МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 3 (2018), 77 – 83
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-3.html

НУМЕРИЧКА АПРОКСИМАЦИЈА НА ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА ОД РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА СО ПОМОШ НА ИМАГИНАРЕН ЧЕКОР

Филип Николовски [1]

При примената на математички методи во пракса често пати се соочуваме со услови и ограничувања кои не се својствени за теориската анализа. Така на пример, податоците добиени со мерење при изведување експерименти претставуваат дискретно множество податоци, па техниките од диференцијанлото и интегралното сметање не се директно применливи. Во вакви и слични ситуации природно се налага потребата од апроксимација на одредени величини кои во теорискиот случај релативно едноставно би можеле точно да се пресметаат. Во овој труд подетално ќе се осврнеме на една апроксимација на првиот извод на функција од една реална променлива, ќе ја установиме точноста на апроксимацијата, но и ќе ја споредиме нејзината ефикасност со една од „класичните“ апроксимации на изводот.

1. ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА И НЕГОВА „КЛАСИЧНА“ АПРОКСИМАЦИЈА

Прво ќе го дефинираме поимот извод на функција во точка. Ја имаме следнава дефиниција, [1].

Дефиниција. Нека P е отворен интервал и нека $f : P \to \mathbb{R}$ е реална функција определена на P. Функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во точката $x_0 \in P$ ако постои конечен лимес

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

Овој реален број се нарекува **извод** на функцијата $f(x)$ во точката x_0 и се бележи со $f'(x_0)$.

Да забележиме дека лимесот (1.1) е еквивалентен со

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2}$$

Лимесот (2) е попогоден за воведување на апроксимациите, па затоа понатаму ќе работиме со него.

Иако за елементарните функции постојат формули за обликот на изводот, неговото аналитичкото пресметување често пати е тешко и непрактично. Постојат и случаи кога функцијата која се диференцира е позната само на дискретно множество точки (на пример точки во кои се врши некакво мерење), па воопшто и не може да стане збор за наоѓање на точниот извод. Во вакви и слични случаи постои можност изводот да го апроксимираме со одредена точност.

Имајќи ја предвид дефиницијата на извод во точка (2), за мали вредности на параметарот $h > 0$ ја добиваме следнава апроксимација:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_{FD}(x_0) \tag{3}$$

Оваа апроксимација се нарекува *апроксимација со предна разлика* и јасно дека колку h е помало, таа е поблиску до точната вредност на изводот. За да ја оцениме нејзината точност, од Тејлоровиот развој на f во околина на x_0 имаме дека

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + O\left(h^2\right),$$

од каде што следува дека

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + O(h).$$

Да напомeнеме дека ако за две низи ненегативни броеви (a_k) и (b_k) постои број $C > 0$ таков што за секој $k \in \mathbb{N}$ важи $a_k \le C \cdot b_k$, тогаш пишуваме $a_k = O\left(b_k\right)$. Конечно, за грешката на апроксимацијата добиваме

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right| \le O(h) \tag{4}$$

За грешката при апроксимација на првиот извод дадена со (4) велиме дека е *грешка од прв ред*.

На сличен начин може да извршиме апроксимација на изводот со помош на *задна разлика* дадена со

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} \tag{5}$$

кај која грешката е исто така од прв ред (следи од Тејлоровиот развој, слично како кај грешката на апроксимацијата со предната разлика). За да ја подобриме апроксимацијата, т.е. за да ја намалиме грешката, повторно поаѓаме од Тејлоровиот развој на f во околина на x_0. Ако $h>0$ е мал чекор, тогаш

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h\cdot f'(x_0)+\frac{h^2}{2}\cdot f''(x_0)+O\left(h^3\right)$$
$$f(x_0-h)=f(x_0)-h\cdot f'(x_0)+\frac{h^2}{2}\cdot f''(x_0)+O\left(h^3\right)$$

Одземајќи го вториот од првиот израз добиваме

$$f(x_0+h)-f(x_0-h)=2h\cdot f'(x_0)+O\left(h^3\right),$$

од каде што следува дека

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}+O\left(h^2\right) \tag{6}$$

