ÜBER DIE ANWENDUNG DER KOMPLEXEN ZAHLEN IN DER ELEMENTARGEOMETRIE

Von
J. KARAMATA

1. Bei der Verwendung der Vektoren in der elementaren Geometrie ist es für das Rechnen bequemer diese in der Planimetrie durch komplexe Zahlen zu ersetzen. Es stellt sich dabei heraus, dass man öfters, statt das einfache Produkt ab, das Produkt der Form $\bar{a}b$ begegnet, wobei $\bar{a}$ die konjugierte komplexe Zahl von a bedeutet. Dies geschieht erstens, weil das letztgenannte Produkt unabhängig von der Lage des Koordinatensystems ist, zweitens, wenn

$$\bar{a}b = A + iB$$

gesetzt wird, so bedeutet A das innere Produkt den Zahlen a und b entsprechender Vektoren, und B das äussere Produkt, das aber als reelle, d. h. skalare Grösse zu betrachten ist. Da $A = 0$ die Bedingung der Ortogonalität, und $B = 0$ die Bedingung der Parallelität von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellt, so werden wir diese Produkte in der Form

$$A = (a \perp b) \text{ und } B = (a|b)$$

schreiben. Dabei gilt für A das komutative und das distributive Gesetz, für B aber nur das distributive Gesetz, da

$$(a|b) = -(b|a)$$

ist. Ausserdem ist

$$(a \perp b) = (a|ib),$$

wobei i die imaginäre Einheit bedeutet, und

$$k(a|b) = (ka|b) = (ak|b),$$

wenn k reell ist, woraus, insbesondere, der Bedingung der Komplanarität entsprechend, für beliebiges a, b und c

$$a(b|c) + b(c|a) + c(a|b) = 0$$

gilt.

Da $(a|b)$ die Fläche des aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogrames bedeutet, so lassen sich die Formeln die sich auf Flächen beziehen durch dieses Produkt besonders bequem in symetrischer Form ausdrücken. Zum Beispiel:

1° Die Fläche P des Dreiecks, wessen Ecken durch z_1 z_2 und z_3 bestimmt sind, beträgt

$$2P = (z_1 | z_2) + (z_2 | z_3) + (z_3 | z_1),$$

also

$$(z_1 \mid z_2) + (z_2 \mid z_3) + (z_3 \mid z_1) = 0$$

stellt die Bedingung dar, dass diese Punkte auf einer Geraden liegen.

2° Es seien drei Geraden durch die drei Punktpaare z_ν und z'_ν, $\nu = 1, 2, 3$, gegeben. Wenn

$$Q = (z_1 \mid a)\ (b \mid c) + (z_2 \mid b)\ (c \mid a) + (z_3 \mid c)\ (a \mid b),$$

mit

$$z'_1 = z_1 + a,\ \ z'_2 = z_2 + b \ \text{ und } \ z'_3 = z_3 + c,$$

gesetzt wird, so ist der Flächeninhalt P des, durch diese drei Geraden bestimmten Dreiecks

$$2P = \frac{Q^2}{(a \mid b)\ (b \mid c)\ (c \mid a)}.$$

Also stellt $Q = 0$ die Bedingung dar, dass diese drei Geraden durch einen Punkt gehen.

3° Sei

$$z_\nu = p_\nu z' + q_\nu z'' + r_\nu z''' \text{ mit } p_\nu + q_\nu + r_\nu = 1,\ \nu = 1, 2, 3,$$

und

$$\triangle = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}$$

gesetzt, dann ist

$$(z_1 \mid z_2) + (z_2 \mid z_3) + (z_3 \mid z_1) = \triangle \{ (z' \mid z'') + (z'' \mid z''') + (z''' \mid z') \},$$

d. h. $P' = \triangle P$, wobei P', bzw. P die Flächen der Dreiecke $z_1\ z_2\ z_3$, bzw. $z'\ z''\ z'''$ bedeuten. Also ist $\triangle = 0$ die Bedingung dafür dass die drei Punkte z_1, z_2 und z_3 auf einer Geraden liegen. — Insbesondere, wenn die Punkte z_1, z_2 und z_3 respektiev auf den Seiten des Dreiecks $z'\ z''\ z'''$ liegen so reduziert sich dies auf den Satz von Menelaos.

Diese Symetrie und die bequeme Handhabung des Produktes $(a \mid b)$ kommt insbesondere zum Vorschein bei der Ausführung und den Beweisen der verschiedenen planimetrischen Aufgaben und Sätze.

