Илија А. ШАПКАРЕВ

ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПОВИСОК РЕД СВОДЛИВИ НА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПОНИЗОК РЕД

I

Во [1], меѓу другото, Д. С. Митриновиќ има показано дека диференцијалната равенка

(1) $$y^{(n+k)} - f(x)\, L[y] = 0,$$

каде што

$$L[y] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! \binom{n}{k} x^{n-k} y^{(n-k)},$$

со смената $L[y]=z$, се сведува на линеарна диференцијална равенка од к-ти ред во однос на z. Секој интеграбилен случај на таа равенка претставува и интеграбилен случај на диференцијалната равенка (1).

Ние во овој труд покажуваме дека поопштата линеарна диференцијална равенка

(2) $$y^{(n+k)} - f(x)\, L[y] = 0,$$

каде што

$$L[y] = P_n\, y^{(n)} - P'_n\, y^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n P_n^{(n)} y,$$

а $P_n(x)$ е полином од степен n, со смената $L[y]=z$, се сведува на линеарната диференцијална равенка од ред k

(3) $$A_k - P_n(x)\, f(x)\, z = 0,$$

каде што

$$A_i = A'_{i-1} - \frac{P_n'}{P_n} A_{i-1} \ (i = 2, 3, \ldots, \text{к}),\ A_1 = A_0',\ A_0 = z.$$

Понатака покажуваме дека со помош на општиот интеграл од равенката (3) се добива општиот интеграл на равенката (2).

II

За тоа да го покажеме нека ставиме

$$
\begin{aligned}
A_0 &= z,\\
A_1 &= A_0'\\
A_2 &= A_1' - \frac{P_n'}{P_n} A_1,\\
&\vdots\\
A_i &= A_{i-1}' - \frac{P'_n}{P_n} A_{i-1},\\
&\vdots\\
A_k &= A_{k-1}' - \frac{P_n'}{P_n} A_{k-1}
\end{aligned}
$$

и имајќи ја во вид релацијата $L[y]=z$, со диференцирање, добиваме

$$
\begin{aligned}
A_0 &= L[y],\\
A_1 &= P_n y^{(n+1)},\\
A_2 &= P_n y^{(n+2)},\\
&\vdots\\
A_k &= P_n y^{(n+k)}.
\end{aligned}
$$

Елиминацијата на $y^{(n+k)}$ од последната равенка и од равенката (2), ја дава равенката (3).

Нека биде општиот интеграл на равенката (3)

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \cdots + C_k z_k,$$

каде што $z_1, z_2, \ldots, z_k$ се k нејзини линеарно независни партикуларни интеграли.

Во врска со воведената смена општиот интеграл на равенката (2) претставува општ интеграл на равенката

(4) $$L[y] = z.$$

Бидејќи општиот интеграл на равенката $L[y] = 0$ е [2]

(5) $$y = \sum_{k=1}^{n} A_k \left[x^k + \frac{(-1)^{k+1} a_{n-k}}{\binom{n}{k} a_n} \right]$$

каде што $A_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ се константи, а $P_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, општиот интеграл на равенката (4) се добива од општиот интеграл (5), ако на него се примени Лагранжовата метода на варијација на константи.

За $k = 2, 3, 4$ равенката (3) станува соодветно

$$P_n z'' - P_n' z' - P_n^2 f z = 0, \tag{6}$$

$$P_n^2 z''' - 2P_n P_n' z'' + (2P_n'^2 - P_n P_n'') z' - P_n^3 f z = 0, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} P_n^3 z^{(4)} - 3P_n^2 P_n' z''' - 3(P_n^2 P_n'' - 2P_n P_n'^2) z'' \\ - (P_n^2 P_n''' - 6P_n P_n' P_n'' + 6P_n'^3) z' - P_n^4 f z = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

III

Ако земеме $k = 2, n = 2, P_2 = ax^2 + bx + c, f = - P_2''/P_2^2$, равенката (6) станува

$$(ax^2 + bx + c) z'' - (2ax + b) z' + 2az = 0$$

и нејзиниот општ интеграл е [2]

$$z = C_1 (ax^2 - c) + C_2 (2ax + b).$$

Во врска со тоа општиот интеграл на равенката

$$(ax^2 + bx + c) y'' - (2ax + b) y' + 2ay = C_1 (ax^2 - c) + C_2 (2ax + b),$$

кој се добива со примена на Лагранжовата метода на варијација на константи на општиот интеграл

$$y = A_1 (ax^2 - c) + A_2 (2ax + b)$$

на нејзината соодветна хомогена равенка, претставува општ интеграл на равенката

$$(ax^2 + bx + c)^2 y^{(4)} - 2a [(ax^2 + bx + c) y'' - (2ax + b) y' + 2ay] = 0.$$

