Математички Билтен
29 (LV)
2005 (71-76)
Скопје, Македонија

ISSN 0351-336X

$L^p(\mu)$ КАКО 2–НОРМИРАН ПРОСТОР

Алекса Малчески* и Ристо Малчески**

Апстракт

Во оваа работа е даден пример на 2–норма во просторот $L^p(\mu)$, $p>1$.

Во [1] S. Gähler го воведува поимот за 2-нормиран простор, а во [4] е докажана еквивалентноста на оваа дефиниција со следнава дефиниција, која ќе ја користиме во нашите разгледувања.

Дефиниција 1. *Нека X е векторски простор над полето реални броеви и* $\dim X > 1$. *Функцијата* $||\bullet,\bullet||: X\times X \to R$ *која ги задоволува условите:*

$(P1)$ *Ако* $||x,y||=0$, *тогаш множеството вектори* $\{x,y\}$ *е линеарно зависно.*

$(P2)$ $||A(x,y)^T|| = \det A\cdot ||x,y||$, *за секои* $x,y\in X$ *и* $A\in M_2(\mathbf{R})$.

$(P3)$ $||x+x',y|| \le ||x,y|| + ||x',y||$, *за секои* $x',x,y\in X$.

ја нарекуваме 2-норма на векторскиот простор X, а подреденцот пар $(X,||\bullet,\bullet||)$ *го нарекуваме 2-нормиран простор.*

Во работите [2] и [3] се дадени примери на 2-норма на просторите l^∞ и $L^1(\mu)$. Во оваа работа се воведува една 2-норма на $L^p(\mu)$.

Наш резултат

Нека (Y,M) е измерлив простор, μ е позитивна мера на M, $X=L^p(\mu)$, $p>1$ е просторот

$$X=\{f: f:Y\to \mathbf{C}, \int_Y |f|^p d\mu < +\infty\}$$

и функцијата $||\bullet,\bullet||$: $L^p(\mu)\times L^p(\mu)\to\mathbf{R}$ е определена со:

$$||f,g|| = \{\int_{Y\times Y} |\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y)\end{vmatrix}|^p d(\mu\times\mu)\}^{1/p}, \tag{1}$$

каде $\mu\times\mu$ е директен производ на мерата μ. Ќе докажеме дека $||\bullet,\bullet||$ е 2-норма на $X=L^p(\mu)$.

Пресликувањето $||\bullet,\bullet|||$: $L^p(\mu)\times L^p\to\mathbf{R}$ е добро дефинирано. Навистина, користејќи го неравенството

$$(s+t)^p \le 2^{p-1}(t^p+s^p),\quad s,t>0$$

добиваме

$$\begin{aligned}|\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y)\end{vmatrix}|^p &= |f(x)g(y)-g(x)f(y)|^p \le (|f(x)g(y)|+|g(x)f(y)|)^p \\ &\le 2^{p-1}(|f(x)g(y)|^p+|g(x)f(y)|^p)\end{aligned}$$

за секои $f,g\in L^p(\mu)$ и секој $(x,y)\in Y\times Y$.

Од (1) и својствата на интегрирањето на директниот производ на измерливи простори $(Y\times Y,\, M\times M,\, \mu\times\mu)$ имаме

$$\begin{aligned}||f,g|| &= \{\int_{Y\times Y} |\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y)\end{vmatrix}|^p d(\mu\times\mu)\}^{1/p} \\ &\le \{\int_{Y\times Y} 2^{p-1}(|f(x)g(y)|^p+|g(x)f(y)|^p d(\mu\times\mu)\}^{1/p} \\ &= \{2^{p-1}(\int_{Y\times Y}|f(x)|^p|g(y)|^p d(\mu\times\mu)+\int_{Y\times Y}|g(x)|^p|f(y)|^p d(\mu\times\mu))\}^{1/p} \\ &= 2^{(p-1)/p}\{\int_Y |f(x)|^p d\mu\int_Y |g(y)|^p d\mu+\int_Y |g(x)|^p d\mu\int_Y |f(y)|^p d\mu\}^{1/p} \\ &= 2^{(p-1)/p}\{2\int_Y |f(x)|^p d\mu\int_Y |g(y)|^p d\mu\}^{1/p} \\ &= 2^{(p-1)/p}2^{1/p}\{\int_Y |f(x)|^p d\mu\}^{1/p}\{\int_Y |g(y)|^p d\mu\}^{1/p} \\ &= 2||f||\bullet||g|| < +\infty.\end{aligned}$$

Значи, функцијата $||\bullet,\bullet||$: $L^p(\mu)\times L^p(\mu)\to\mathbf{R}$ е добро дефинирана и притоа важи $||f,g||\le 2||f||\bullet||g||$.

