МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 10 (2021), 107 – 119
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-10.html

ЕГИПЕТСКИ ДРОПКИ

Маријана Тошевска Мартиновиќ [1]

Во овој труд ќе споделам занимливости и методи за добивање на Египетските дропки. Соочена со предизвикот за креирање на примамлива лекција за дропки, се впуштив во читање на таа тема. Сте се запрашале ли како Египќаните ги запишувале броевите? А, како пак ги запишувале дропките? Од друга страна, навидум две далечни прашања: дали збирот на две различни дропки со броител 1 и именител позитивен цел број, (кои ќе ги нарекуваме *единични дропки*) е секогаш единична дропка? ([4]) Дали е можно секоја единична дропка да ја претставиме во вид на збир од две единични дропки? ([4]) Каква е врската помеѓу првиот пар прашања и вториот пар прашања?

1. ОД ИСТОРИЈАТА ЗА ЕГИПЕТСКИТЕ ДРОПКИ

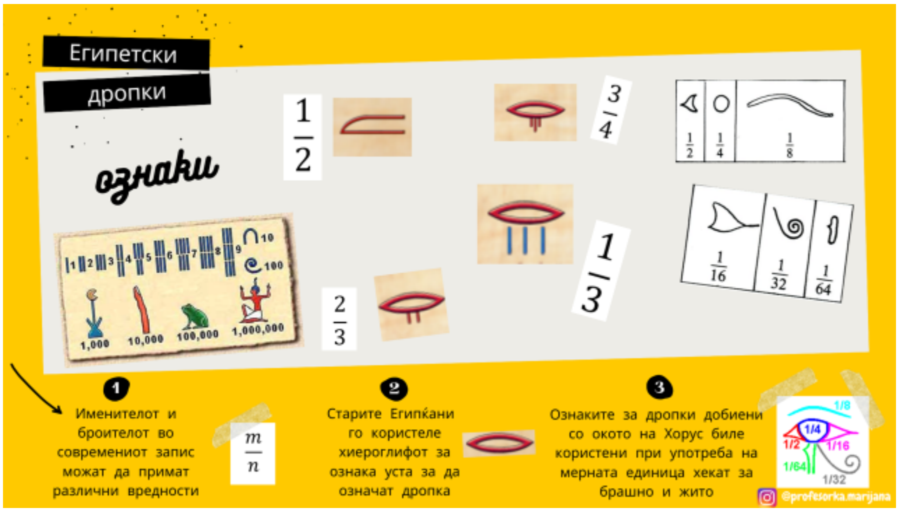
Да започенеме со разгледување на проблемот на поделба на 7 леба на 10 лица (Слика 1). Навидум дури и да нема проблем, едноставно решението е $\frac{7}{10}$.

Слика 1. Визуелен приказ на седумте леба и десетте Египќани.

Но што доколку живеевте пред 4000 години и пред вас се постави вакво прашање? Дали можеби би сакале да бидете попрактични со вашето делење, каде што секој леб го делите на 10 еднакви делови и потоа такви седум десетинки да ги доделите на секое од лицата? ([8]) Постојат записи коишто ни укажуваат за методи на токму такви делби. Со тоа ќе навлеземе во Египетските дропки.

За Египетските дропки, како и целосната египетска аритметика и геометрија, дознаваме преку неколкуте папируси и натписи кои останале зачувани до денешно време. Нашите сознанија за египетската математика се должат во голема мера на два египетски папируса. Едниот е Рајндовиот папирус, а вториот е Московскиот папирус, [5]. Ќе се осврнам на Рајндовиот папирус. Рајндовиот папирус датира од 1550 година п.н.е., [11]. Бил напишан од писарот Ахмес. Од напишаното во папирусот може да се заклучи дека содржината била препишана од постар текст, кој датирал од 1850 година п.н.е. Самото име – Рајндов папирус, доаѓа од неговиот пронаоѓач Александар Рајнд, кој го купил во 1850-тите години во Египет. Но, кај него бил само дел од оригиналниот папирус. Фрагменти од истиот папирус се нашле и кај египтологот Едвин Смит. По смртта на Смит, во 1906 година, неговата колекција била изложена. Тогаш е откриена поврзаноста на двата папируса. Неговиот папирус е медицински, но некои од фрагментите биле препознаени дека припаѓаат на Рајндовиот папирус, [2]. Папирусот содржи практични проблеми од секојдневието, како поделба на векни леб, на жито, пијалаци, пресметување на волумен на цилиндар, разни геометриски задачи, но и задачи со аритметичка и геометриска прогресија. Папирусот содржи повеќе од 87 задачи, но ние тука ќе се фокусираме на дел од нив. Во некои од задачите дел од решението ги вклучува дропките: $\frac{1}{194},\frac{1}{388},\frac{1}{679},\frac{1}{776}$. За такви количини не е веројатно да кажеме дека биле од практична примена, па можеби целта и развојот на египетската математика биле можеби и на научно-теоретско ниво, повисоко од практичното [2].

