МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 4 (2018), 81 – 91
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-4.html

ПРИМЕНА НА ПРОГРАМСКИОТ ПАКЕТ MATHEMATICA ЗА ВОВЕДУВАЊЕ НА ПОИМОТ ГРАНИЦА НА НИЗА

Ѓорѓи Маркоски [1]

Според наставниот план и програма за средно образование, поимот низа се изучува во IV година, [3], [4]. Разбирањето на поимите низа и граница на низа е од суштинско значење, пред сè за оние ученици кои своето образование ќе го продолжат на техничките и природно-математичките факултети. Иако се работи за ученици кои веќе подлабоко и посуштински ја изучуваат математиката како наставен предмет, способни се да вршат апстракција и да согледуваат аналогии, препорачливо е да се направи визуализација на поимот граница на низа. Воедно ова е успешен начин учениците кои имаат посолидни познавања на програмските јазици да го запознаат пакетот Mathematica.

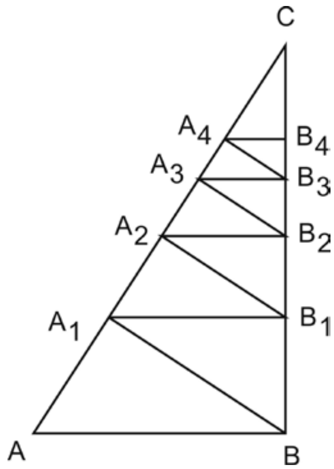
Mathematica е софтверски пакет кој се применува во математиката, инженерството, техниката и други дисциплини, [5]. Создаден е во 1988 година од Stephen Wolfram, подоцна развиен од група математичари и програмери. Овој пакет, кој сè уште се развива, може да извршува математички операции, прави пресметки со голема точност, црта графици на функции во две и три димензии, дава можности за визуализација на графиците за полесно испитување на нивните својства, овозможува и создавање на динамички ориентирани наставни содржини.

Постоечките учебници по математика за средно образование содржат повеќе примери за поимот граница на низа, [1], [2]. Ќе бидат презентирани примери за воведување на поимот граница на низа коишто ќе придонесат за разбирање на поимот, а пакетот ќе се користи за извршување на бројните операции и цртањето кои не се главен дел од објаснувањето. На овој начин поимот граница на низа е подобро визуелно објаснет, а заштедено е и времето за пресметување.

Пример 1. Даден е правоаголен триаголник ABC, со прав агол во темето B. Од темето на правиот агол се спушта нормала кон хипотенузата, па на тој начин се добиени два правоаголни триаголници ABA_1 и A_1BC. Потоа од точката A_1 се спушта нормала кон BC и добиени се три правоаголни триаголници. Оваа постапка продолжува како на Слика 1. При создавање на програмскиот код за примерот, без ограничување на општоста, практично е да се земе триаголник со темиња $(0,0),(1,0)$ и $(1,2)$, чија плоштина е еднаква на 1. Потоа, се пресметуваат збировите од плоштините на добиените триаголници

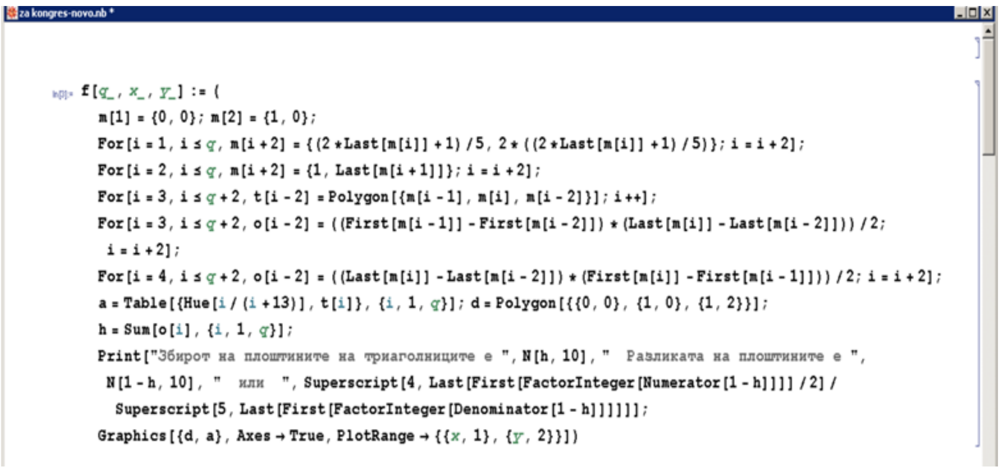
$$P_{\Delta ABA_1}, P_{\Delta ABA_1} + P_{\Delta A_1BB_1}, P_{\Delta ABA_1} + P_{\Delta A_1BB_1} + P_{\Delta A_1B_1A_2}, \ldots$$

На овој начин е формирана низа која се стреми кон плоштината на дадениот триаголник т.е. кон 1.



