ЗА ЦЕНТАРОТ НА АТРАКЦИЈАТА ВО ПРОБЛЕМОТ НА ТРИ ТЕЛА

Мадевски Живко

Правците на силите, кои се јавуваат во Проблемот на три тела како резултат на взаемните дејства на тие тела, и кои се функции од нивните меѓусебни растојанија, се сечат во една внатрешна (или надворешна) точка на триаголникот на положението (што зависи од тоа дали телата се привлекуваат или одбиваат). Таа точка е позната како центар на атракцијата. Поимот за центарот на атракцијата го воведува Миланковиќ во својата работа „О општим интегралима проблема *n* тела" [1] под име пол на гравитацијата; покасно самиот Миланковиќ го променува името во центар на атракцијата како и што се сретнува во неговиот учебник по небеска механика.

Во работава, отпрвин, го покажуваме постоењето на центарот на атракцијата користејќи ги методите на аналитичната геометрија. Потоа воведувајќи, на погоден начин дефинирани, фиктивни маси, покажуваме дека центарот на атракцијата можеме да го сметаме како нивно тежиште; тоа ни дозволува да го определиме неговото положение со помош на елементите на триаголникот на положението. На крај покажуваме дека познавање на движењето на центарот на атракцијата ги упростува основните диференцијални равенки во Проблемот на три тела.

1. Од наведената погоре дефиниција за центарот на атракцијата следува: дека е секогаш во рамнината на масите т. е. лежи во рамнината определена со триаголникот на положението и дека во секој момент во него се сечат оскулаторните рамнини на траекториите на масите m_1, m_2, m_3.

Во своите работи [1], [2], Миланковиќ ја покажува неговата егзистенција користејќи векторски методи; во [3], тоа е направено и на елементарно геометриски пат. Ние ќе го направиме истото со помош на методите на аналитична геометрија.

1. 1. Нека избереме една рамнинска афина координатна система $Ox_1\,x_2$ со почеток во положението на m_1 а $\mathbf{s}_{12}$ и $\mathbf{s}_{13}$, каде $\mathbf{s}_{ik}$ е вектор на положение на масата m_k во однос на масата m_i, како единични вектори. Тогаш земајќи в обзир дека

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{P}_1 &= \frac{m_1\, m_2}{s_{12}^3}\,\mathbf{s}_{12} + \frac{m_1\, m_3}{s_{13}^3}\,\mathbf{s}_{13},\\
\mathbf{P}_2 &= \frac{m_1\, m_2}{s_{12}^3}\,\mathbf{s}_{21} + \frac{m_2\, m_3}{s_{23}^3}\,\mathbf{s}_{23} = -\left(\frac{m_1\, m_2}{s_{12}^3} + \frac{m_2\, m_3}{s_{23}^3}\right)\mathbf{s}_{12} + \frac{m_2\, m_3}{s_{23}^3}\,\mathbf{s}_{13}\\
\mathbf{P}_3 &= \frac{m_1\, m_3}{s_{13}^3}\,\mathbf{s}_{31} + \frac{m_2\, m_3}{s_{23}^3}\,\mathbf{s}_{32} = \frac{m_2\, m_3}{s_{23}^3}\,\mathbf{s}_{12} - \left(\frac{m_1\, m_3}{s_{13}^3} + \frac{m_2\, m_3}{s_{23}^3}\right)\mathbf{s}_{13}
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

каде $\mathbf{P}_i$ се Њутнови сили, $s_{ik} = |\mathbf{s}_{ik}|$ и гравитационата константа $f = 1$, равенките на правците на силите $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$, во оваа координатна система, ќе бидат:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{m_3}{s_{13}^3}\,x_1 - \frac{m_2}{s_{12}^3}\,x_2 = 0,\\
&\frac{m_3}{s_{23}^3}\,x_1 + \left(\frac{m_1}{s_{12}^3} + \frac{m_3}{s_{23}^3}\right)x_2 - \frac{m_3}{s_{23}^3} = 0,\\
&\left(\frac{m_1}{s_{13}^3} + \frac{m_2}{s_{23}^3}\right)x_1 + \frac{m_2}{s_{23}^3}\,x_2 - \frac{m_2}{s_{23}^3} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Лесно се покажува дека

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{m_3}{s_{13}^3}, & -\dfrac{m_2}{s_{12}^3}, & 0\\
\dfrac{m_3}{s_{23}^3}, & \dfrac{m_1}{s_{12}^3} + \dfrac{m_3}{s_{23}^3}, & -\dfrac{m_3}{s_{23}^3}\\
\dfrac{m_1}{s_{13}^3} + \dfrac{m_2}{s_{23}^3}, & \dfrac{m_2}{s_{23}^3}, & -\dfrac{m_2}{s_{23}^3}
\end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

од каде и следува дека трите правци се сечат во една точка Γ.