Да се запознаеме со ознаките кои биле користени. Именителот и броителот во современата математика, можат да имаат различни вредности. Но, тоа не бил случајот со Египетските дропки. Египќаните немале запис со броител и именител во форма $\frac{m}{n}$ како денешната форма. Тие го користеле хиероглифското писмо и ознаките за броеви заедно со хиероглифот со значење уста, за да претставaт дропка, [2]. Освен хиероглифското писмо, кое првично го користеле за светите натписи, а потоа и за пишување на папируси, тие користеле и хиеретско (поедноставено) писмо кога пишувале административни и слични текстови, [10]. Во хиеретското писмо, тие користеле точка над бројот (наместо претходно спомената уста) за да означат дропка, [2].



Слика 2. Некои од ознаките за броеви и дропки на Старите Египќани.

Кај Египетските дропки броителот најчесто е 1, додека именителот е тој што ја менува вредноста. Исклучоци се записите за дропките: $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$, [2]. Хиероглифот за дропката за $\frac{1}{2}$ е половина векна леб. Освен овие ознаки за дропки, тие ги користеле и таканаречени делови од Окото на Хорус, при употреба на мерната единица хекат за брашно и жито, [2]. Тие претставуваат дропки со именител степен со основа 2, [5]. Египќаните користеле декаден броен систем. На Слика 2 се прикажани ознаките за броевите од еден до десет, како и за 100, 1000, 10000, 100000 и 1000000. Занимливо е тоа што немале претходно утврдена унифицирана насока на пишувањето, за разлика од нашето пишување денеска од лево кон десно, [3]. Така, на пример, за да се прочита бројот

321, а да се разликува од 123, требало да се земат предвид повеќе фактори. Да забележиме дека во модерната математичка литература, поимот за Египетски дропки не се совпаѓа со Египетските дропки од древните папируси. Тоа пред сè, се должи на фактот дека Старите Египќани користеле ознаки за дропки различни од единичните, како што погоре ја споменавме на пример дропката $\frac{2}{3}$. Според современата математичка терминологија, Египетски дропки се сума на исклучиво различни единични дропки, т.е. дропки со броител 1, а именител позитивен цел број. Во понатамошниот текст под *Египетска дропка* ќе подразбираме *репрезентација на нескратлива дропка како сума на различни единични дропки.*

2. АЛГОРИТМОТ НА ФИБОНАЧИ

Постојат повеќе методи и начини на добивање Египетски дропки. Првиот начин кој ќе го разгледаме е *Фибоначиевиот алгоритам*, или, таканаречениот *алчен алгоритам*. Тој е опишан во делото „Книга за пресметувањето“ (Liber Abaci), издадена во 1202 година, чиј автор е Леонардо од Пиза познат како Фибоначи (1170 – 1240/1250). Тој, како син на трговец, имал прилика често да патува во Египет, па имал можност да се запознае со египетската математика, [8].

Пример 1. Да ја претставиме дропката $\frac{5}{17}$ со користење на алгоритмот.

Чекор 1. За да ја добиеме првата дропка од збирот, тргнуваме од дадената $\frac{5}{17}$. Целта ни е да го зголемиме именителот, т.е. да го доведеме до број кој ќе биде делив со броителот. Почнуваме од $\frac{5}{18}$, но 18 не е делив со 5, па продолжуваме со $\frac{5}{19}$. Но, ниту 19 не е делив со 5, па ја земаме следната дропка, $\frac{5}{20}$. Очигледно, 20 е делив со 5. Доколку ја скратиме оваа дропка добиваме $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$. Досега, имаме добиено $\frac{5}{17}=\frac{1}{4}+?$.