Слика 1. Правоаголен триаголник со темиња $(0,0),(1,0)$ и $(1,2)$ и формирање на триаголниците во него.

Еве како изгледа програмскиот код од примерот.

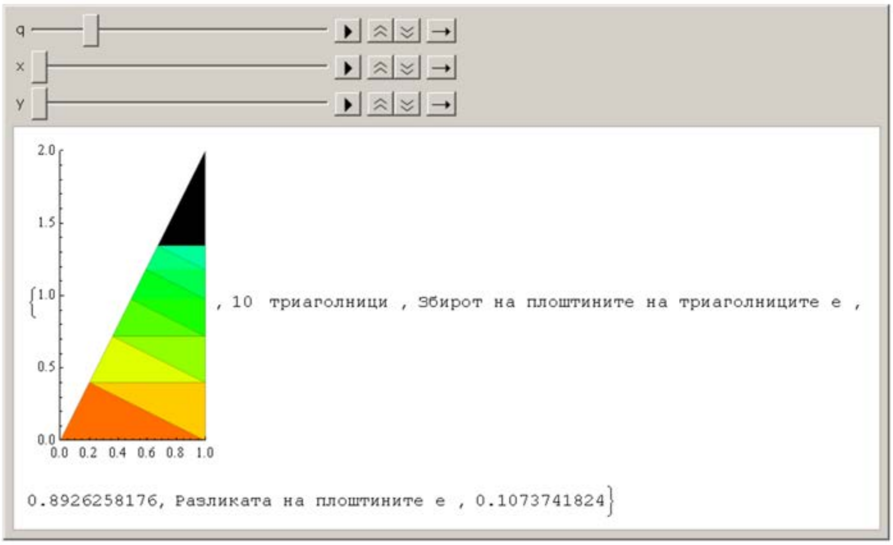


```
za kongres-novo.nb *

f[q_, x_, y_] := (
   m[1] = {0, 0}; m[2] = {1, 0};
   For[i = 1, i ≤ q, m[i + 2] = {(2 *Last[m[i]] + 1) /5, 2 * ((2 *Last[m[i]] + 1) /5)}; i = i + 2];
   For[i = 2, i ≤ q, m[i + 2] = {1, Last[m[i + 1]]}; i = i + 2];
   For[i = 3, i ≤ q + 2, t[i - 2] = Polygon[{m[i - 1], m[i], m[i - 2]}]; i++];
   For[i = 3, i ≤ q + 2, o[i - 2] = ((First[m[i - 1]] - First[m[i - 2]]) * (Last[m[i]] - Last[m[i - 2]])) /2;
    i = i + 2];
   For[i = 4, i ≤ q + 2, o[i - 2] = ((Last[m[i]] - Last[m[i - 2]]) * (First[m[i]] - First[m[i - 1]])) /2; i = i + 2];
   a = Table[{Hue[i / (i + 13)], t[i]}, {i, 1, q}]; d = Polygon[{{0, 0}, {1, 0}, {1, 2}}];
   h = Sum[o[i], {i, 1, q}];
   Print["Збирот на плоштините на триаголниците е ", N[h, 10], "  Разликата на плоштините е ",
    N[1 - h, 10], "  или  ", Superscript[4, Last[First[FactorInteger[Numerator[1 - h]]]] /2] /
     Superscript[5, Last[First[FactorInteger[Denominator[1 - h]]]]]];
   Graphics[{d, a}, Axes → True, PlotRange → {{x, 1}, {y, 2}}])
```

Слика 2. Програмски код за Пример 1.

Во овој дел се дефинира функција за извршување на пресметки на плоштините на триаголниците, нивните збирови и разликата меѓу плоштината на триаголникот *ABC* и збирот на плоштините на добиените триаголници. Излезот, односно визуелниот дел се прави со наредбата Animate, прикажана на Слика 3.

