

ЕРАТОСТЕНОВ ЕКСПЕРИМЕНТ

Адријана Тодорова¹

1. ПРВИОТ ЕРАТОСТЕНОВ ЕКСПЕРИМЕНТ

Кој бил Ератостен? Во математиката е познат по постапката за одредување прости броеви, којашто е позната под името Ератостеново сито и се изучува во шесто одделение. Ератостен од Кирена (276 п.н.е.-194 п.н.е.), уште познат и по прекарот Бета – Втор, или оној кој во сè е втор) бил антички математичар, географ, поет, астроном, атлетичар и музички теоретичар, но и управник на Александриската библиотека. Зошто втор? Архимед, којшто бил негов голем пријател и со кого со години се допишувал и разменува мислења, бил подобар математичар и астроном; Калимах, неговиот претходник во библиотеката, бил подобар поет, а во атлетиката го победувале посилни и побрзи, [1]. Единствено бил прв во географија. Всушност, тој е творец на географијата, поставувајќи ги нејзините математички основи, но и терминологија којашто се користи и денес. Нему му се припишува денешниот систем на Земјините координати со географска ширина и должина. Секако, тој имал многу откритија и достигнуања, меѓу кои и пресметувањето на обемот на Земјата по должината на меридијан.

За да го пресмета обемот на Земјата, Ератостен го извел својот експеримент тргнувајќи од претпоставката дека Земјата е тркалезна и дека Сонцето е доволно далеку за сончевите зраци да можат да се сметаат за паралелни. Тој го знаел растојанието меѓу градовите Александрија и Сиена (денешен Асуан, Египет), кое според тогашните единици мерки изнесувало 5000 стадиони. Грчката мерка за стадион (*στάδιον*) изнесува приближно 185 метри, но оваа вредност варира на различни места (таа изнесувала различно: во Египет – 157 m, во Делфи – 177 m, во Олимпија – 192 m). Не се знае точно која мерка стадион ја употребил. Ератостен забележал дека на 21 јуни, кога е летната рамноденица, нема сенка во бунарот во Сиена, т.е. човек може да го види одблесокот на Сонцето во длабокиот бунар, што значи дека тогаш Сонцето е точно над Сиена, т.е. во зенит. Исто така, тоа значи дека стап забоден во земјата во тоа

време, нема да фрла сенка. Тој го запомнил ова, па следната година ја мерел сенката на стап во Александрија, која не била непостоечка, туку можела да се измери, како и аголот под кој сончевите зраци паѓале на земјата. Тој утврдил дека падниот агол изнесува $7^{\circ}12'$. Употребувајќи ја формулата

$$\frac{\text{Опсегот на Земјата } o}{\text{Кружниот лак } l} = \frac{360^{\circ}}{\alpha},$$

пресметал дека $\frac{o}{5000} = \frac{360^{\circ}}{7^{\circ}12'}$, т.е. дека $o = 5000 \cdot 50 = 250\,000$ стадиони.

Тој заклучил дека растојанието меѓу овие два града е 50-ти дел од вкупниот обем на Земјата, бидејќи тоа е кружен лак кој одговара на централен агол од $7^{\circ}12'$.

Да забележиме дека, денешните мерења на обемот на Земјата даваат 40 075 km, [2]. Ако Ератостен ја употребил вредност на стадион кој изнесува (во денешни мерки) 185 m, тогаш неговите пресметки за обемот на Земјата во километри би биле 39 250 km, што од вистинскиот обем од 40 075 km отстапува за 6175 km или за 15,4%. Но, ако употребил вредност од 157 m, неговите пресметки за обемот на Земјата во километри би биле 39 250 km, што од вистинскиот обем од 40 075 km отстапува за 825 km или за 0,02%.

2. НАСТАНОТ „ЕРАТОСТЕНОВ ЕКСПЕРИМЕНТ“

Настанот „Ератостенов експеримент“ е настан од светски карактер и е организиран од Грчкото математичко здружение, со учество на регионалното Биро за наука и култура за Европа при УНЕСКО, со седиште во Венеција, Италија и е одобрен од Министерството за образование на Грција, [3].