Од дефиницијата (1) е јасно дека $||f,g||\ge 0$. Нека $||f,g||=0$ за некои $f,g\in L^p(\mu)$, $f\ne 0$ и $g\ne 0$ во однос на мерата μ, т.е.

$$\{\int_{Y\times Y} |\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y)\end{vmatrix}|^p d(\mu\times\mu)\}^{1/p}=0.$$

Тогаш

$$\int_{Y\times Y} |\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y)\end{vmatrix}|^p d(\mu\times\mu)=0,$$

па затоа

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix} = 0$$

скоро секаде во однос на мерата $\mu \times \mu$. Од претпоставката дека $f \neq 0$ и $g \neq 0$ во однос на мерата μ, множествата $U_f = \{x | x \in Y, f(x) \neq 0\}$ и $U_g = \{x | x \in Y, g(x) \neq 0\}$ се множества со позитивна мера т.е. $\mu(U_f) > 0$ и $\mu(U_g) > 0$.

Од $\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix} = 0$ скоро секаде во однос на $\mu \times \mu$, следува

$$f(x)g(y) - g(x)f(y) = 0$$

скоро секаде во однос на мерата $\mu \times \mu$. Значи,

$$W_{f,g} = \{(x, y) | f(x)g(y) - g(x)f(y) \neq 0\}$$

е множество со мера нула, т.е. $(\mu \times \mu)(W_{f,g}) = 0$.

Ќе докажеме дека $\mu(U_f \cap U_g) > 0$, $\mu(U_f \setminus U_g) = 0$ и $\mu(U_g \setminus U_f) = 0$.

Нека претпоставиме дека $\mu(U_f \cap U_g) = 0$. Тогаш без ограничување на општоста можеме да сметаме дека во однос на мерата μ важи $U_f \cap U_g = \emptyset$. Притоа, за секој $(x, y) \in U_f \times U_g$ важи

$$f(x) \neq 0, \quad g(y) \neq 0 \quad \text{и} \quad g(x) = 0, \quad f(y) = 0,$$

па затоа

$$f(x)g(y) - g(x)f(y) = f(x)g(y) \neq 0.$$

Значи, $(x, y) \in W_{f,g}$, т.е. $U_f \times U_g \subseteq W_{f,g}$. Од својствата на мерата $\mu \times \mu$, односно од нејзината дефиниција имаме

$$(\mu \times \mu)(W_{f,g}) \geq (\mu \times \mu)(U_f \times U_g) = \mu(U_f)\mu(U_g) > 0,$$

што противречи на $(\mu \times \mu)(W_{f,g}) = 0$, па затоа $\mu(U_f \cap U_g) \neq 0$.

Нека претпоставиме дека $\mu(U_f \cap U_g) > 0$ и $\mu(U_f \setminus U_g) > 0$.

Ако $(x, y) \in (U_f \setminus U_g) \times (U_f \cap U_g)$, тогаш $x \in U_f$, $x \notin U_g$ и $y \in U_g$, $y \in U_f$. Според тоа $f(x) \neq 0$, $g(x) = 0$, $f(y) \neq 0$, $g(y) \neq 0$ од каде имаме

$$f(x)g(y) - g(x)f(y) = f(x)g(y) \neq 0.$$

Значи,

$$W_{f,g} \supseteq (U_f \setminus U_g) \times (U_f \cap U_g)$$

па затоа

$$(\mu \times \mu)(W_{f,g}) \geq (\mu \times \mu)[(U_f \setminus U_g) \times (U_f \cap U_g)] = \mu(U_f \setminus U_g) \bullet \mu(U_f \cap U_g) > 0$$

што не е можно. Но, $\mu(U_f \cap U_g) > 0$, па затоа $\mu(U_f \setminus U_g) = 0$. Аналогно се докажува дека $\mu(U_g \setminus U_f) = 0$.

Од претходно изнесеното следува дека $U_f = U_g = U$, во однос на мерата μ. Навистина, доволно е да се разгледаат равенствата

$$U_f = (U_f \setminus U_g) \cup (U_f \cap U_g), \quad U_g = (U_g \setminus U_f) \cup (U_f \cap U_g),$$

$$\mu(U_f \setminus U_g) = 0 \quad \text{и} \quad \mu(U_g \setminus U_f) = 0\,.$$

Јасно, $\mu(U) > 0$. За секој $x \in U$ дефинираме множество

$$U_x = \{y | y \in U,\ f(x)g(y) - f(y)g(x) \neq 0\}\,.$$

Постои $x_0 \in U$ таков, што $\mu(U_{x_0}) = 0$. Навистина, нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека $\mu(U_x) > 0$, за секој $x \in U$. Бидејќи на $Y \setminus U$, $f = g = 0$ скоро секаде добиваме дека $f = g = 0$ скоро секаде на $Y \setminus U_x$ и

$$h(x) = |f(x)g(y) - g(x)f(y)|^p > 0 \quad \text{на} \quad U_x\,.$$

Тогаш,

$$\varphi(x) = \int_Y |f(x)g(y) - g(x)f(y)|^p d\mu_y = \int_{U_x} |f(x)g(y) - g(x)f(y)|^p d\mu_y > 0$$

од каде добиваме

$$\int_{Y\times Y} \left| \begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix} \right|^p d(\mu \times \mu) = \int_Y \varphi(x) d\mu = \int_U \varphi(x) d\mu > 0$$

