ЗА ЕДНА АЛГЕБАРСКА РАВЕНКА*)

Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите од Н Р Македонија, кн. 2, 1951, 3-15

1. Во оваа работа намераваме да дадеме едно решение на равенката

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n(n-k-1)!}{(n-2k)!\, k!} p^k x^{n-2k} + q = 0; \tag{1}$$

p и q се произволни бројеви, а k најголемиот цел број што се содржи во $\frac{n}{2}$.

Равенката (1) може да се пише уште и како

$$x^n + \frac{n}{1} p x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2} p^2 x^{n-4} + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-k-1)\cdots(n-2k+1)}{1.2.3\cdots k} p^k x^{n-2k} + \cdots + q = 0.$$

Ако означиме дека

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n(n-k-1)!}{(n-2k)!\, k!} p^k x^{n-2k} = \Phi_n(x), \tag{2}$$

равенката (1) добива облик

$$\Phi_n(x) + q = 0. \tag{3}$$

2. Доведувајќи го полиномот Φ_n во врска со формулите на Waring за степени збирови ние ќе му дадеме облик, што ќе го користиме во понатамошното разгледување.

Познато е, дека степените збирови се израчунаваат директно со помошта на симетричните функции со формулата на Waring, која што ја дава врската помеѓу коефициентите на една равенка и степените збирови[1])

$$S_n = \sum (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{r-1})!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_r!} p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \cdots p_r^{\lambda_r}.$$

Сумирањето се однесува за сите вредности на λ позитивни или нула, што ја задоволуваат релацијата

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + r\lambda_r = n.$$

Применувајќи ја оваа формула за равенката

$$z^2 - xz - p = 0,$$

---

*) Оваа работа се надоврзува на: B. S. Popov, *Sur une équation algébrique proposée par Pitoiset*, која се наоѓа во печат во Bulletin de l'Académie royale de Belgique.

[1]) E. Lucas, *Théorie des nombres*, t. I, 1881, p. 274.

ја наоѓаме следната формула за n-тиот степенен збир

$$S_n = \sum \frac{n(n-k-1)!}{(n-2k)!\,k!}\, p^k x^{n-2k}$$

знакот Σ се однесува за сите вредности на $k = 0, 1, 2, \ldots$ до најголемиот цел број што се содржи во $\frac{n}{2}$.

Десната страна на оваа формула е пак поправо полиномот што спрема (2) го означивме со Φ_n. Така ја имаме следната релација

$$(4) \qquad \Phi_n(x) = z_1^n + z_2^n,$$

каде што се

$$2z_1 = x + \sqrt{x^2 + 4p},$$

$$2z_2 = x - \sqrt{x^2 + 4p}.$$

3. Релацијата (4) ни дава можност, да го доведеме полиномот Φ_n во врска со полиномот на Tchebychev[2]) T_n. Овој последниот е како што знаеме дефиниран со

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left\{\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right\}.$$

Со смената

$$y = 2i\sqrt{p}\,x, \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

добиваме

$$T_n\left(\frac{y}{2i\sqrt{p}}\right) = \frac{1}{2i^n p^{n/2}}\left\{\left(\frac{y + \sqrt{y^2+4p}}{2}\right)^n + \left(\frac{y - \sqrt{y^2+4p}}{2}\right)^n\right\}.$$

Од тука ја имаме бараната релација

$$2i^n p^{n/2}\, T_n\left(\frac{y}{2i\sqrt{p}}\right) = \Phi_n(y).$$

Врз основа на ова, заклучуваме дека равенката (1) може да се напише како

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} x^{n-2k}(x^2+4p)^k + 2^{n-1} q = 0,$$

како и со помошта на формулата на Rodrigues

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2+4p)^{n-1/2} + \frac{1.3.5.\cdots(2n-1)}{(x^2+4p)^{1/2}}\, 2^{n-1} q = 0.$$