Настанот се одржува на деновите пролетна и есенска рамноденица. Училиштата коишто сакаат да учествуваат во настанот претходно се регистрираат на линк кој е поставен на страницата на организаторот [3]. При регистрацијата се внесуваат географските координати на местото од коешто е училиштето. По завршувањето на регистрацијата на училиштата, организаторот им праќа на сите пријавени одговорни наставници список од училишта-учесници, коишто се на приближно иста гео-

графска должина. Одговорните наставници од училиштата меѓусебно избираат партнер училиште од списокот, коешто е на растојание поголемо од 200 km, за да можат пресметките да дадат поточен резултат.

По завршувањето на мерењето, се разменуваат податоци со партнер-училиштето и се прават пресметки коишто потоа се објавуваат на линк на страницата на организаторот, [3].

3. ИЗВЕДУВАЊЕ НА ЕКСПЕРИМЕНТОТ

Учениците од ООУ „Петар Мусев“, Богданци, Република Македонија го изведоа експериментот на пролетната рамноденица, 21 март, 2016 година. Пред почетокот на експериментот добија задача да направат истражување за експериментот и за научникот кој прв го извел. Партнер училиште ни беше училиштето Средно училиште број 4, од местото Вулкан, Романија, чии координати се следниве: географска ширина $45,377385^{\circ}$ и географска должина $23,291204^{\circ}$. Координатите на Богданци се: $41,1431848^{\circ}$ географска ширина и $22,506629315^{\circ}$ географска должина. Прв чекор во изведувањето на експериментот беше учениците да го одредат времето на зенитот на Сонцето. За таа цел користеа сончев калкулатор, [4,5]. Зенитот на Сонцето во Богданци на пролетната рамноденица беше во 12 часот и 30 минути. Учениците, кои беа поделени во три групи, во времето на зенитот направија по пет мерења на должината на сенката на прачка со одредена должина (препорачано од организаторот е прачката да е со должина 1 m, за поедноставни пресметки).



Слика 1. Мерење на должината на сенката.

Потоа е најдена средна вредност на мерењата на секоја група, па средна вредност на мерењата на групите.

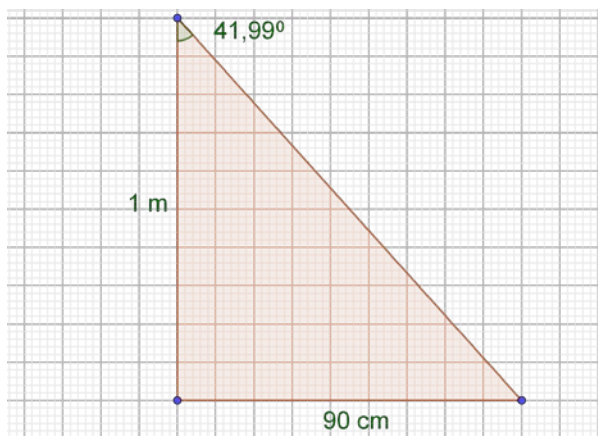
Учениците според мерењата одредија средна вредност на должината на сенката која изнесува 90 cm. Резултатите од мерењето се прикажани во Табела 1.

Реден број на мерење во cm.	1	2	3	4	5	Средна вредност
Група 1	89	89	90	91	91,5	90,1
Група 2	88	89	89	91	93	90
Група 3	87	87	90	93	93	90
						90

Табела 1. Резултати од мерење на должина на сенка на прачка од 1 m.