<u>Чекор 2.</u> Во следниот чекор треба да дознаеме уште колку ни недостасува до $\frac{5}{17}$, што значи дека треба $\frac{5}{17}-\frac{1}{4}=\frac{20}{68}-\frac{17}{68}=\frac{3}{68}$.

<u>Чекор 1 (вторпат).</u> $\frac{5}{17}=\frac{1}{4}+\frac{3}{68}$, но не застануваме тука, бидејќи $\frac{3}{68}$ не е единична дропка. Пак го применуваме чекорот 1, го зголемуваме именителот од 68, на 69, т.е. $\frac{3}{69}=\frac{1}{23}$ и сега сме подготвени за повторна примена на Чекор 2.

<u>Чекор 2 (вторпат).</u> $\frac{3}{68}-\frac{1}{23}=\frac{69}{1564}-\frac{68}{1564}=\frac{1}{1564}$ и овде застануваме затоа што добивме дропка со броител 1, [8].

Да сумираме, нашата дропка е

$$\frac{5}{17}=\frac{1}{4}+\frac{1}{23}+\frac{1}{1564}.$$

Треба да забележиме дека овој алгоритам нуди решение, но не секогаш тоа ќе биде најкраткото можно, ниту со најмалите именители.

Пример 2. Да ја претставиме дропката од почетниот пример $\frac{7}{10}$ со користење на алгоритмот.

<u>Чекор 1.</u> Како во претходниот пример, тргнуваме од дадената $\frac{7}{10}$. Повторно, целта ни е да го зголемиме именителот, т.е. да го доведеме до број којшто ќе биде делив со броителот. Почнуваме од $\frac{7}{10}$, но 10 не е делив со 7. Продолжуваме со $\frac{7}{14}$, бидејќи 14 е следниот број делив со 7 имаме $\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$. Досега добивме $\frac{7}{10}=\frac{1}{2}+?$.

<u>Чекор 2.</u> Во следниот чекор треба да дознаеме уште колку недостасува до $\frac{7}{10}$, што значи дека треба: $\frac{7}{10}-\frac{1}{2}=\frac{7}{10}-\frac{5}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$. Во овој

пример како што можеме да забележиме немаме потреба од повторување на чекорите. Го добивме претставувањето $\frac{7}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$.

Пример 3. Да ја претставиме дропката $\frac{2}{21}$ со користење на алчниот алгоритам на Фибоначи.

Чекор 1. За да ја добиеме првата дропка од збирот, тргнуваме од дадената $\frac{2}{21}$. Целта ни е да го зголемиме именителот, т.е. да го доведеме до број којшто ќе биде делив со броителот. Почнуваме од $\frac{2}{21}$, но 21 не е делив со 2. Следниот број што е делив со 2 е 22, па ја добиваме $\frac{2}{22}$. Доколку ја скратиме оваа дропка добиваме $\frac{2}{22}=\frac{1}{11}$. Досега, имаме добиено $\frac{2}{21}=\frac{1}{11}+?$.

Чекор 2. Во следниот чекор треба да дознаеме уште колку ни недостасува до $\frac{2}{21}$, што значи дека треба да одземеме

$$\frac{2}{21}-\frac{1}{11}=\frac{2\cdot 11}{231}-\frac{1\cdot 21}{231}=\frac{22}{231}-\frac{21}{231}=\frac{1}{231}.$$

Уште еднаш се сретнавме со Фибоначиев алгоритам во кој нема потреба од повторување на итеративниот процес. Да сумираме, нашата дропка е

$$\frac{2}{21}=\frac{1}{11}+\frac{1}{231}.$$

3. ДРОПКИ ОД ВИДОТ $\frac{2}{n}$

Во Рајндовиот папирус, постои цела секција посветена токму на дропките од видот $\frac{2}{n}$ (каде што спаѓа и дропката $\frac{2}{21}$). На Сликата 3 се прикажни сите претставувања од папирусот за дропките со броител 2 и именител непарен број, од 3 до 101.

