologna, 1921.

[5] Јанекоски В.: За еден став на векторската алгебра (Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. Macédoine, t. XI, Skopje, 1960.

V. Janekoski

UNE DÉMONSTRATION VECTORIELLE DE LA PROPRIÉTÉ DE LA PERMUTATION CIRCULAIRE DES FACTEURS DANS LE PRODUIT MIXTE DES TROIS VECTEURS

(Résumé)

En désignant par $\vec{\mathbf{a}}'$, $\vec{\mathbf{b}}'$, $\vec{\mathbf{c}}'$ les vecteurs d'un trièdre d'une disposition bien déterminée, qui font entre eux des angles quelconques mais égaux, de la définition du produit mixte de trois vecteurs on a immédiatement l'égalité (4'). D'où, par la transformation (5), à l'aide des identités triviales (2) et (2'), il s'ensuit l'égalité (7) qu'elle exprime la propriété du produit mixte (1). — Pour une autre démonstration de la propriété (1), voir de même auteur {[2], p. 66.}.