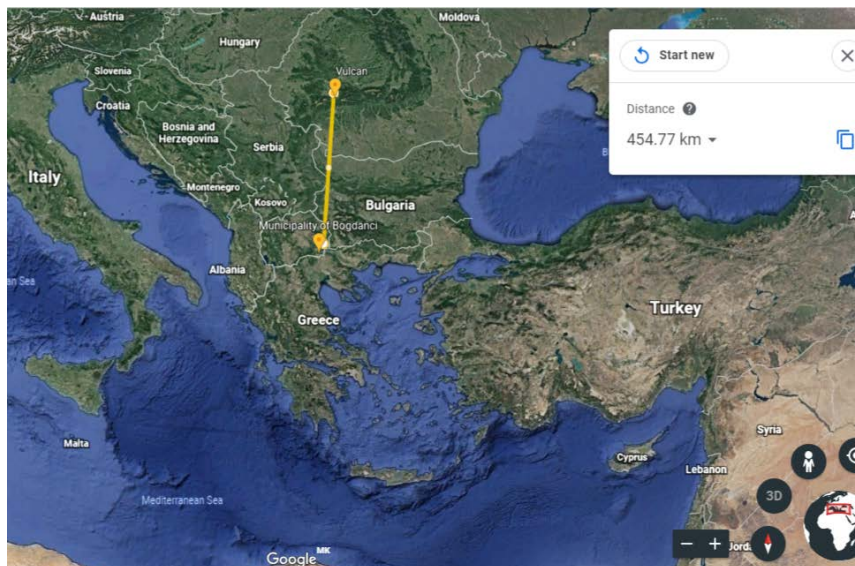
По мерењето на должината на сенката, требаше да се одреди падниот агол на сончевите зраци.

За учениците од основно образование, пресметувањето на падниот агол се правеше преку цртање на слични триаголници со мерење на соодветниот агол. Се црта триаголник сличен на триаголникот образуван од прачката, сенката и сончевиот зрак. Цртежите учениците ги прават во тетратка и со помош на апликацијата GeoGebra, [6].



Слика 2. Одредување на падниот агол на сончевите зраци.

Учениците добија дека падниот агол на сончевите зраци во Богданци е $41,99^\circ$. Потоа, го одредија растојанието помеѓу двете места, Богданци и Вулкан, користејќи *Google Earth*, [7]. Растојанието помеѓу Богданци и Вулкан е 454,77 km, (Слика 3).



Слика 3. Одредување на растојанието помеѓу Вулкан и Богданци.

Истата постапка ја направи и партнер-училиштето, а потоа следуваше размена на добиените и податоци и вметнување во формулата.

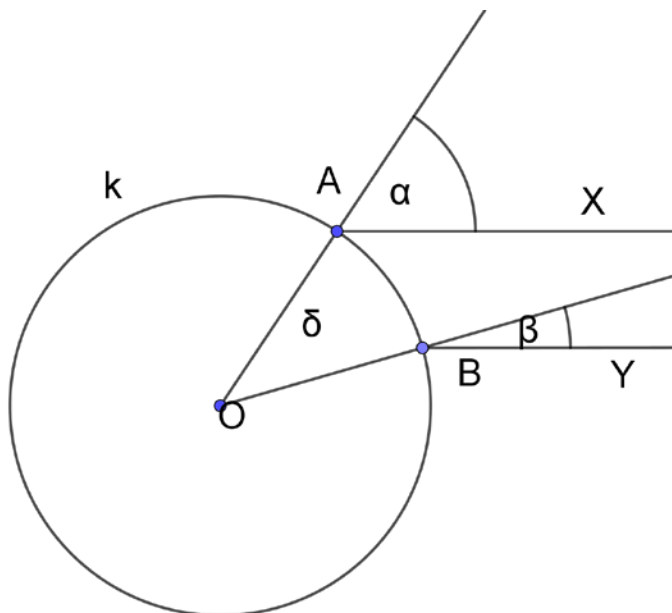
Резултатите на партнер-училиштето беа следниве:

- должина на сенка: 100,6 cm
- паден агол на сончевите зраци: $45,36^\circ$.

4. ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ОБЕМОТ НА ЗЕМЈАТА

За да го пресметаме обемот на земјата по меридијан, ќе се послужиме со црежот прикажан на Слика 4.

Кружницата на цртежот претставува пресек на Земјата по дадениот меридијан. Точките A и B ги означуваат местата на мерење. Полуправите AX и BV претставуваат сончеви зраци, кои се меѓусебно паралелни, а нормални на Екваторот. Аглие α и β се агли помеѓу продолженијата на радиусите на Земјата (т.е. нормалите во точките на мерење) и сончевите зраци.