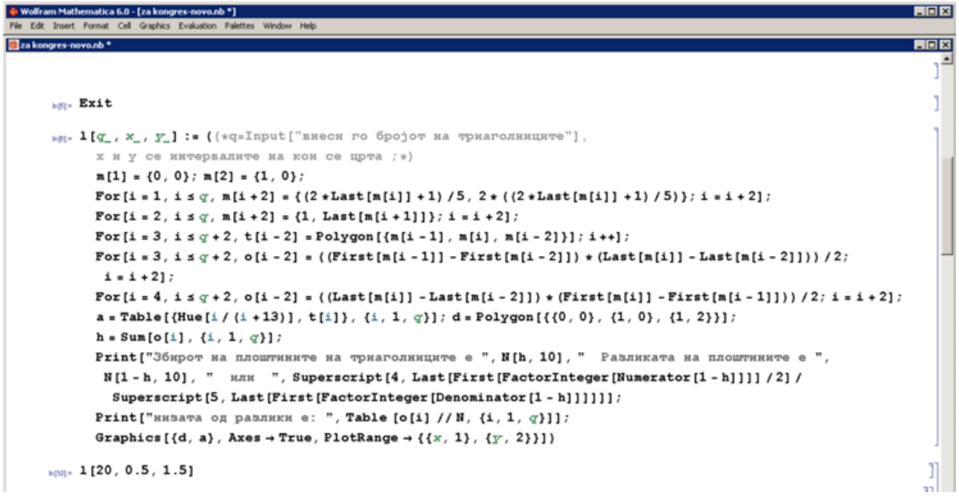
```
Animate[{f[q, x, y], " триаголници " q, "Збирот на плоштините на триаголниците е ", N[h, 10]
  "Разликата на плоштините е ", N[1 - h, 10]}, {q, 1, 50, 1}, {x, 0, 1, 0.001}, {y, 0, 2, 0.001}]
```



Слика 3. Примена на наредбата Animate.

Покрај цртежот може да се прикаже и текст со кој полесно се следи бројот на нацртани триаголници и добиената разлика од збирот на нивните плоштини и плоштината на почетниот триаголник. Со променливата q, корисникот го избира бројот на триаголници, а со лизгачите x и y го подобрува видното поле.

Со мала промена на програмскиот код може да се добие различен излез. На пример, со променливата l, која зависи од q, x и y, се овозможува внесување на бројот на триголници и параметрите за видното поле, а се прикажуваат и членовите од добиената низа.