2. Нека избереме еден произволен момент и нека се обидеме да го определиме положението на центарот на атракцијата, на точката Γ, во зависност од елементите на триаголникот на конфигурацијата.

2. 1. Од спомнатиот триаголник следува: $s_{12} = 2a \sin\varphi_3$, $s_{23} = 2a \sin\varphi_1$, $s_{31} = 2a \sin\varphi_2$, каде φ_1, φ_2 и φ_3 се негови внатрешни агли и a радиус на опишаниот околу него круг. Заменувајќи ги овие вредности за s_{12}, s_{23} и s_{31} во аналитичките изрази на Њутновите сили (1) и уредувајќи ги истите, добиваме:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1 &= k'\, m_1 \sin^3\varphi_1\,(m_2 \sin^3\varphi_2\,\mathbf{s}_{12} + m_3 \sin^3\varphi_3\,\mathbf{s}_{13}),\\
\mathbf{P}_2 &= k'\, m_2 \sin^3\varphi_2\,(m_1 \sin^3\varphi_1\,\mathbf{s}_{21} + m_3 \sin^3\varphi_3\,\mathbf{s}_{23}),\\
\mathbf{P}_3 &= k'\, m_3 \sin^3\varphi_3\,(m_1 \sin^3\varphi_1\,\mathbf{s}_{31} + m_2 \sin^3\varphi_2\,\mathbf{s}_{32}),
\end{aligned}$$

каде е $k' = 1/8a^3 \sin^3\varphi_1 \sin^3\varphi_2 \sin^3\varphi_3$.

За производите $m_i \sin^3 \varphi_i$ $(i = 1, 2, 3)$ можеме да речеме следното:

1° Поради природата на проблемот секое од φ_i е $0 < \varphi_i < \pi$, па тие производи ќе се секогаш позитивни т. е. $m_i \sin^3 \varphi_i > 0$;

2° Производите $m_i \sin^3 \varphi_i$ имаат димензија на маса.

Од реченото следува дека би можеле овие производи да ги сметаме како некои, на тој начин дефинирани, маси кои, поради $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi$, ќе задоволуваат извесна релација.

Нека ги означиме со $\overset{*}{m}_i = m_i \sin^3 \varphi_i$ и нека земеме дека, така замислените фиктивни „маси", се наоѓаат во темињата на посматраниот триаголник на конфигурацијата.

Со помош на овие ознаки силите $\mathbf{P}_i$ ќе можат да се напишат и вака:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= k' \overset{*}{m}_1 (\overset{*}{m}_2 \mathbf{s}_{12} + \overset{*}{m}_3 \mathbf{s}_{13}), \\ \mathbf{P}_2 &= k' \overset{*}{m}_2 (\overset{*}{m}_1 \mathbf{s}_{21} + \overset{*}{m}_3 \mathbf{s}_{23}), \\ \mathbf{P}_3 &= k' \overset{*}{m}_3 (\overset{*}{m}_1 \mathbf{s}_{31} + \overset{*}{m}_2 \mathbf{s}_{32}). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Секој од векторските изрази во заградите го дава векторот на положение на „тежиштето" на соодветните две фиктивни „маси", помножен со нивната сума, во однос на трета маса. Од горните равенки пак следува дека тој вектор е колинеарен со соодветната сила. По таков начин можеме да заклучиме дека точката Γ_i, во која се сечат правецот на сила $\mathbf{P}_i$ и спротивна страна на триаголникот, е „тежиште" на соодветните две фиктивни „маси". Исто така следува дека точката Γ, центарот на атракцијата, е „тежиште" на фиктивните маси $\overset{*}{m}_1$, $\overset{*}{m}_2$ и $\overset{*}{m}_3$.

2.2 Веднаш се доаѓа до следните релации:

$$\begin{aligned} \overset{*}{m}_1 \mathbf{g}_1 + \overset{*}{m}_2 \mathbf{g}_2 + \overset{*}{m}_3 \mathbf{g}_3 &= 0, \\ m_1 \mathbf{g}_1 + m_2 \mathbf{g}_2 + m_3 \mathbf{g}_3 &= - M \mathbf{R}, \\ \overset{*}{m}_1 \mathbf{r}_1 + \overset{*}{m}_2 \mathbf{r}_2 + \overset{*}{m}_3 \mathbf{r}_3 &= M^* \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

каде се: $\mathbf{r}_i$ вектор на положение на масата m_i во однос на тежиштето S на масите m_1, m_2 и m_3;

$\mathbf{g}_i$ вектор на положение на масата m_i во однос на Γ;
$\mathbf{R}$ вектор на положение на Γ во однос на S;
$M = m_1 + m_2 + m_3$ и $M^* = \overset{*}{m}_1 + \overset{*}{m}_2 + \overset{*}{m}_3$.

