SUR UNE ÉQUATION LINÉAIRE DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE RESOLUBLE PAR QUADRATURES

Ilija A. Šapkarev

1. B. S. Popov [1] a donné le probleme suivant:

Prouver que l'équation différentielle de Laplace

$$\sum_{i=0}^{2} (a_i x + b_i)\, y^{(2-i)} = 0, \tag{1}$$

pour $a_0 = 0$ on peut intégrer par quadratures, si les constantes a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 satisfont à la relation suivante

$$b_0 a_2^2 - a_1 a_2 b_1 + a_1^2 b_2 = k a_1^3, \tag{2}$$

où k est un nombre entier ou zéro.

Dans cet article nous allons démontrer que l'équation différentielle

$$[a_0 f(x) + b_0]\, y'' + [a_1 f(x) + b_1]\, y' + [a_2 f(x) + b_2]\, y = 0 \tag{3}$$

peut être résolu par quadratures, si les constantes $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ satisfont à la relation

$$\begin{aligned} &[a_0 b_2 + a_2 b_0 + (b_1 + a b_0) r + (a_0 b + a b_0)(a_0 a n + a_1 + 2r) n]^2 \\ &+ (a_0 b - b_1)(2r + a_1 - a_0 a)[a_0 b_2 + a_2 b_0 + (a_0 b + a b_0)(a_0 a n + 2r + a_1) n \\ &+ (a b_0 + b_1) r] + (2r + a_1 - a_0 a)^2 [b_0 b_2 + b_0 b (2n + 1) r + b_0 b (a_1 + a_0 a n) n] = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

pour $(2n + 1)^2 a_0^2 a^2 + 4 a_0 a_2 - a_1^2 \neq 0$, où

$$r_{1,2} = \frac{-(a_1 + 2 a_0 a n) \pm \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}}{2}, \tag{5}$$

n est un nombre naturel ou zéro et la fonction $f(x)$ est déterminée par la relation

$$f'(x) = a f(x) + b, \tag{6}$$

avec a,b des constantes arbitraires, ou par les relations

$$(7) \qquad (2n+1)^2 a_0^2 a^2 + 4a_0 a_2 - a_1^2 = 0,$$
$$2n(n+1)a_0 a(a_0 b + ab_0) + 2(a_0 b_2 + a_2 b_0) + (ab_0 + b_1)(a_0 a - a_1) = 0.$$

Puis nous démontrons que le criterium (2) pour l'intégrabilité de l'équation (1), peut être obtenu de la relation (4), si l'on prend $a = 0$, $a_0 = 0$, $b = 1$.

2. L'équation (3), par le changement

$$y = z \exp\left(\int \frac{rf+s}{a_0 f + b_0} dx\right),$$

où r et s sont des constantes, se transforme en équation

$$(8) \qquad (a_0 f + b_0)^2 z'' + (a_0 f + b_0)[(2r + a_1) f + 2s + b_1] z'$$
$$+ [(r^2 + a_1 r + a_0 a_2) f^2 + (2rs + a_1 s + b_1 r + a_2 b_0 + a_0 b_2) f$$
$$+ (s^2 + b_1 s + b_0 b_2 + (rb_0 - a_0 s) f'] z = 0.$$

Cette équation, par le changement $f(x) = t$, où $f(x)$ satisfait à la relation (6), devient

$$(9) \quad (a_0 t + b_0)^2 (at+b)^2 z'' + (a_0 t + b_0)(at+b)[(2r + a_1 + a_0 a) t + 2s + b_1 + ab_0] z'$$
$$+ \{(r^2 + a_1 r + a_0 a_2) t^2 + [2rs + a_1 s + b_1 r + a_2 b_0 + a_0 b_2 + a(b_0 r - a_0 s)] t$$
$$+ s^2 + b_1 s + b_0 b_2 + b(b_0 r - a_0 s)\} z = 0.$$

Si l'on pose

$$r^2 + a_1 r + a_0 a_2 = pa_0 a,$$
$$(10) \qquad 2rs + a_1 s + b_1 r + a_2 b_0 + a_0 b_2 + a(b_0 r - a_0 s) = p(a_0 b + ab_0),$$
$$s^2 + b_1 s + b_0 b_2 + b(b_0 r - a_0 s) = pb_0 b,$$

où p est une constante arbitraire, la dernière équation devient

$$(11) \quad [a_0 at^2 + (a_0 b + ab_0) t + b_0 b] z'' + [(2r + a_1 + a_0 a) t + 2s + b_1 + ab_0] z' + pz = 0.$$