Beispielweise betrachten wir den speziellen Pappos-Pascalschen Satz, mit Auszeichnung der uneigentlichen Geraden ins Unendliche:

Liegen die Punkte $AB'C$ auf einer und die Punkte $A'BC'$ auf einer zweiten Gerade, und ist

$$AB \,//\, A'B', \quad BC \,//\, B'C'$$

so ist

$$AC' \,//\, A'C.$$

Wenn man (vergl. Fig. 1) die drei Seiten der Vierecke $AB'BC'$, bzw. $A'BB'C$, durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, bzw. $\vec{c'}$, $\vec{b'}$, $\vec{a'}$ bezeichnet, also die Diagonalen mit $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, bzw. $\vec{b'}+\vec{c'}$ und $\vec{a'}+\vec{b'}$, dann ist die vierte Seite des Vierecks durch $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, bzw. $\vec{a'}+\vec{b'}+\vec{c'}$ gegeben, und der Pascalsche Satz reduziert sich auf das Folgende:

Aus

$$(1) \qquad (a \mid a') = 0, \quad (b \mid b') = 0, \quad (c \mid c') = 0,$$

und

$$(2) \qquad (a+b \mid b'+c') = 0, \quad (b+c \mid a'+b') = 0,$$

folgt

$$(3) \qquad (a+b+c \mid a'+b'+c') = 0.$$

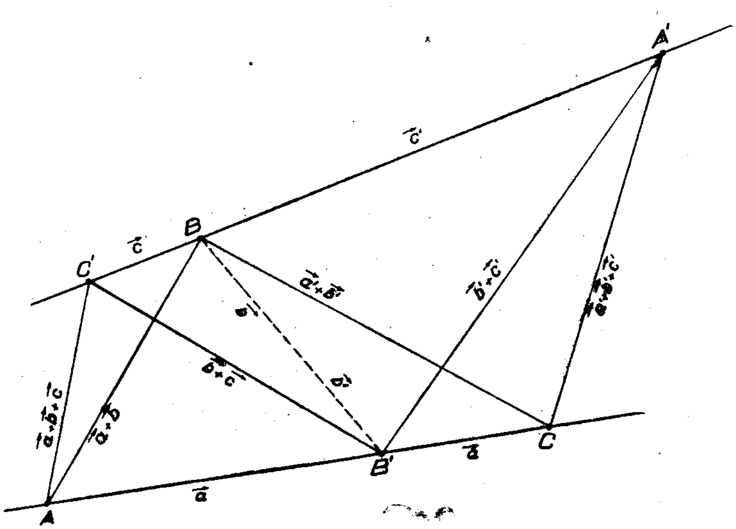

Fig. 1

Nach dem distributiven Gesetz ist

$$\begin{aligned}(a+b+c \mid a'+b'+c') = {} & (a \mid a') + (a \mid b') + (a \mid c') + \\ & + (b \mid a') + (b \mid b') + (b \mid c') + \\ & + (c \mid a') + (c \mid b') + (c \mid c').\end{aligned}$$

Wegen (1) ist aber

$$(a+b+c\,|\,a'+b'++c')=\frac{(a\,|\,b')+(a\,|\,c')}{(b\,|\,b')+(b\,|\,c')}+\frac{(b\,|\,a')+(b\,|\,b')}{(c\,|\,a')+(c\,|\,b')}=$$

$$=(a+b\,|\,b'+c')+(b+c\,|\,a'+b'),$$

woraus wegen (2) die Behauptung (3) folgt.

Durch etwa andere Schlussfolgerung kann man durch solche Betrachtungen den Desarguesschen Satz aus dem Papposschen ableiten, d. h. den Hessenbergschen Satz beweisen.

