ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DES ORDRES 7 ET 8 DONT L'INTÉGRATION SE RAMÈNE À CELLE D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE DE SECOND ORDRE

ILIJA A. ŠAPKAREV

1. Dans cette Note, nous allons démontrer, en appliquent le procédé donné dans [2], que les équations différentielles

$$(1)\quad y^{VII} - 56hy^{V} - 140h' y^{IV} + 56(14h^2 - 3h'')y''' - 112(h''' - 21hh')y'' + 4(352hh'' - 576h^3 + 295h'^2 - 10h^{IV})y' + 6(52hh''' + 116h'h'' - 576h^2h' - h^{V})y = 0,$$

$$(2)\quad y^{VIII} - 84hy^{VI} - 252h'y^{V} + 42(47h^2 - 9h'')y^{IV} + 168(47hh' - 2h''')y''' + 4(1485h'^2 - 3229h^3 + 1773hh'' - 45h^{IV})y'' + 6(1188h'h'' - 6458h^2h' + 524hh''' - 9h^{V})y' + 7(226h'h''' - 2776hh'^2 + 1575h^4 - 1654h^2h'' + 80hh^{IV} + 153h''^2 - h^{VI})y = 0$$

ont respectivement comme solutions générales

$$(1')\quad y = C_1u^6 + C_2u^5v + C_3u^4v^2 + C_4u^3v^3 + C_5u^2v^4 + C_6uv^5 + C_7v^6,$$

$$(2')\quad y = C_1u^7 + C_2u^6v + C_3u^5v^2 + C_4u^4v^3 + C_5u^3v^4 + C_6u^2v^5 + C_7uv^6 + C_8v^7,$$

où u et v représentent un système fondamental de solutions de l'équation

$$(3)\quad y'' = h(x)\,y.$$

2. Posons

$$A_0 = y_1y_2\ldots y_n,$$
$$A_1 = y'_1y_2\ldots y_n + y_1y'_2\ldots y_n + \ldots + y_1y_2\ldots y'_n,$$
$$\vdots$$

$$A_k = y'_1 y'_2 \dots y'_k y_{k+1} \dots y_n + y'_1 y'_2 \dots y'_{k-1} y_k y'_{k+1} y_{k+2} \dots y_n$$
$$+ \dots + y_1 y_2 \dots y_{n-k} y'_{n-k+1} \dots y'_n,$$
$$\vdots$$
$$A_n = y'_1 y'_2 \dots y'_n,$$

où y_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ désignent des solutions quelconques de l'èquation (3).

Il est facile de montrer que

$$(4) \quad A'_0 = A_1, \; A'_k = (k+1) A_{k+1} + (n-k+1) h A_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n; \; A_{n+1} = 0),$$

car on peut remplacer y''_i par hy_i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

En posant $z = A_0$ d'après (4), il suit

$$z = A_0,$$
$$z' = A_1,$$
$$z'' = 2A_2 + nhA_0,$$
$$z''' = 6A_3 + (3n-2) hA_1 + nh'A_0,$$
$$z^{IV} = 24A_4 + (12n-16) hA_2 + (4n-2) h' A_1 + [(3n^2-2n) h^2 + nh''] A_0,$$

$$z^{V} = 120A_5 + (60n-120) hA_3 + (20n-20) h' A_2$$
$$+ [(15n^2-30n+16) h^2 + (5n-2) h''] A_1 + [(10n^2-6n) h h' + nh'''] A_0,$$

$$(5) \quad z^{VI} = 720A_6 + (360n-960) h A_4 + (120n-180) h' A_3 + [(90n^2-300n+272) h^2$$
$$+ (30n-24) h''] A_2 + [(60n^2-106n+52) h h' + (6n-2) h'''] A_1$$
$$+ [(15n^3-30n^2+16n) h^3 + (10n^2-6n) h'^2 + (15n^2-8n) h h'' + nh^{IV}] A_0,$$

$$z^{VII} = 5040A_7 + (2520n-8400) h A_5 + (840n-1680) h' A_4$$
$$+ [(630n^2-2940n+3696) h^2 + (210n-252) h''] A_3$$
$$+ [(420n^2-1232n+1008) h h' + (42n-28) h'''] A_2$$
$$+ [(105n^3-420n^2+588n-272) h^3 + (105n^2-168n+76) h h''$$
$$+ (70n^2-112n+52) h'^2 + (7n-2) h^{IV}] A_1$$
$$+ [(105n^3-196n^2+100n) h^2 h' + (35n^2-20n) h' h'' + (21n^2-10n) h h''' + nh^{V}] A_0,$$