Имајќи предвид дека е

---

[2]) W. Magnus und F. Oberhettinger, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, Berlin, 1943, S. 78.

$$\Phi_n(x) = \prod_{k=1} (x - x_k),$$

$$x_k = 2i\sqrt{p} \cos \frac{2k-1}{2n} \pi,$$

на равенката (1) може да й се дада следниот облик

$$\prod_{k=1}^{n} (x - x_k) + q = 0,$$

со

$$x_k = 2i\sqrt{p} \cos \frac{2k-1}{2n} \pi.$$

4. Во равенката (4) т. е. во

$$\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4p}}{2}\right)^n + \left(\frac{x-\sqrt{x^2+4p}}{2}\right)^n + q = 0,$$

ако ја извршиме смената

(5) $$x = 2i\sqrt{p} \cos \theta,$$

ја добиваме равенката

$$\cos n\theta = M,$$

каде што е

$$M = -\frac{q}{2} i^{-n} p^{-n/2}.$$

Од тука ќе имаме

$$\theta = \frac{1}{n} \arccos M,$$

или имајќи ја предвид смената (5)

$$\arccos \frac{x}{2i\sqrt{p}} = \frac{2k\pi + \arccos M}{n}.$$

Следователно, решенијата на равенката (1) се дадени со

$$x = 2i\sqrt{p} \cos \frac{2k\pi + \arccos M}{n},$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

5. Во овој и во следниот §, ќе ја покажеме удобноста на гореизложениот начин, за наоѓање решенијата на равенка од трета и четврта степен со помошта на кружните функции.

Општиот облик на равенка од трета степен[3])

[3]) J. Serret, *Cours d'algèbre supérieure*, t. II, 1928, p. 455.

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$

со смената

$$y = x + \frac{a_1}{a_0},$$

се сведува на равенка во која што недостанува вториот член, така што секоја кубична равенка може да се напише во облик

$$x^3 + 3px + q = 0.$$

Тригонометриското решение се добива од Cardan-овата формула

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + p^3}}$$

по следниот начин.

Зимајќи го радикалот

$$\frac{q^2}{4} + p^3 = -R < 0,$$

поткоренатa величина е комплексен број и следователно ако ставиме

$$-\frac{q}{2} = \rho \cos \varphi, \quad R = \rho^2 \sin^2 \varphi,$$

ќе имаме

$$x = 2i \sqrt{p} \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{3}, \quad (k = 0, 1, 2).$$

Ако пак употребиме начинот погоре од нас изложен за равенката (1), ќе можеме кубичната равенка да ја напишеме како

$$\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4p}}{2}\right)^3 + \left(\frac{x - \sqrt{x^2 + 4p}}{2}\right)^3 + q = 0.$$

Со смената (5) ќе имаме

$$\cos 3\theta = \frac{q}{2i p^{3/2}},$$

од каде ги имаме решенијата на кубичната равенка

$$x_k = 2i \sqrt{p} \cos \frac{2k\pi + \arc\cos \frac{q}{2i p^{3/2}}}{3}$$

$$(k = 0, 1, 2).$$

6. За равенка од четврта степен

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

познато е, дека со трансформацијата на Tschirnaüs

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2,$$

може да се сведе на биквадратна

$$x^4 + 4 p x^2 + 2 p^2 + q = 0, \quad (y = x). \tag{6}$$

Како што видовме погоре, оваа може да се напише како

$$\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4p}}{2}\right)^4 + \left(\frac{x - \sqrt{x^2 + 4p}}{2}\right)^4 + q = 0.$$