Равенката (5) потполно го определува положението на центарот на атракцијата во зависност од положението на масите m_i и внатрешните агли на триаголникот на моментната конфигурација.

2.3. Покажавме дека правците на силите $\mathbf{P}_i$ врват низ Γ, и по тој начин се колинеарни со векторите $\mathbf{g}_i$, т. е. $\mathbf{P}_i = \lambda_i \mathbf{g}_i$; ќе ги определиме коефициентите λ_i.

Земајќи в обзир дека точката Γ можеме да ја сметаме како тежиште на m_1^*, m_2^* и m_3^*, а спрема теорија за тежиштето на една материјална система, ќе ги напишеме следните релации:

$$\left.\begin{aligned} -M^*\,\mathbf{g}_1 &= m_2^*\,\mathbf{s}_{12} + m_3^*\,\mathbf{s}_{13} \\ -M^*\,\mathbf{g}_2 &= m_1^*\,\mathbf{s}_{21} + m_3^*\,\mathbf{s}_{23} \\ -M^*\,\mathbf{g}_3 &= m_1^*\,\mathbf{s}_{31} + m_2^*\,\mathbf{s}_{32}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ако се направи замена во (4) добиваме

$$\mathbf{P}_i = -k\,m_i^*\,\mathbf{g}_i, \tag{7}$$

односно $\lambda_i = -k\,m_i^*$, каде е $k = \dfrac{m_1\,m_2\,m_3\,M^*}{8a^3\,m_1^*\,m_2^*\,m_3^*}$.

2. 4. Ќе покажеме уште една релација која овозможува определување на положението на центарот на атракцијата со помош на вектори положени на страните на триаголникот и погодно ориентирани.

Множејќи ги релациите (6), респективно, со m_1, m_2 и m_3 и собирајќи ги, добиваме:

$$-M^*\sum_{i=1}^{3} m_i\,\mathbf{g}_i = (m_1 m_2^* - m_2 m_1^*)\,\mathbf{s}_{12} + (m_2 m_3^* - m_3 m_2^*)\,\mathbf{s}_{23} + (m_3 m_1^* - m_1 m_3^*)\,\mathbf{s}_{31},$$

или

$$M M^*\,\mathbf{R} = \alpha_3\,\mathbf{s}_{12} + \alpha_1\,\mathbf{s}_{23} + \alpha_2\,\mathbf{s}_{31}, \tag{8}$$

каде зедовме в обзир дека $\sum\limits_{i=1}^{3} m_i\,\mathbf{g}_i = -M\mathbf{R}$ и воведовме ознаки

$$\alpha_1 = m_2 m_3^* - m_3 m_2^*, \quad \alpha_2 = m_3 m_1^* - m_1 m_3^*, \quad \alpha_3 = m_1 m_2^* - m_2 m_1^*.$$

2.5. Во својата работа [4] Б. Поповиќ, со помош на фиктивни „должини" s_{11}, s_{22} и s_{33}, кои потем се определуваат, доаѓа до извесни релации што се однесуваат на центарот на атракцијата во Проблемот на три тела.

Воведувајќи во нив $s_{12} = 2a\sin\varphi_3$, $s_{22} = 2a\sin\varphi_1$ и $s_{13} = 2a\sin\varphi_2$ доаѓаме до релациите што ги наведовме погоре, т. е. (5), (7) и (8).

3. Во предходните делови од работава се гледа дека положението на центарот на атракцијата може, во секој момент, да се определи потполно од положенијата на трите посматрани тела.

Обратно, познавање на движението на центарот на атракцијата, т. е. познавање на $\mathbf{R}(t)$, заедно со познавање на законите на промените на аглите $\varphi_i(t)$, значително ги упростува основните равенки во Проблемот на три тела.

Релацијата (7) ни овозможува да напишеме

$$m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -k\,m_1^*\,\mathbf{g}_1;$$

како е $\mathbf{g}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ и земајќи за k неговата вредност излегува дека

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{d t^2} + \frac{m_2 m_3 M^*}{8a^3 m_2^* m_3^*} \mathbf{r}_1 = \frac{m_2 m_3 M^*}{8a^3 m_2^* m_3^*} \mathbf{R}.$$

Врската (8) ни овозможува да го изразиме $a(t)$ преку $\varphi_i(t)$ и $R(t)$.