Слика 4. Геометриски приказ на елементите во Ератостеновиот експеримент.

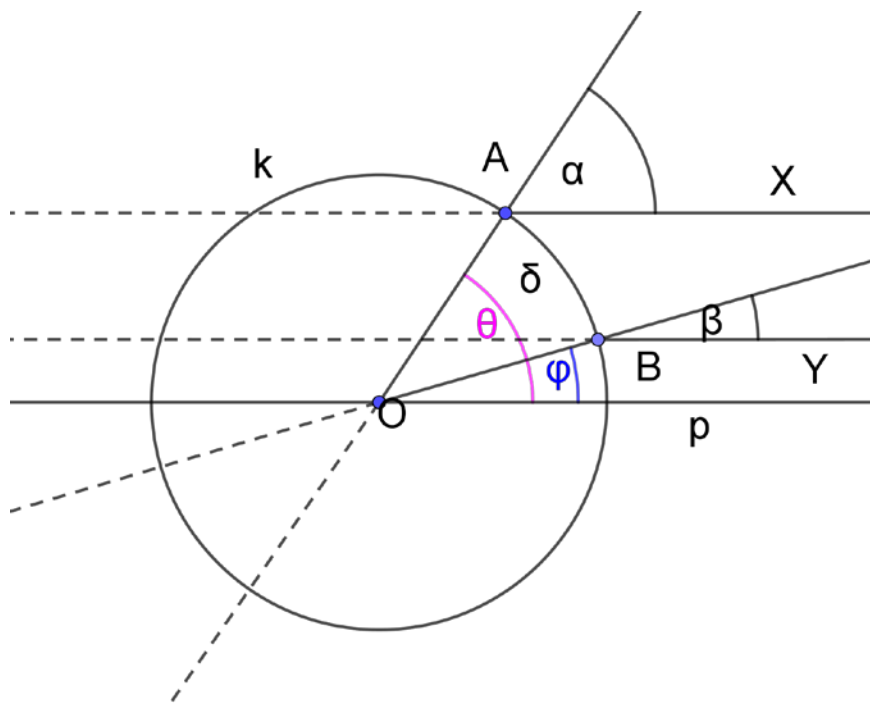
Кружницата на цртежот претставува пресек на Земјата по дадениот меридијан. Точките A и B ги означуваат местата на мерење. Полуправите AX и BY претставуваат сончеви зраци, кои се меѓусебно паралелни, а нормални на Екваторот. Аглиите α и β се агли помеѓу продолженијата на радиусите на Земјата, односно нормалите во точките на мерење и сончевите зраци.

Пресметувањето на обемот на Земјата се сведува на пресметување на периметарот на дадената кружница k , ако се знае должината на кружниот лак AB и неговиот соодветен централен агол δ . Соодносот меѓу δ и полниот агол е еднаков со соодносот на должината на кружниот лак \widehat{AB} и периметарот на целиот круг. Ако со l е означена должината на дадениот кружен лак, а со L периметарот на кружницата, се добива следната пропорција: $\delta : 360^\circ = l : L$, од каде што $L = \frac{360^\circ \cdot l}{\delta}$. Во добиената формула, l е растојанието помеѓу двете места и е познато. Треба да се определи аголот δ .

За да се одреди δ , се повлекуваат продолженијата на полуправите кои ги означуваат сончевите зраци, AX и BY . Се повлекува и права p ,

Ератостенов експеримент

паралелна на правите $AХ$ и $AУ$ која поминува низ центарот O . Се повлекуваат и продолженија на полуправите OA и OB , како што е прикажано на Слика 5. Аглите φ и θ се аглите помеѓу нормалите во точките на мерење и Екваторот.



Слика 5. Цртеж за одредување на аголот δ .