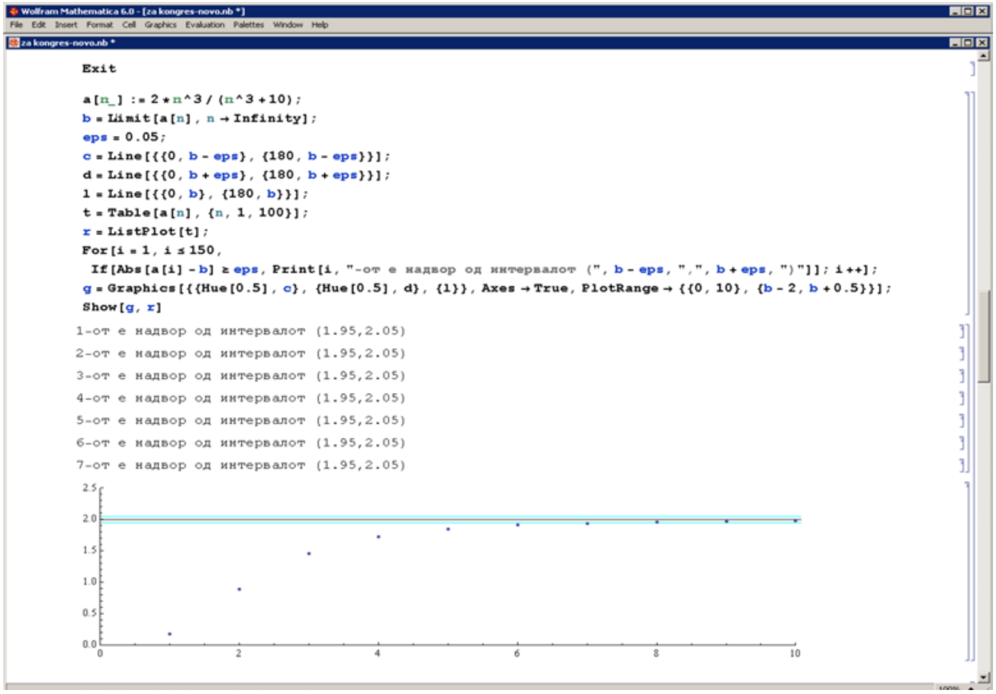
```
Exit

l[q_, x_, y_] := ((*q=Input["внеси го бројот на триаголниците"],
  x и y се интервалите на кои се црта ;*)
  m[1] = {0, 0}; m[2] = {1, 0};
  For[i = 1, i ≤ q, m[i + 2] = {(2 *Last[m[i]] + 1) /5, 2 * ((2 *Last[m[i]] + 1) /5)}; i = i + 2];
  For[i = 2, i ≤ q, m[i + 2] = {1, Last[m[i + 1]]}; i = i + 2];
  For[i = 3, i ≤ q + 2, t[i - 2] = Polygon[{m[i - 1], m[i], m[i - 2]}]; i++];
  For[i = 3, i ≤ q + 2, o[i - 2] = ((First[m[i - 1]] - First[m[i - 2]]) * (Last[m[i]] - Last[m[i - 2]])) /2;
   i = i + 2];
  For[i = 4, i ≤ q + 2, o[i - 2] = ((Last[m[i]] - Last[m[i - 2]]) * (First[m[i]] - First[m[i - 1]])) /2; i = i + 2];
  a = Table[{Hue[i / (i + 13)], t[i]}, {i, 1, q}]; d = Polygon[{{0, 0}, {1, 0}, {1, 2}}];
  h = Sum[o[i], {i, 1, q}];
  Print["Збирот на плоштините на триаголниците е ", N[h, 10], "  Разликата на плоштините е ",
   N[1 - h, 10], "  или  ", Superscript[4, Last[First[FactorInteger[Numerator[1 - h]]]] /2] /
    Superscript[5, Last[First[FactorInteger[Denominator[1 - h]]]]]];
  Print["низата од разлики е: ", Table [o[i] // N, {i, 1, q}]];
  Graphics[{d, a}, Axes → True, PlotRange → {{x, 1}, {y, 2}}])

l[20, 0.5, 1.5]
```

Слика 4. Внесување на бројот на триголници и параметрите за видното поле.

Дефинирањето на поимот граница на низа преку „$\varepsilon - n_0$“ ([1]), предизвикува посериозни нејаснотии кај учениците. Тие најчесто ја меморираат постапката без подлабоко да навлезат во нејзината суштина. Дури има и такви кои ќе бидат способни да ја искажуваат дефиницијата без грешка и да го одредуваат n_0, но не се во состојба да го објаснат поимот граница на низа. Затоа сметам дека следниот пример ќе придонесе за избегнување на нејаснотиите.

Пример 2. Дадени се низа $a_n = \dfrac{2n^3}{n^3+10}$ и $\varepsilon = 0,05$. На координатен систем се внесуваат паровите (n, a_n) за $n = 1, 2, 3, \ldots$. Нацртани се правите $y = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \varepsilon$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ и $y = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \varepsilon$. Нека $b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Овде, јасно, $b = 2$. Програмата проверува кои точки од низата се наоѓаат меѓу правите $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$. Се прикажуваат само членовите од низата кои не лежат меѓу правите $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ (во овој случај такви се седум точки, односно точките надвор од epsilon околината на b). Потоа, програмата престанува со прикажување на членови, што значи дека бараното n_0 е 8. Целата ситуација се прикажува графички. Притоа се прикажуваат првите 10 членови на низата, од кои 3 члена кои припаѓаат во ε околината на границата на низата.

Програмскиот код прикажан на Слика 5 дозволува промена на низата и вредноста на ε. При внесувањето на низата $a_н$ треба да се внимава таа да биде монотона, затоа што може да се случи на пример, вториот член да важи $|a_2 - b| < \varepsilon$, додека $|a_3 - b| > \varepsilon$, па програмата ќе заврши, а нема да се прикаже границата на низата.