Оваа апроксимација на првиот извод се нарекува *апроксимација со центрирана разлика*, а очигледно е дека грешката во овој случај е од втор ред, бидејќи

$$\left|f'(x_0)-\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}\right|\le O\left(h^2\right).$$

Така, за мали вредности на чекорот h првиот извод може да се апроксимира со

$$f'(x_0)\approx\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'_{CD}(x_0) \tag{7}$$

Апроксимациите (3), (5) и (7) се нарекуваат *апроксимации со конечни разлики* и содржат одземање во броителот; при имплементација на овие апроксимации во нумерички алгоритми, во случаи кога чекорот h е мал, броителот може да биде еднаков на нула во конечната аритметика којашто ја користат компјутерите. Ова, пак, води кон погрешна апроксимација на изводот, што секако е непожелно. Затоа препорачливо е користење на чекор од ред $\approx\sqrt{10^{-16}}=10^{-8}$, [4]. За да се избегне ваков исход, во продолжение ќе опишеме еден начин за апроксимација на првиот извод кај кој нема одземање коешто може да води до погрешни резултати.

2. АПРОКСИМАЦИЈА НА ИЗВОД СО ПОМОШ НА ИМАГИНАРЕН ЧЕКОР

Нека f е аналитичка функција од комплексна променлива $z = x + iy$ $(i^2 = -1)$ чија рестрикција на реалната права е реална функција. За $x, h \in \mathbb{R}$ и $h > 0$, според [5], функцијата има Тејлоров развој

$$\begin{aligned} f(x+ih) &= f(x) + ih \cdot f'(x) + \frac{(ih)^2}{2} \cdot f''(x) + \frac{(ih)^3}{6} \cdot f'''(x) + \ldots \\ &= f(x) + ih \cdot f'(x) - \frac{h^2}{2} \cdot f''(x) - i \cdot \frac{h^3}{6} \cdot f'''(x) + \ldots \end{aligned}$$

од каде што следува дека

$$\mathrm{Im}\big(f(x+ih)\big) = h \cdot f'(x) - \frac{h^3}{6} \cdot f'''(x) + \ldots,$$

т.е. $\frac{1}{h} \cdot \mathrm{Im}\big(f(x+ih)\big) = f'(x) - \frac{h^2}{6} \cdot f'''(x) + \ldots = f'(x) + O\big(h^2\big).$

Оттука добиваме формула за апроксимација на првиот извод со помош на комплексен чекор дадена со

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \cdot \mathrm{Im}\big(f(x+ih)\big) = f'_{CS}(x_0) \tag{8}$$

при што грешката е определна со

$$\left| f'(x) - \frac{1}{h} \cdot \mathrm{Im}\big(f(x+ih)\big) \right| \leq O\big(h^2\big).$$

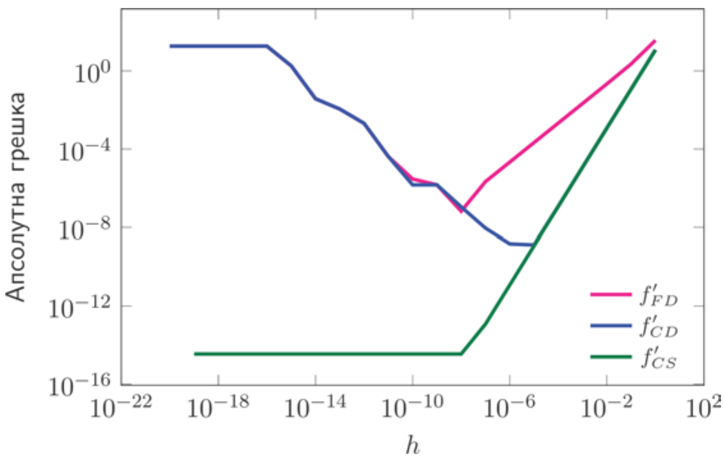
Иако грешката кај оваа апроксимација е од втор ред, исто како и кај апроксимацијата со центрирани разлики (7), во овој случај нема можност за одземање на величини со слична големина, па се избегнува случајот апроксимацијата да даде резултат нула и во случаи кога тоа е неточно. Дополнително, за апроксимација на првиот извод со грешка од втор ред во овој случај е потребно само едно пресметување на вредноста на функцијата (за истата грешка со конечни разлики потребни се две). Од друга страна, апроксимацијата (8) зависи од можноста реална функција да се прошири до аналитичка функција од комплексна променлива чија рестрикција на реалната оска е реална функција. Ова секако не е секогаш можно да се направи на начин кој е корисен и едноставен, но за најголем дел од функциите кои често се сретнуваат, постои вакво проширување.