што противречи на $||f,g|| = 0$. Значи, постои $x_0 \in U$, таков што

$$f(x_0)g(y) - g(x_0)f(y) = 0$$

скоро секаде на U. Бидејќи $f(x_0) \neq 0$ и $g(x_0) \neq 0$, добиваме

$$g(y) = \frac{g(x_0)}{f(x_0)} f(y)$$

за секое $y \in U$. Бидејќи $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ на $Y \setminus U$ добиваме дека $g(y) = \frac{g(x_0)}{f(x_0)} f(y)$ на Y, т.е. $g(y) = \alpha f(y)$ каде $\alpha = \frac{g(x_0)}{f(x_0)}$. Значи, $g = \alpha f$ на Y, т.е. е исполнета првата аксиома за 2-норма.

Нека $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\Phi)$ и $f, g \in L^p(\mu)$ се произволно зададени. Тогаш

$$\begin{aligned}
||A(f,g)^T|| &= \Big(\int_{Y\times Y} \left| \begin{vmatrix} a_{11}f(x)+a_{12}g(x) & a_{11}f(y)+a_{12}g(y) \\ a_{21}f(x)+a_{22}g(x) & a_{21}f(y)+a_{22}g(y) \end{vmatrix} \right|^p d(\mu \times \mu)\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int_{Y\times Y} \left| \begin{vmatrix} a_{11}f(x) & a_{11}f(y) \\ a_{21}f(x) & a_{21}f(y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}f(x) & a_{12}g(y) \\ a_{21}f(x) & a_{22}g(y) \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{vmatrix} a_{12}g(x) & a_{11}f(y) \\ a_{22}g(x) & a_{21}f(y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}g(x) & a_{12}g(y) \\ a_{22}g(x) & a_{22}g(y) \end{vmatrix} \right|^p d(\mu \times \mu)\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int_{Y\times Y} \left| f(x)f(y) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + f(x)g(y) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right.
\end{aligned}$$

$$
+g(x)f(y)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + g(x)g(y)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}|^p d(\mu\times\mu))^{1/p}
$$
$$
=(\int_{Y\times Y} |f(x)g(y)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + g(x)f(y)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}|^p d(\mu\times\mu))^{1/p}
$$
$$
=(\int_{Y\times Y} |[f(x)g(y)-g(x)f(y)]\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}|^p d(\mu\times\mu))^{1/p}
$$
$$
=(\int_{Y\times Y} |\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix} g \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}|^p d(\mu\times\mu))^{1/p}
$$
$$
=(\int_{Y\times Y} |\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix}|^p|\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}|^p d(\mu\times\mu))^{1/p}
$$
$$
=|\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}|\bullet|\int_{Y\times Y}|\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix}|^p d(\mu\times\mu))^{1/p} = |\det A|g||f,g||,
$$

т.е. исполнета е и втората аксиома за 2-норма.

За секои $f, g, h \in L^p(\mu)$ важи

$$
||f+g,h|| =(\int_{Y\times Y} |\begin{vmatrix} f(x)+g(x) & f(y)+g(y) \\ h(x) & h(y) \end{vmatrix}|^p d(\mu\times\mu))^{1/p}
$$
$$
=(\int_{Y\times Y} |\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ h(x) & h(y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g(x) & g(y) \\ h(x) & h(y) \end{vmatrix}|^p d(\mu\times\mu))^{1/p}
$$
$$
\leq(\int_{Y\times Y} |\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ h(x) & h(y) \end{vmatrix}|^p d(\mu\times\mu))^{1/p}
$$
$$
+(\int_{Y\times Y} |\begin{vmatrix} g(x) & g(y) \\ h(x) & h(y) \end{vmatrix}|^p (d(\mu\times\mu))^{1/p} = ||f,h|| + ||g,h||.
$$

т.е. е исполнета и третата аксиома за 2–норма.

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 1. $(L^p(\mu), ||\bullet,\bullet||)$, *каде 2-нормата е воведена со* (1) *е 2-нормиран простор.*

Литература

[1] Gähler S.: *Lineare 2-normierte Raume,* Math.Nach. 28 (1965)

[2] Malcheski, A.; Malcheski, R.: $L^1(\mu)$ *as a n-normed space,* Годишен зборник на Институтот за математика, Том 38 (1997)

[3] Малчески, А.: l^∞ *as a n–normed space,* Математички билтен, Том 21 (1997)

[4] Малчески, А.: *Забелешка за дефиницијата на 2-нормиран простор,* Математички билтен, Том 26 (2002)

$L^p(\mu)$ AS 2-NORMED SPACE

Aleksa Malcheski * and Risto Malcheski **

S u m m a r y

In this paper is given an example on 2-norm in space $L^p(\mu)$, $p > 1$.

* Mašinski fakultet
Univ. "Sv. Kiril i Metodij"
1000 Skopje
Makedonija

** Fakultet za informatika, Evropski univerzitet
1000 Skopje
Makedonija