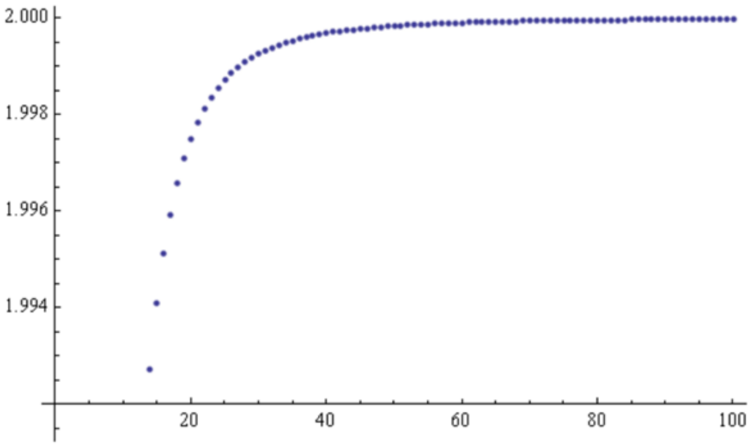


Слика 5. Приказ на првите 10 членови на низата $a_n = \dfrac{2n^3}{n^3+10}$ и $\varepsilon = 0,05$ околина на границата на низата.

Добро е наставникот да избере различни вредности за ε, со што кај учениците ќе се создаде претстава за врската меѓу ε и n_0. Овој програмски код може да се промени по избор на наставникот за да се презентираат и објаснат повеќе поими поврзани со низи.

При објаснувањето на поимот граница на низа добро е да се претстават повеќе членови на низата, со што воедно ќе се објасни и врската со поимот точка на натрупување на низа. На Слика 6 прикажани се, како точки рамнина, првите 100 членови на низата $a_n = \dfrac{2n^3}{n^3+10}$.

```
a[n_] := 2*n^3/(n^3+10);
b = Limit[a[n], n → Infinity];
eps = 0.05;
    t = Table[a[n], {n, 1, 100}];
Print[ListPlot[t]]
```



Слика 6. Првите 100 членови на низата $a_n = \dfrac{2n^3}{n^3+10}$, како точки во рамнина.

На Слика 7 прикажани се, како точки на права, првите 100 членови на низата $a_n = \dfrac{2n^3}{n^3+10}$.

```
a[n_] := 2*n^3/(n^3+10);
b = Limit[a[n], n → Infinity];
    t = Table[{a[n], 0}, {n, 1, 100}];
ListPlot[t, PlotStyle → Directive[PointSize[0.02], Orange], Axes → {True, False},
 PlotRange → {{0, 2.8}, {-0.5, 0.5}}]
```

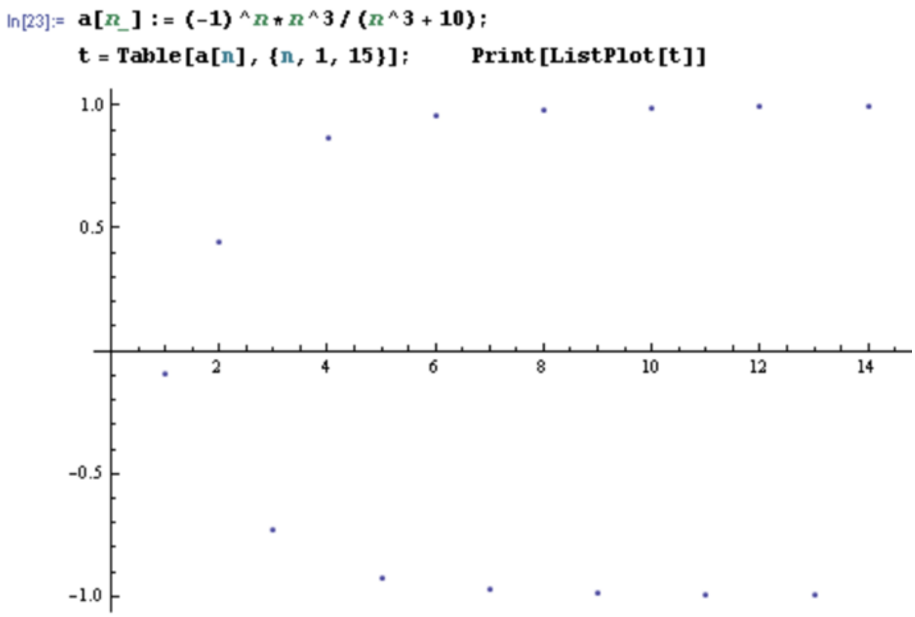
Слика 7. Првите 100 членови на низата $a_n = \dfrac{2n^3}{n^3+10}$, како точки на права.