Со смената (5) добиваме оттука

$$\cos 4z = -\frac{q}{2p^2},$$

од каде ги имаме решенијата на равенката (6) во тригонометриски облик

$$x = 2i\sqrt{p} \cos \frac{(2k+1)\pi - \arc\cos \frac{q}{2p^2}}{4}$$

$$(k = 0, 1, 2, 3).$$

7. Сведувајќи ја равенката (1) на триномна, која како што знаемѐ се решава со помошта на биномната равенка, ние ќе дадеме едно друго решение на таа равенка. При това ќе ја користиме врската која што постоје помеѓу полиномите Φ_n т. е. рекурентната формула

$$\Phi_n = x \Phi_{n-1} + p \Phi_{n-2}.$$

Извршиме ли ја смената

$$z - \frac{p}{z} = x, \tag{7}$$

добиваме

$$\Phi_n = z^n + \frac{(-p)^n}{z^n}.$$

Внесувајќи ја оваа вредност за Φ_n во (3), ја добиваме триномната равенка

$$z^{2n} + q z^n + (-p)^n = 0.$$

Зимајќи го z^n како непознато, од тука се изведува

$$z^n = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - (-p)^n}.$$

Ако претпоставиме дека се q и $(-p)^n$ реални бројеви и уште

$$\frac{q^2}{4} - (-p)^n < 0,$$

да ставиме

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - (-p)^n} = r(\cos\alpha \pm i \sin\alpha). \tag{8}$$

Триномната равенка што во овој случај е

$$z^{2n} - 2rz^n \cos\alpha + r^2 = 0,$$

се сведува на биномната

$$z^n = r(\cos\alpha \pm i \sin\alpha),$$

чии што корени се спрема формулата на Moivre

$$z = r^{1/n}\left\{\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \pm i \sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right\}. \tag{9}$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

Од (8) ги имаме вредностите за α и r

$$\alpha = \pi - \operatorname{arc}\cos\frac{q}{2i^n p^{n/2}};\ r = i^n p^{n/2}. \tag{10}$$

Внесувајќи ги овие вредности за z во (7) имаме, зимајќи предвид (10)

$$x = 2i\sqrt{p}\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n},$$

каде што е

$$\alpha = \pi - \operatorname{arc}\cos\frac{q}{2i^n p^{n/2}}.$$

На прв поглед ни изгледа дека ќе имаме $2n$ различни корена поради $2n$ корена за z. Но лесно се уверуваме дека при земането на коњугираните корени на (9) се добиваат исти корени.

Résumé

SUR UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE*)

1. Dans cet article, nous allons donner, par deux méthodes diverses, la solution de l'équation

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n(n-k-1)!}{(n-2k)!\ k!} p^k x^{2n-k} + q = 0, \tag{1}$$

---

*) Cet article se rattache à: B. S. Popov, *Sur une équation algébrique proposée par Pitoiset*, (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, sous presse).

p et q étant des nombres quelconques et $[n/2]$ le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$.

Nous écrirons, pour abréger, cette équation sous la forme

$$\Phi_n(x) + q = 0$$

en désignant par Φ_n le polynome

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n(n-k-1)!}{(n-2k)!\ k!} p^k x^{n-2k}.$$

2. On connaît qu'on peut calculer directement la somme S_n des puissances $n$ièmes des racines d'une équation au moyen des fonctions symétriques fondamentales par la formule de Waring

$$S_n = \sum (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r} \frac{n(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{r-1})!}{\lambda_1!\ \lambda_2!\ \cdots\ \lambda_{r-1}!} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_r^{\lambda_r},$$

où le signe Σ s'étend à toutes les valeurs entières, positives ou nulles des λ qui vérifient la relation

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + r\lambda_r = n.$$

En particulier, pour l'équation du deuxième dégré

$$z^2 - xz - p = 0,$$

on trouve

$$S_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n(n-k-1)!}{(n-2k)!\ k!} p^k x^{n-2k}$$

ce qui est précisément le polynome Φ_n.