En différentiant cette équation n-fois, on obtient l'équation

$$[a_0 at^2 + (a_0 b + ab_0) t + b_0 b] z^{(n+2)}$$
$$+ [(2r + a_1 + a_0 a + 2na_0 a) t + 2s + b_1 + ab_0 + n(a_0 b + ab_0)] z^{(n+1)}$$
$$+ [p + n(2r + a_1) + n^2 a_0 a] z^{(n)} = 0.$$

La dernière équation et avec alle aussi l'équation (3), peut être réduite aux quadratures, si l'on a

$$p + n(2r + a_1) + n^2 a_0 a = 0.$$

Les relationes (10), d'après la dernière relation, deviennent

$$r^2 + (a_1 + 2na_0a)r + n^2 a_0^2 a^2 + na_0a_1a = 0,$$

(12)
$$(2r + a_1 - a_0a)s + (a_0b + ab_0)(a_0 an + 2r + a_1)n$$
$$+ a_0 b_2 + a_2 b_0 + (b_1 + ab_0) r = 0,$$
$$s^2 + (b_1 - a_0b)s + b_0b(2n + 1)r + b_0 b_2 + b_0b(a_1 + a_0 an) n = 0.$$

De la première équation de (12), il suit (5), et par élimination de s, de deux dernières équations (12), pour $r \neq (a_0a - a_1)/2$, on obtient la relation (4). Si $r = \frac{(a_0a - a_1)}{2}$, de deux premières équantions de (12), on obtiennent les relations (7).

3.1. Pour $a_0 = 0$, de la relation (5) il suit $r_1 = 0$ et $r_2 = -a_1$. La relation (4), pour $a_0 = 0$ et $r_1 = 0$, devient

$$a_1^2 b_2 - a_1 b_1 a_2 + a_2^2 b_0 = -na_1^3.$$

La même relation, pour $a_0 = 0$, $r_2 = -a_1$, devient

$$a_1^2 b_2 - a_1 b_1 a_2 + a_2^2 b_0 = (n + 1) a_1^3.$$

De deux dernière relations il suit la relation (2).

3.2. Si l'on prend $a = 0$, $b = 1$ c'est-à-dire $f'(x) = 1$, $f(x) = x$ l'équation (3) devient

$$(a_0x + b_0)y'' + (a_1x + b_1)y' + (a_2x + b_2) y = 0$$

et elle peut être réduite aux quadratures, si les constantes a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 satisfont à la relation

$$[a_0 b_2 + a_2 b_0 + b_1 r + a_0 (2r + a_1)n]^2$$
$$+ (a_0 - b_1)(2r + a_1)[a_0 b_2 + a_2 b_0 + b_1 r + a_0 (2r + a_1)n]$$
$$+ (2r + a_1)^2 [b_0 b_2 + b_0 (2n + 1)r + b_0 a_1 n] = 0.$$

3.3. Mais, si l'on prend $b = 0$ c'est-à-dire $f'(x) = af(x)$, $f(x) = e^{ax}$, l'équation (3) devient

$$(a_0e^{ax} + b_0)y'' + (a_1e^{ax} + b_1)y' + (a_2e^{ax} + b_2) y = 0$$

et elle peut être réduite aux quadratures, si les constantes a, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 satisfont à la relation

$$[a_0 b_2 + a_2 b_0 + (ab_0 + b_1) r + ab_0 (a_0 an + 2r + a_1)n]^2$$
$$+ b_1 (a_0a - 2r - a_1)[a_0 b_2 + a_2 b_0 + (ab_0 + b_1)r + ab_0 (a_0 an + 2r + a_1) n]$$
$$+ b_0 b_2 (2r + a_1 - a_0a)^2 = 0.$$

RÉFÉRENCES

[1] B. S. Popov, Probleme 19, Bulletin de la Société des mathématiciens et des physiciens de la R. P. de Macédoine, Tome II (1951) p. 146, Skopje.

Илија А. Шапкарев

ЗА ЕДНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ВТОР РЕД ЧИЈ ОПШТ ИНТЕГРАЛ СЕ ДОБИВА СО КВАДРАТУРИ

Содржина

Во овој труд се покажува дека диференцијалната равенка (3) може да се реши со квадратури, ако меѓу константите $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ постои релацијата (3), каде што r е определен со (5), а n е природен број или нула. Притоа функцијата $f'(x)$ е определена со равенката $f'(x) = af(x)+b$, при што a и b се произволни константи.

Понатаму се покажува дека од условот за интеграбилност на диференцијалната равенка (3) се добива и условот за интеграбилност на равенката (1).