За реалниот број b се вели дека е точка на натрупување на низата (a_n) ако во секоја околина на b има бесконечно елементи од (a_n).

Честопати учениците ги поистоветуваат поимите граница на низа и точка на натрупување на низата. Затоа корисно е после овие примери да се внесе низа која има повеќе точки на натрупување.

Пример 3. Низата $a_n = (-1)^n \frac{n^3}{n^3+10}$ има 2 точки на натрупување. Тие се 1 и -1.

На слика 8 првите 14 членови на оваа низа се прикажани како точки во рамнина.



Слика 8. Првите 14 членови на низата $a_n = (-1)^n \frac{n^3}{n^3+10}$ како точки во рамнина.

За низата (a_n) се вели дека е конвергентна ако нејзината граница е реален број. Ако границата на низата не постои или е ∞ или $-\infty$, се вели дека таа е дивергентна.

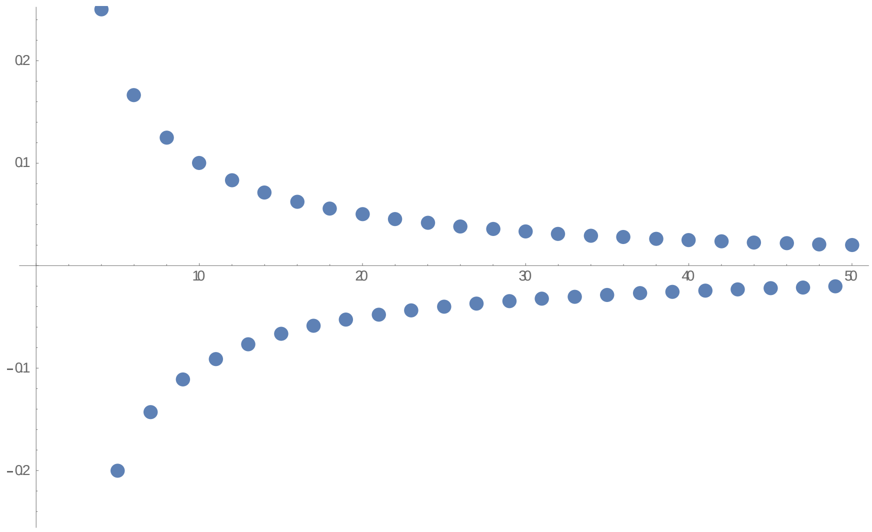
Во продолжение ќе бидат претставени неколку примери кај кои може да се насети конвергенција или дивергенција на дадените низи.

Пример 4. Нека е дадена низата $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Со наредбата

a[n_]:=(-1)^n/n; ListPlot[Table[{n,a[n]},{n,1,50}]]

графички се прикажуваат првите 50 членови на низата (Слика 9).



Слика 9. Графички приказ на првите 50 членови на низата $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Ова е пример на низа чии членови го менуваат знакот, а таа конвергира кон 0.

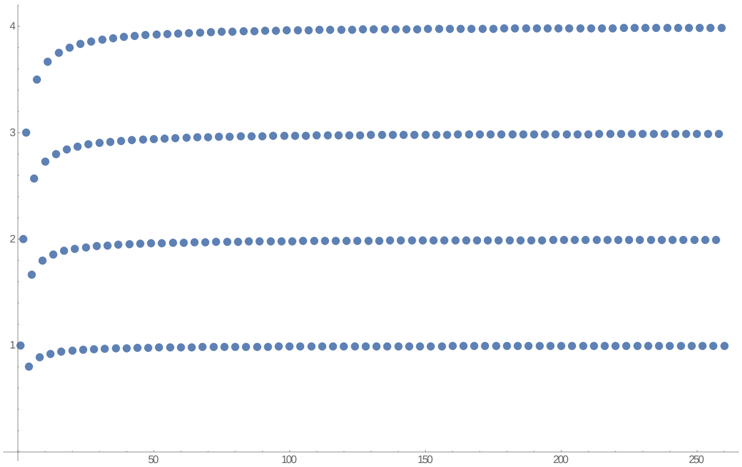
Пример 5. Кај низата

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1}, & \text{ако } n \text{ е делив со } 4 \\ \dfrac{2n}{n+1}, & \text{ако } n \text{ има остаток } 1 \text{ при делење со } 4 \\ \dfrac{3n}{n+1}, & \text{ако } n \text{ има остаток } 2 \text{ при делење со } 4 \\ \dfrac{4n}{n+1}, & \text{ако } n \text{ има остаток } 3 \text{ при делење со } 4 \end{cases}$$

со

a[n_]:=Switch[Mod[n,4],0,n/(n+1),1,2*n/(n+1),2,3*n/(n+1),3,4*n/(n+1)];
ListPlot[Table[{n,a[n]},{n,1,260}]]

се добива приказ на првите 260 членови на низата. Притоа се гледаат и точките на натрупување, кои во овој случај ги има 4, и тоа се реалните броеви 1, 2, 3 и 4. .