2/3 = 1/2 + 1/6	2/5 = 1/3 + 1/15	2/7 = 1/4 + 1/28
2/9 = 1/6 + 1/18	2/11 = 1/6 + 1/66	2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104
2/15 = 1/10 + 1/30	2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68	2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114
2/21 = 1/14 + 1/42	2/23 = 1/12 + 1/276	2/25 = 1/15 + 1/75
2/27 = 1/18 + 1/54	2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232	2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155
2/33 = 1/22 + 1/66	2/35 = 1/30 + 1/42	2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296
2/39 = 1/26 + 1/78	2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328	2/43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301
2/45 = 1/30 + 1/90	2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470	2/49 = 1/28 + 1/196
2/51 = 1/34 + 1/102	2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795	2/55 = 1/30 + 1/330
2/57 = 1/38 + 1/114	2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531	2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610
2/63 = 1/42 + 1/126	2/65 = 1/39 + 1/195	2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536
2/69 = 1/46 + 1/138	2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710	2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365
2/75 = 1/50 + 1/150	2/77 = 1/44 + 1/308	2/79 = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790
2/81 = 1/54 + 1/162	2/83 = 1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498	2/85 = 1/51 + 1/255
2/87 = 1/58 + 1/174	2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890	2/91 = 1/70 + 1/130
2/93 = 1/62 + 1/186	2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570	2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776
2/99 = 1/66 + 1/198	2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606	

Слика 3. Слика од екран од [12].

За дропките од видот $\frac{2}{n}$ важи следната теорема.

Теорема 1. ([4]) *Секоја дропка од обликот* $\frac{2}{n}$ *може да се запише како сума на две различни единични дропки.*

Да ја разгледаме дропката од првата колона и четвртиот ред, на Слика 3, $\frac{2}{21}$. Со алчниот алгоритам, добиваме дека $\frac{2}{21}=\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$. Но, во самиот Рајндов папирус имаме поинаква репрезентација, имено $\frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$ што може да се добие со следната формула, [5]:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n},\ \text{а оттука,}\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{2\cdot 7}\cdot\frac{1}{6\cdot 7}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}.$$

Дропките од овој вид можат да се претставaт како Египетски дропки и со користење на друга формула. Имено, ако $\frac{2}{n}=\frac{2}{p\cdot q}$ каде што p,q се непарни броеви, тогаш од формулата

$$\frac{2}{p\cdot q}=\frac{1}{\frac{p(p+q)}{2}}+\frac{1}{\frac{q(p+q)}{2}}$$

го добиваме бараното претставување.

Ќе ја разгледаме истата дропка $\frac{2}{21}$. Имаме $\frac{2}{21}=\frac{2}{3\cdot 7}$ и според формулата добиваме дека $\frac{2}{3\cdot 7}=\frac{1}{\frac{3(3+7)}{2}}+\frac{1}{\frac{7(3+7)}{2}}=\frac{1}{15}+\frac{1}{35}$.

4. БЕСКОНЕЧЕН БРОЈ ПРЕТСТАВУВАЊА

Како што видовме, само за дропката $\frac{2}{21}$ досега успеавме да прикажеме три репрезентации во вид на Египетска дропка:

$$\text{А) } \frac{2}{21}=\frac{1}{11}+\frac{1}{231}; \quad \text{Б) } \frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}; \quad \text{В) } \frac{2}{21}=\frac{1}{15}+\frac{1}{35}.$$

Но, дали тие се единствените?

Да го разгледаме следниот пример.

Пример 4. $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

Да ја искористиме сумата $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ и да ја означиме со (1). Доколку равенството (1) го поделиме со 4, ќе добиеме $\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$, па со вметување на новата репрезентација на дропката $\frac{1}{4}$, добиваме $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$.

Понатаму (1) може да ја поделиме со 24, па за $\frac{1}{24}=\frac{1}{48}+\frac{1}{72}+\frac{1}{144}$ со што по вметнувањето ќе добиеме $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{48}+\frac{1}{72}+\frac{1}{144}$, итн. Овој процес можеме да го продолжиме до бесконечност, [7].