Ако пак сега земеме $k = 2, n = n, P_n = (ax + b)^n, f = -(cx + d)/(ax + b)^{n+1}$, равенката (6) станува

$$(ax + b) z'' - naz' + (cx + d) z = 0.$$

Сите случаи на интеграбилност на оваа диференцијална равенка [3] се и случаи на интеграбилност на диференцијалната равенка

$$\begin{aligned} (ax + b)^{n+1} y^{(n+2)} - (cx + d) [(ax + b)^n y^{(n)} - na (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} \\ + \cdots + (-1)^n n! a^n y] = 0. \end{aligned}$$

Ако равенката (6) се спореди со други равенки, кои можат да се добијат од неа, ако се погодно изберат $P_n(x)$ и $f(x)$, можат да се добијат и други случаи на интеграбилност на равенката (2). Во таа смисла можат да бидат искористени равенките во познатата книга од Э. Камке [4] и тоа: ч. III, 2.241; 2.242; 2.245; 2.265; 2.324; 2.361; 2.362; 2.391; 2.399 и други.

Во [5] е покажано дека диференцијалната равенка

$$z''' + (P + R)\,z'' + [P' + PR - (Q' + PQ + Q^2)]\,z'$$
$$- [R(Q' + PQ + Q^2) + (Q' + PQ + Q^2)']\,z = 0$$

може да се реши со квадратури.

Ако во неа ставиме $P = -2P_n'/3P_n$, $Q = P_n'/3P_n$, $R = -4P_n'/3P_n$, таа станува.

$$z''' - 2\frac{P_n'}{P_n}z'' + \left(2\frac{P_n'^2}{P_n^2} - \frac{P_n''}{P_n}\right)z' + \left(\frac{5}{3}\,\frac{P_n'\,P_n''}{P_n^2} - \frac{1}{3}\,\frac{P_n''}{P_n} - \frac{40}{27}\,\frac{P_n'^3}{P_n^3}\right)z = 0.$$

Равенката (7), ако се спореди со последнава равенка, се добива

$$f(x) = \frac{1}{3}\,\frac{P_n'''}{P_n^2} - \frac{5}{3}\,\frac{P_n'\,P_n''}{P_n^3} + \frac{40}{27}\,\frac{P_n'^3}{P_n^4}$$

и во овој случај таа може да се интегрира.

Во врска со неа ќе може да се интегрира и равенката

$$P_n^4\,y^{(n+3)} + \left(\frac{5}{3}P_n P_n' P_n'' - \frac{1}{3}P_n^2 P_n''' - \frac{40}{27}\,P_n'^3\right)L[y] = 0.$$

BIBLIOGRAFIJA

[1] D. S. Mitrinović, Compléments au traité de Kamke V. Publications de la Fakulté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, serie: Mathématiques et physique, No 11 (1957) p. 1—10.

[2] I. A. Šapkarev, Sur une équation différentielle linéaire d'ordre n dont la solution générale est un polynôme de n-ème degré, Математички весник 1 (16), 1964, стр. 49—50.

[3] I. A. Šapkarev, Sur une équation linéaire différentielle de second ordre résoluble par quadratures, Bull. Soc. Math. Phys. Macedoine 19 (1968) p. 5—8.

[4] Э. Камке, Спровочник по обикновенным дифференцияльным уравнениям, 1961, Москва.

[5] I. A. Šapkarev, Über die Integration der linearen Differential gleichungen dritter Ordnung in gecshlossener Form, Glasnik matematički, Tom 5 (25) No 1 (1970).

Ilija A. Šapkarev

ÉQUATIONS LINÉAIRE DIFFERÉNTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR RÉDUCTIBLE AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE INFÉRIEUR

(Résumé)

Dans cet article on démontre que l'équation (2), se réduit à l'équation (3), suivie de l'équation linéaire $L[y]=z$.

Puis on démontre que toutes les fois où l'équation (3) s'intégre, il en sera de même de l'équation (2).