По тој пат горната основна равенка се сведува на нехомогена линеарна диференцијална равенка т. е.

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{d t^2} + F_1(t)\, \mathbf{r}_1 = F_1(t)\, \mathbf{R}. \tag{9}$$

На ист начин може да се постапи и со останалите две основни равенки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Миланковиќ, М.: О општим интегралима проблема n тела, Глас САН, LXXXIII, 1911 год.

[2] Миланковиќ, М.: Небеска механика, Београд, 1935 год.

[3] Bilimovitch et Petronievitch: Contribution à la solution du problème des trois corps, Гласник Југословенског професорског друштва, кн. XV, св. 10, 1935 год.

[4] Поповић Бож.: Vektoraj elementoj de elipsa movigo de dukorpa masocentro ĉirikau tria korpo, Билтен на Друштвото на физ. и мат. на НРМ, кн. VII, 1956 год.

Madevski Živko

SUR LE CENTRE D'ATTRACTION DANS LE PROBLEME DES 3 CORPS

Résumé

On défini le centre d'attraction comme le point d'intersection des directions des forces newtoniennes dans le Problème des 3 corps.

Ladite définition est due à Milanković. Celui-ci montre, dans ses travaux [1] et [2], l'existence du centre d'attraction par un procédé vectoriel, tandis que dans [3] cela est fait à l'aide des méthodes de géometrie élémentaire.

Dans ce travail nous montrons, d'abord, que les directions des forces, engendrées par l'attirance mutuelle des corps m_1, m_2 et m_3 d'après la loi de Newton, se coupent à un point. Nous avons pris la position de m_1 comme le centre d'un système de référence et les $\mathbf{s}_{12}$, $\mathbf{s}_{13}$ ($\mathbf{s}_{ik}$ le vecteur de position du corps m_k par rapport à m_i) comme les vecteurs coordonnés, ce qui nous permet d'écrire les équations (2) des directions des forces (1). La relation (3) est bien évidente et il en suit immédiatement l'existence du centre d'attraction (le point Γ).

Ensuit en changeant s_{ik} ($s_{ik} = |\mathbf{s}_{ik}|$) dans les expressions (1) des forces $\mathbf{P}_i$ par $s_{12} = 2a \sin \varphi_3$, $s_{23} = 2a \sin \varphi_1$ et $s_{31} = 2a \sin \varphi_2$ (φ_1, φ_2, φ_3 — les angles intérieurs du triangle de position et a le rayon de son circonférence décrit) nous venons à (4), où les m_i^* sont des valeurs $m_i \sin^3 \varphi_i$.

Prenons les m_i^* comme des „masses fictives" situées aux sommets du triangle de position (aux lieux des m_i); ainsi nous pouvons tirer de (4) la conclusion suivante:

Le centre d'attraction (*le point* Γ) *est le centre de gravité des masses fictives* m_1^*, m_2^* *et* m_3^*.

Et il en résulte:

les relations (5) *et* (8), *qui nous permet de trouver la position du centre d'attraction à l'aide des positions des* m_1, m_2 *et* m_3 *et des éléments du triangle de position, et la relation* (7).

A savoir:

$\mathbf{r}_i$ — vecteur de position de m_i par rapport à S, centre de gravité des m_1, m_2 et m_3;
$\mathbf{g}_i$ — vecteur de position de m_i par rapport à Γ, centre d'attraction;
$\mathbf{R}$ — vecteur de position de Γ par rapport à S;

$M=m_1+m_2+m_3$ et $M^*=m_1^*+m_2^*+m_3^*$.

Enfin, dans 3., nous voulons montrer qu'il est d'intérêt de connaitre le mouvement du centre d'attraction, de plus et $\varphi_i(t)$, parce que cela nous emmène à simplifier les équations du mouvement des m_1, m_2 et m_3.

De (7), parce que $\mathbf{g}_1=\mathbf{r}_1-\mathbf{R}$ et $\mathbf{P}_1=m_1\dfrac{d^2\mathbf{r}_1}{d\,t^2}$, il vient

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{d\,t^2}+\frac{m_2\,m_3\,M^*}{8a^3\,m_2^*\,m_3^*}\,\mathbf{r}_1=\frac{m_2\,m_3\,M^*}{8a^3\,m_2^*\,m_3^*}\,\mathbf{R}.$$

La relation (8) nous permet de tirer $a(t)$ dépendent des $\varphi_i(t)$ et $R(t)$.
Et l'équation, écrite plus haut, devient plus simple (9).