Но, доколку зборуваме за општ случај ја имаме следната формула за сума на верижни дропки

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

како и следните формули кои се потврдуваат со алгебарски трансформации, [7]:

$$\frac{1}{ab}=\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)};$$

$$\frac{1}{abc}=\frac{1}{a(ab+bc+ca)}+\frac{1}{b(ab+bc+ca)}+\frac{1}{c(ab+bc+ca)}.$$

5. ПРИМЕНА ВО НАСТАВАТА

Египетската математика за дропки е соодветна за увежбување на операциите со дропки, [1]. Според професорите од универзитет во Тексас, Кошелева и Креинович, [6], во математиката во основното училиште еден од најтешките концепти се токму дропките. Понатаму, според нив: „За да ги совладаат дропките, учениците треба да избегнат и надминат безброј препреки. Поради овие тешкотии, истражувачите на полето на образованието на математиката, имаат развиено голем број на иновативни начини на предавање на дропките, со цел зголемување на интересот и мотивацијата."

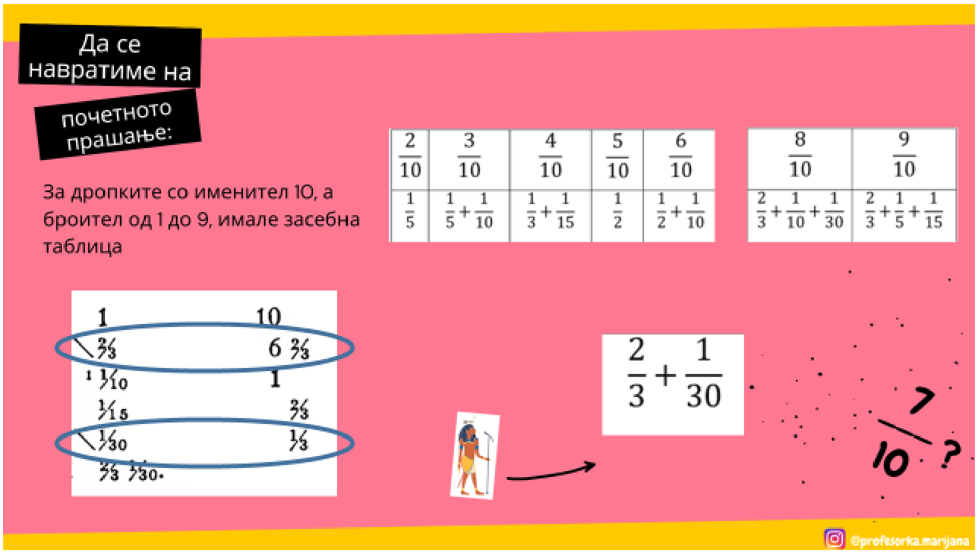
Наставниците можат да ги употребат овие задачи, како и целата тема за Египетски дропки во своите училници, во додатната настава или во математичките проекти, [4]. Овој начин на претставување на дропки може да се примени за време на наставните часови кои вклучуваат основно собирање и одземање на дропки со различни именители, но и решавање на текстуални задачи со нивна примена.

Освен тоа, тие можат да бидат употребени на часовите (потенцијално) заеднички реализирани со наставниците по информатика, со користење на алгоритмите како меѓусебна содржина. Оваа тема претставува основа за соработка и со наставниците по историја. Доколку знаете дека некој ученик има афинитети кон историјата, ваквите „историски" задачи ќе бидат попримамливи за решавање.

Мојот впечаток по ова прашање е дека учениците реагираа љубопитно при самото спомнување на Египетските дропки. Јас го применив обратното, им зададов задача Египетските дропки (нагласувајќи дека се Египетски) да ги запишат во денешен запис, т.е. да ги соберат. Зададените дропки беа во хиероглифски запис. Ова го направив за уште поголема љубопитност и избегнување на секојдневните изрази. Значењето на хиероглифски дропки го дообјаснив. Кај учениците кои имаа проблем со НЗС се појавија очекувани тешкотии, но учениците беа повеќе мотивирани за да истраат во нивното решавање. (Примерокот беше од 5 ученици на возраст од 11–12 години).