$$z^{VIII} = 40320A_8 + (20160n-80640) h A_6 + (6720n-16800) h' A_5$$
$$+ [(5040n^2-30240n+48384) h^2 + (1680n-2688) h''] A_4$$

$$+ [(3360n^2 - 13776n + 15456)\, h h' + (336n - 336)\, h'''] A_3$$
$$+ [(840n^3 - 5040n^2 + 10752n - 7936)\, h^3 + (840n^2 - 2240n + 1664)\, h h''$$
$$+ (560n^2 - 1456n + 1112)\, h'^2 + (56n - 32)\, h^{IV}] A_2$$
$$+ (840n^3 - 3108n^2 + 4104n - 1824)\, h^2 h' + (168n^2 - 248n + 104)\, h h'''$$
$$+ (280n^2 - 412n + 180)\, h' h'' + (8n - 2)\, h^V] A_1$$
$$+ [(105n^4 - 420n^3 + 588n^2 - 272n)\, h^4 + (280n^3 - 504n^2 + 252n)\, h h'^2$$
$$+ (210n^3 - 364n^2 + 176n)\, h^2 h'' + (56n^2 - 30n)\, h' h''' + (35n^2 - 20n)\, h''^2$$
$$+ (28n^2 - 12n)\, h h^{IV} + n h^{VI}] A_0.$$

Pour $n = 6$, de (5), par élimination des A_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, il vient

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z^I & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z^{II} & 6h & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z^{III} & 6h' & 16h & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ z^{IV} & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ z^V & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & b_5 & 0 \\ z^{VI} & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & c_6 \\ z^{VII} & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

où

$a_0 = 96h^2 + 6h''$, $a_1 = 22h'$, $a_2 = 56h$, $a_4 = 24$,

$b_0 = 324 h h' + 6h'''$, $b_1 = 376h^2 + 28h''$, $b_2 = 100h'$, $b_3 = 240h$, $b_5 = 120$,

$c_0 = 2256h^3 + 492h\, h'' + 324h'^2 + 6h^{IV}$, $c_1 = 1576h\, h' + 34\, h'''$, $c_2 = 1712h^2 + 156h''$,

$c_3 = 540h'$, $c_4 = 1200h$, $c_6 = 720$,

$d_0 = 16224h^2 h' + 696h\, h''' + 1140h' h'' + 6\, h^V$, $d_1 = 10816h^3 + 2848h\, h'' + 1900\, h'^2$
$+ 40h^{IV}$, $d_2 = 8736h\, h' + 224h'''$, $d_3 = 8736h^2 + 1008h''$, $d_4 = 3360h'$, $d_5 = 6720h$.

En évaluant le déterminant qui figure dans l'équation (6), on arrive à l'équation différentielle (1).

Si $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = u$, on conclut que la fonction $z = u^6$ satisfait à l'équation (1). Si $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = u$, $y_6 = v$, on obtient que $z = u^5 v$ sitisfait à l'équation (1), et ainsi de suite. Donc, la solution générale de l'équation (1) est (1'),

Avec un procédé analogue, pour $n = 7$, on obtient l'équation (2).

Remarque. Les résultats de la présente Note s'ajoutent à ceux qui se trouvent dans le livre de Kamke [1] et à ceux obtenus dans les tiavaux dus à Mitiinović et Djoković [2] et Šapkarev [3].

RÉFÉRENCES

[1] Э. Камке, Справочник по обикновенным дифференциальным уравнениям, Москва (1961), с. 531 и 554.

[2] D. S. Mitrinović et D. Ž. Djoković, Compléments au Traité de Kamke, Note IX, Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, serie: Mathématiques et physique № 108 (1963).

[3] I. A. Šapkarev, Équations différentielles linéaires des ordres 5 et 6 dont l'intégration se ramène à celle d'une équation linéaire de second ordre, Matematički vesnik, knjiga 1 (16), sveska 2, Beograd (1964).

Илија А. Шапкарев

ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД СЕДМИ И ОСМИ РЕД ЧИЈА ИНТЕГРАЦИЈА СЕ СВЕДУВА НА ИНТЕГРАЦИЈА ОД ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ВТОР РЕД

Резиме

Се докажува дека решавањето на диференцијалните равенки (1) и (2) се сведува на решавање од равенката (3). Општите решенија на овие равенки дадени се со изразите (1′) и (2′) каде u и v претставуваат фундаментален систем од решенија на равенката (3).