On en deduit immédiatement

$$\Phi_n(x) = z_1^n + z_2^n$$

avec

$$2z_1 = x + \sqrt{x^2+4p}$$

$$2z_2 = x - \sqrt{x^2+4p}$$

3. D'après ce qui précède, l'équation (1) s'écrit aussi sous la forme

$$\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4p}}{2}\right)^n + \left(\frac{x-\sqrt{x^2+4p}}{2}\right)^n + q = 0.$$

Si l'on pose

(2) $$x = 2i\sqrt{p}\cos\theta, \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

il viendra

$$\cos n\theta = M,$$

où

$$M = -\frac{q}{2} i^{-n} p^{-n/2}.$$

On a d'ailleurs

$$\theta = \frac{1}{n} \arc\cos M,$$

et si l'on porte la valeur de θ dans cette équation, on trouve la solution de l'équation (1) suivante

$$(3) \qquad x = 2i\sqrt{p}\cos\frac{2k\pi + \arc\cos M}{n},$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

4. Nous allons montrer le parti qu'on peut tirer de ce qui précède, dans la résolution de l'équation du troisième et du quatrième degré.

Pour l'équation[1])

$$(4) \qquad x^3 + 3px + q = 0$$

la solution trigonométrique s'obtient habituellement en partant de la formule

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + p^3}},$$

si l'on pose

$$-\frac{q}{2} = \rho\cos\varphi, \qquad \frac{q^2}{4} + p^3 = -\rho^2\sin^2\varphi.$$

Mais en suivant la voie indiquée en § 3 on obtient directement la solution trigonométrique.

Dans ce cas, l'équation (4) s'écrit

$$\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4p}}{2}\right)^3 + \left(\frac{x - \sqrt{x^2 + 4p}}{2}\right)^3 + q = 0.$$

et par la transformation (2) on trouve

$$\cos 3\theta - \frac{q}{2ip^{3/2}} = 0,$$

d'où il suit

$$x = 2i\sqrt{p}\cos\frac{2k\pi + \arc\cos\frac{q}{2ip^{3/2}}}{3},$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2).$$

Soit enfin l'équation du quatrième degré

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0.$$

Par la transformation de Tchirnaüs,

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

cette équation se réduit à

$$x^4 + 4px^2 + 2p^2 + q = 0.$$

Par la même voie, nous obtenons, comme cas spécial de (3),

---

[1]) J. Serret, *Cours d'algèbre supérieure*, t. II, 1928, p. 455

$$x = 2i\sqrt{p}\cos\frac{2k\pi + \arc\cos - \frac{q}{2p^2}}{4}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

p et q étant exprimés en fonctions des coefficients a_n.

5. Nous allons maintenant donner un autre procédé fournissant la solution de l'équation (1) mettant à profit la propriété connue des fonctions Φ_n suivante

$$\Phi_n = x\,\Phi_{n-1} + p\,\Phi_{n-2}, \qquad \Phi_0 = 2, \qquad \Phi_1 = x.$$

Si l'on y fait

$$z - \frac{p}{z} = x, \tag{5}$$

on trouve

$$\Phi_n = z^n + \frac{(-p)^n}{z^n}$$

En portant cette valeur de Φ_n dans l'équation (1), on obtient une équation trinome de la forme

$$z^{2n} + qz^n + (-p)^n = 0.$$

La résolution de cette équation se ramène à celle de deux équations binomes

$$z^n = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - 4(-p)^n}.$$

En prenant le cas, où q et $(-p)^n$ sont réels et

$$\frac{q^2}{4} - 4(-p)^n < 0,$$

on peut poser

$$z^n = r(\cos\alpha \pm i\sin\alpha) \tag{6}$$

avec

$$\alpha = \arc\cos\left(-\frac{q}{2i^n p^{n/2}}\right), \qquad r = i^n p^{n/2}.$$

Les racines de l'équation (6) sont données par la formule

$$z = r^{1/n}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

Tenant compte de la transformation (5) et de la valeur donnant r, on obtient pour les racines de l'équation (1) les expressions

$$x = 2i\sqrt{p}\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \qquad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n = 1),$$

avec

$$\alpha = \pi - \arc\cos\frac{q}{2i^n p^{n/2}}.$$