Ако се разгледаат паралелните прави $AХ$ и r и правата OA како нивна пресечка (трансверзала), се забележува дека α и θ се согласни агли, па значи, $\alpha = \theta$. Ако се разгледаат паралелните прави $BУ$ и r и правата OB како нивна пресечка (трансверзала), се забележува дека β и φ се согласни агли, па $\beta = \varphi$. Од цртежот се воочува дека $\delta = \theta - \varphi$. Со замена на претходно добиените равенства, се добива дека $\delta = \alpha - \beta$, а со замена на податоците добиени од мерењата на двете училишта се доби следново:

$$L = \frac{360^\circ \cdot 454,77}{45,36^\circ - 41,99^\circ} = 48580,77 \text{ km.}$$

Добиениот резултат од вистинскиот обем на Земјата отстапува за 8505,77 km или за 21%.

5. НАСТАВНИ ЦЕЛИ РЕАЛИЗИРАНИ ПРЕКУ ЕРАТОСТЕНОВИОТ ЕКСПЕРИМЕНТ

Наставните цели реализирани преку Ератостеновиот експеримент се следниве, [8,9]:

1. Мерење на должина и претварање на мерките за должина,
2. Одредување аритметичка средина,
3. Цртање во размер,
4. Одредување на периметар на круг,
5. Примена на агли на трансверзала.

Наставната цел мерење должина и претварање на единиците мерки за должина, се реализира преку мерењето на должината на прачката и нејзината сенка, како и претварањето на должината од метри во сантиметри и обратно. Овде се применува и пресметувањето на аритметичка средина на должината на сенката.

Цртањето во размер се реализира преку цртање на слични триаголници за да се пресмета падниот агол на сончевите зраци, додека одредувањето на периметарот на круг се реализира при одредувањето на обемот на Земјата.

Примената на трансверзални агли се применува при одредување на централниот агол кој одговара на дадениот кружен лак, чија должина е растојанието помеѓу двете места.

Преку изведувањето на експериментот, учениците ја согледуваат применливоста и универзалноста на математиката. Истражувајќи за историјата на експериментот ги збогатуваат своите општи познавања за историјата на математиката и за методите со кои научниците пред нашата ера, без технологија изведувале експерименти коишто давале резултати со голема точност. При реализација на споменатите наставни цели, се прави осврт и на Ератостеновиот експеримент со примена на нови математички поими.

6. ЗАКЛУЧОК

Ератостеновиот експеримент претставува начин за примена на математиката како и за практично стекнување на математички знаења. Час одржан во природа за учениците е релаксирачки и забавен начин на

учење. Изборот на партнер-училиште за наставниците како и за учениците значи стекнување на нови познанства како и размена на искуства.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Драган Кесић, *Бунар, штап, камила и мозак*, Мале тајне великих мајстора, Политикин Забавник, 14.10.2011, 22–24.
- [2] *Eratosthenes experiments, Eratosthenes*,
<http://eratosthenes.ea.gr/content/eratosthenes>
- [3] *Eratosthenes experiments*, <http://eratosthenes.ea.gr>
- [4] *Earth System Research Laboratory Global Monitoring division, NOAA Solar Calculator* <https://www.esrl.noaa.gov/gmd/grad/solcalc/>
- [5] *Solar Noun calculator*,
<http://web.metasofa.org:81/vansprouts/solarnoon.html>
- [6] *Geogebra*, <https://www.geogebra.org/classic?lang=en>
- [7] *Google Earth*, <https://earth.google.com/web/>
- [8] *Наставна програма по математика за VII одделение*,
Биро за развој на образованието, март 2016,
https://www.bro.gov.mk/wp-content/uploads/2018/02/Nastavna_programa-Matematika-VII_odd-mkd.pdf
- [9] *Наставна програма по математика за VIII одделение*,
Биро за развој на образованието, март 2016,
https://www.bro.gov.mk/wp-content/uploads/2018/02/Nastavna_programa-Matematika-VIII_odd-mkd.pdf

¹ ООУ „Петар Мусев“,
ул. Крушевска 64, 1484 Богданци, Р. Македонија
e-mail: todorovaadrijana@hotmail.com

Примен: 5.02.2019

Поправен: 15.04.2019

Одобрен: 16.04.2019

Објавен на интернет: 17.04.2019