3. ПРИМЕРИ И СПОРЕДБА НА АПРОКСИМАЦИИТЕ

Ефикасноста на апроксимациите ќе ја споредиме на функцијата $f(x)=x^{4.5}$ за вредноста на изводот во точката $x_0=1.5$; точната вредност на 13 децимали е $f'(1.5)\approx 18.6008127342598$. Во Табелата 1 се дадени вредностите на апроксимациите на изводот добиени со помош на предна разлика ($f'_{FD}(x_0)$), центрирана разлика ($f'_{CD}(x_0)$) и со комплексен чекор ($f'_{CS}(x_0)$) за различни вредности на h.

h	f'_{FD}	f'_{CD}	f'_{CS}
10^{-1}	20.8945023805188	18.7213936526035	18.4802720028588
10^{-2}	18.8190308404210	18.6020183445019	18.5996071280363
10^{-3}	18.6225257415442	18.6008247903402	18.6008006781776
10^{-4}	18.6029829496359	18.6008128548165	18.6008126136989
10^{-10}	18.6008097813328	18.6008142222249	18.6008127342598
10^{-14}	18.5629289717326	18.5629289717326	18.6008127342598
10^{-15}	20.4281036531029	20.4281036531029	18.6008127342598

Табела 1. Апроскимација на $f'(1.5)$ со различни нумерички методи.



Слика 1. Зависност на апсолутната грешка на апроксимациите од големината на чекорот h.

Од сликата и табелата јасно се гледа дека апроксимацијата со комплексен чекор е најдобра. До големина на чекорот $h \approx 10^{-6}$ апроксимацијата со центрирана разлика и апроксимацијата со комплексен чекор се со точност од ист ред (што и се очекува), но за помала големина на чекорот грешката кај апроксимацијата со центрирана разлика почнува да расте (бидејќи одземањето во броителот дава сè понепрецизни резултати), а кај апроксимацијата со комплексен чекор продолжува да се намалува. Апроксимацијата со предната разлика е со најмала точност од трите апроксимации кои се споредуваат.

Една природна насока за понатамошно обопштување на апроксимацијата со комплексен чекор е нејзина примена во случај на функции со повеќе променливи, во контекст на апроксимација на градиентот , [2]. Голем број нумерички алгоритми користат изводи/градиенти во рамки на итеративните процеси кои ги опишуваат, па подобрената апроксимација неминовно води и до подобра работа на самите алгоритми. Дополнително, во [3] е направена имплементација на апроксимацијата на извод со помош на комплексен чекор во околина на шум, а оваа постапка е применета во оптимизациони алгоритми кои користат само информации за функцијата на цел. И во овој контекст, апроксимацијата со комплексен чекор покажува подобри резултати од апроксимациите со конечни разлики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Шекутковски, *Математичка Анализа 1: низи, функции, лимеси, изводи, интеграли*, Просветно Дело, 1996.

[2] K. L. Lai, J. L. Crassidis, *Extensions of the first and second complex-step derivative approximations*, J. Comput. Appl. Math. 219 (1) 276–293 (2008).

[3] F. Nikolovski, I. Stojkovska, *Complex-step derivative approximation in noisy environment*, J. Comput. Appl. Math. 327, 64–78 (2018).

[4] J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical Optimization (second edition)*, Springer, 2006.

[5] W. Squire, G. Trapp, Using Complex Variables to Estimate Derivatives of Real Functions, SIAM Rev., 40 (1), 110–112 (1998).

1 Меѓународни Училишта НОВА,
Прашка 27, (1000) Скопје, Р. Македонија
e-mail: filipnikolovski@gmail.com; filip.nikolovski@nova.edu.mk

Примен: 07. 03. 2018
Поправен: 13. 06. 2018
Одобрен: 16. 06. 2018

Објавен на интернет: 28.08.2018