Слика 10. Графички приказ на првите 260 членови на низата (a_n).

Пример 6. За низата

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$$

со

a[n_]:=Sum[1/Factorial[i],{i,0,n}]//N;

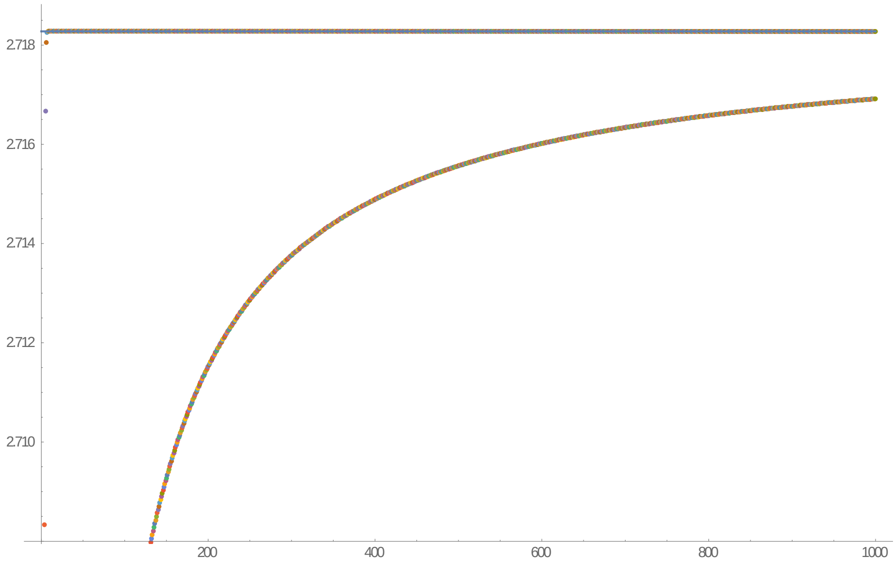
b[n_]:=(1+1/n)^n//N;k=1000;

s=ListPlot[Table[{{n,a[n]},{n,b[n]}},{n,1,k}]];

t=Plot[E,{x,0,k}];

Show[s,t]

се добива



Слика 11. Графички приказ на првите 1000 членови на низата $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ и правата $y = e$.

Тука може да се согледа конвергенцијата на дадената низа кон бројот e, кој е претставен со хоризонталната линија.

Се надевам дека наведениве примери ќе бидат корисни за подобро разбирење на поимите низа, конвергенција на низа и точка на натрупување. Овој пристап на визуелизација на низите од броеви, може да се прошири и примени при визуелизација на други поими од наставната програма по математика, како на пример изводи, тек и график на функција, интеграли и слично.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ј. Митевска, Л. Грибовска-Поповиќ, В. Манова Ераковиќ, Ф. Митрушева, *Математика за IV година на реформираното гимназиско* образование, Просветно дело АД, Скопје, 2004

[2] К. Тренчевски, Б. Крстеска, Г. Тренчевски, С. Здравеска, *Мтематичка анализа за четврта година на реформираното гимназиско* образование, Просветно дело АД, Скопје, 2004

[3] Наставна програма по математика за IV година, http://bro.gov.mk/docs/gimnazisko/zadolzitelnipredmeti/Matematika4%20godina.pdf

[4] Наставни програми по математичка анализа, http://bro.gov.mk/docs/gimnazisko/izborni_predmeti/Nastavna%20progrma-Matematichka%20analiza-IV-GO-izboren.pdf

[5] Wolfram: Computation Meets Knowledge, http://www.wolfram.com/

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје,
Природно-математички факултет,
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: gorgim@pmf.ukim.mk

Примен: 09. 02. 2018
Поправен: 13. 07. 2018
Одобрен: 21. 07. 2018

Објавен на интернет: 24.09.2018