НЕКОЈ ПРИМЕДБИ ЗА RICCATI-ЕВАТА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите од Н Р Македонија, кн. 2, 1951, 113-115

Од теоријата на диференцијалните равенки познато е, дека со знаењето на еден, два или три партикуларни интеграли на Riccati-евата диференцијална равенка, општиот интеграл и се добива со две, една или ниедна квадратура. Претставува меѓутоа интерес, за дадена Riccati-ева равенка да се побара врската што треба да постои меѓу коефициентите и, за да се бројот на квадратурите намали.

Овие услови за намалување бројот на квадратурите Minetti[1]) и Mitrinovitch[2]) ги добиваат по различни начини.

Нашата цел е, со еден елементарен и директен постапак да ги изведеме споменатите услови. При това се добиваат и некој нови услови аналогни на познатите.

1. Riccati-евата диференцијална равенка

$$y' + Py^2 + Qy + R = 0, \tag{1}$$

со линеарната трансформација

$$y = \alpha(x) z + \beta(x),$$

добива облик

$$\alpha z' + P\alpha^2 z^2 + (Q\alpha + 2P\alpha\beta + \alpha') z' + P\alpha\beta^2 + Q\alpha\beta + R\alpha + \alpha\beta' = 0.$$

Очевидно е, да равенката (1) во случај

$$P\beta^2 + Q\beta + R + \beta' = 0, \tag{2}$$

се интеграли со елементарни методи[3]) те. *со две квадратури*.

Произволноста на функциите α и β позволува да може да се стави

$$Q\alpha + 2P\alpha\beta + \alpha' = 0.$$

Внесена вредноста за β, определена од тука, во (2) дава

$$R = \left(\frac{Q}{2P}\right)' + P\left(\frac{Q}{2P}\right)^2 - \left[\left(\frac{\psi}{2P}\right)' + P\left(\frac{\psi}{2P}\right)^2\right], \tag{3}$$

каде што е

$$\psi = (\lg \alpha)'.$$

Диференцијалната равенка (1) добива тогаш облик

$$z' + P\alpha z^2 = 0,$$

и се интеграли со *една квадратура*.

---

1) *Sull'equazione differenziale di Riccati e su qualche resultato di geometria diferenziale*. Rendiconti Accad. d. L. Roma (6), 19, 1934, 65—74.

2) *Théorèmes relatifs a l'équation différentielle de Riccati*, Comptes rendus, 206, 1938, p. 411.

3) D. Pompeiu, *Sur une solution double de l'équation de Riccati*, *Comptes rendus*, 161, 1915, p. 235.

Избере ли се пак произволната функција α така, да е

$$P\alpha = \omega', \quad \omega = \omega(x),$$

релацијата (3) претставува услов за интеграбилност на Riccati-евата равенка (1) *без квадратури.*

Обликот на произволната функција ψ е

$$\psi = \left[\lg \frac{\omega'}{P}\right]'.$$

2. Со смената $yv = 1$ Riccati-евата диференцијална равенка се трансформира во равенка од исти облик, и имаме аналоген услов на условот (3)

$$P = \left(\frac{\psi}{2R}\right)' + \left(\frac{Q}{2R}\right)' - R\left[\left(\frac{\psi}{2R}\right)^2 - \left(\frac{Q}{2R}\right)^2\right].$$

Од тука имаме за $\psi = -R'/R$ аналоген услов на оној даден од Minetti[1])

$$4R^3P - R^2Q^2 - 2R^2Q' + 2RR'Q - 3R'^2 + 2RR'' = 0.$$

Résumé

REMARQUE SUR L'ÉQUATION DE RICCATI

Par une méthode élémentaire, on obtient la condition suivante

$$R = \left(\frac{Q}{2P}\right)' + P\left(\frac{Q}{2P}\right)^2 - \left[\left(\frac{\psi}{2P}\right)' + P\left(\frac{\psi}{2P}\right)^2\right], \tag{1}$$

avec

$$\psi = \left[\lg \frac{\omega'}{P}\right], \quad \omega = \omega(x) - \text{fonction arbitraire},$$

qui doit satisfaire les coefficients P, Q, R, fonctions de la variable x, pour que l'équation de Riccati

$$y' + Py^2 + Qy + R = 0 \tag{2}$$

soit intégrable *sans aucune quadrature.*

La condition (1) est aussi valable pour l'équation (2), dans le cas où nous changeons les fonctions P, Q, R, respectivement par les fonctions $-R$, $-Q$, $-P$,. D'ici nous obtenons pour l'équation (2) comme cas particulier une condition analogue à celle de Minetti[1]), à savoir

$$4R^3P - R^2Q^2 - 2R^2Q' + 2RR'Q - 3R'^2 + 2RR'' = 0.$$

---

[1]) loc. cit., voir le texte en langue macédonienne