6. ОДГОВОРОТ НА ПОЧЕТНОТО ПРАШАЊЕ

Египетскиот запис од Рајндовиот папирус за дропката $\frac{7}{10}$ бил $\frac{7}{10}=\frac{2}{3}+\frac{1}{30}$ (види Слика 3). Оваа сума е добиена според методот на делење кој го применувале. Додека, пак, од Фибоначиевиот алгоритам добиваме $\frac{7}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$. Како што гледаме, со првиот начин секој човек би требало да добие по $\frac{2}{3}$ леб, со што ќе бидат поделени $6\frac{2}{3}$ леба, за потоа едната третинка што ќе остане ќе се подели на 10 еднакви дела на сите. Од друга страна, со Фибоначиевиот алгоритам, секој ќе добие по $\frac{1}{2}$ со што ќе бидат раздадени 5 леба, но потоа преостанатите цели 2 леба ќе треба да се поделат на петтинки. Тоа значи дека секој човек ќе добие по уште $\frac{1}{5}$.



Слика 4. Таблицата за дропки од 2/10 до 2/10,
заедно со постапката за добивање на 2/3+1/30, [2].

7. ЗАКЛУЧОК

Во ова излагање, се осврнавме на повеќе начини за претставување на дропки во вид сума на Египетски дропки, како и на некои историски занимливости во врска со Египетските дропки. Гребнавме сосема малку по површината на теоријата на броеви, која нуди сеуште отворени прашања, како на пример: дали Диофантовата равенка $\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ има позитивни цели решенија, за $n>4$? Прашање на кое контрапример не е пронајден, а ниту целосен доказ не е понуден, [9]. Отворивме простор за вметнување на Египетските дропки во наставата по математика. И за крај можеме само да се запрашеме: дали Египќаните можеле да претпостават дека: нивните пресметки, математички способности и нивните таблици ќе бидат предмет на расправа и дискусија до ден-денешен? Верувам дека наша задача како вљубеници во математиката е да го пренесеме интересот кон светските математички достигнувања и да ѝ оддадеме признание со огромна восхит на историјата на математиката.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Стојковска, *Што се египетски дропки?*, Математика +, 17 мај 2017, https://matematika-plus.weebly.com/sto-se-egipetski-dropki.html

[2] A. B. Chace, H. P. Manning, R. C. Archibald, *The Rhind Mathematical Papyrus, Volume I*, Mathematical Association of America, 1927.

[3] J. Edkins, "*Ancient Egyptian Numbers.*" Macropolis, 2006, www.macropolis.org/numeri/numbers/numbers/egypt/intro.htm.

[4] H.Humenberger*, Egyptian fractions- representations as a sums of unit fractions,* Mathematics and Computer Education 48, (2014) 268–283.

[5] D. Jankov, *Egipatski razlomci,* Osječki matematički list 11 (2011), 11–18.

[6] O. Kosheleva, V. Kreinovich, *Egyptian Fractions Revisited,* Informatics in Education, 2009, 8 (1): 35–48.

[7] R. Knott, *Egyptian Fractions*, Department of Mathematics, Surrey University, 4 Jan. 2021, www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/egyptian.html

[8] A.Posamentier, C.Spreitzer, *The Mathematics of Everyday Life,* Prometheus Books, 2018.

[9] E. Weisstein*, "Egyptian Fraction",* MathWorld-Wolfram Web Resource, 2021. mathworld.wolfram.com/EgyptianFraction.html

[10] *"Egyptian Civilization - Writing - Hieroglyphs."* Canadian Museum of History www.historymuseum.ca/cmc/exhibitions/civil/egypt/egcw02e.html

[11] *"Papyrus | British Museum." The British Museum,* www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10058

[12] Wikipedia contributors. "*Rhind Mathematical Papyrus 2/n Table.*" Wikipedia, 11 Nov. 2020, en.wikipedia.org/wiki/Rhind_Mathematical_Papyrus_2/n_table.

[1] Маријана Тошевска Мартиновиќ
Ванкувер, Британска Колумбија, Канада
marijana_mt@outlook.com

Примен: 30.3.2021
Поправен: 14.6.2021
Одобрен: 7.6.2021
Објавен на интернет: 4.11.2021