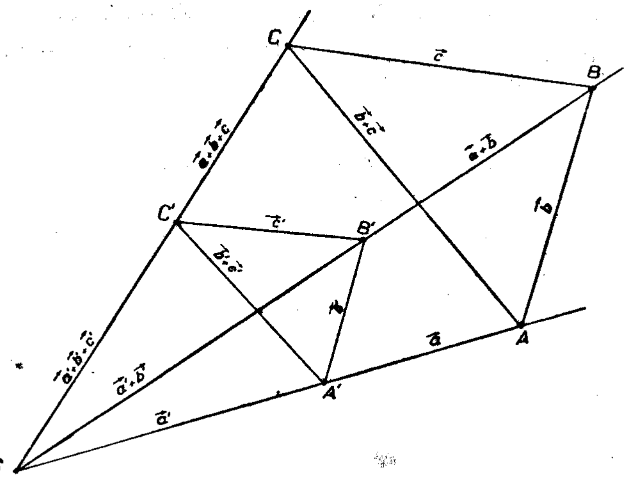

Fig. 2

Betrachtet man nämlich die Desarguessche Figur 2, wobei aus $AB \,//\, A'B'$, $BC \,//\, B'C'$, $CA \,//\, C'A'$ zu beweisen ist dass sich die drei Geraden AA', BB' und CC' in einem Punkte S schneiden, und bezeichnet man mit $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, bzw. $\vec{a'}$, $\vec{b'}$, $\vec{c'}$, die drei Seiten der Vierecke $SACB$, bzw. $SA'B'C'$, und mit $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, bzw. $\vec{a'}+\vec{b}$, $\vec{b'}+\vec{c'}$ die Diagonalen, so sind die vierten Seiten gleich $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, bzw. $\vec{a'}+\vec{b'}+\vec{c'}$, und der Desarguessche Satz wird auf das Folgende reduziert:

Aus (1) und

(4) $\quad (a+b\,|\,a'+b')=0, \quad (b+c\,|\,b'+c')=0,$

folgt (3).

Eine entsprechende Zerlegung des Produktes (3) führt nicht, wie im vorangehenden Satze, zum Beweis dieses Satzes. Führt man aber einen Hilfsviereck ein mit den Seiten $\vec{a''}$, $\vec{b''}$, $\vec{c''}$ und $\vec{a''}+\vec{b''}+\vec{c''}$, derart dass

$$(5) \qquad (a \mid a'') = 0, \quad (b \mid b'') = 0, \quad (c \mid c'') = 0,$$

und

$$(6) \qquad (a+b \mid b''+c'') = 0, \quad (b+c \mid b''+c'') = 0,$$

wird, so folgt, nach dem Papposschen Satze, dass

$$(7) \qquad (a+b+c \mid a''+b''+c'') = 0$$

ist.

Wegen (1) und (5) ist aber

$$(8) \qquad (a'' \mid a') = 0, \quad (b'' \mid b') = 0, \quad (c'' \mid c) = 0,$$

und wegen (6) und (4) ist

$$(9) \qquad (b''+c'' \mid a'+b') = 0, \quad (a''+b'' \mid b'+c') = 0,$$

so dass, nach dem Papposschen Satze, wegen (8) und (9),

$$(a''+b''+c'' \mid a'+b'+c') = 0$$

ist, woraus wegen (7) die Behauptung (3) folgt.

Einen direkten planimetrischen Beweis gab ich in „Eine elementare Herleitung des Desarguesschen Satzes aus dem Satze von Pappos-Pascal", Elemente der Mathematik V/1, S. 9—10 (1950).

Die bei der Ausführung des Papposschen Satzes durch die Verwendung von Vektoren herbeibezogenen Begriffe der Parallelität, sogar der Kongruenz, können etwa dadurch vermieden werden, dass man statt des Produktes $(a \mid b)$ ein abstraktes Produkt $(AB, A'B')_h$ des Streckenpaares AB und $A'B'$ mit folgenden Eigenschaften einführt.

1° Jedem Streckenpaar AB und $A'B'$ entspricht eindeutig eine reelle Zahl $(AB, A'B')_h$ derart dass, für irgendeinen Punkt C oder C'

$$(AB, A'B')_h = (AC, A'B')_h + (CB, A'B')_h$$

b w.

$$(AB, A'B')_h = (AB, A'C')_h + (AB, C'B')_h$$

gilt, was dem distributiven Gesetz enspricht, wenn etwa

$$AB = AC + CB \quad \text{oder} \quad A'B' = A'C' + C'B'$$

gesetzt wird.

2° Liegen die vier Punkte A, B, A' und B' auf einer Geraden, oder liegt der Schnittpunkt der Geraden AB und $A'B'$ auf einer festen Gerade h, dann ist

$$(AB, A'B')_h = 0,$$

und umgekehrt.

Der Pappossche Satz, nämlich (vergl. Fig. 3), dass die Schnittpunkte A'', B'' und C'' der Geraden BC' und $B'C$, AC' und $A'C$, bzw. AB' und $A'B$ auf einer Geraden liegen, wenn sich die Punkte A, B, C auf einer, und die Punkte A', B', C' auf einer anderen Geraden befinden, kann durch Verwendung von $(AB,\ A'B')_h$ wie folgt hergeleitet werden.

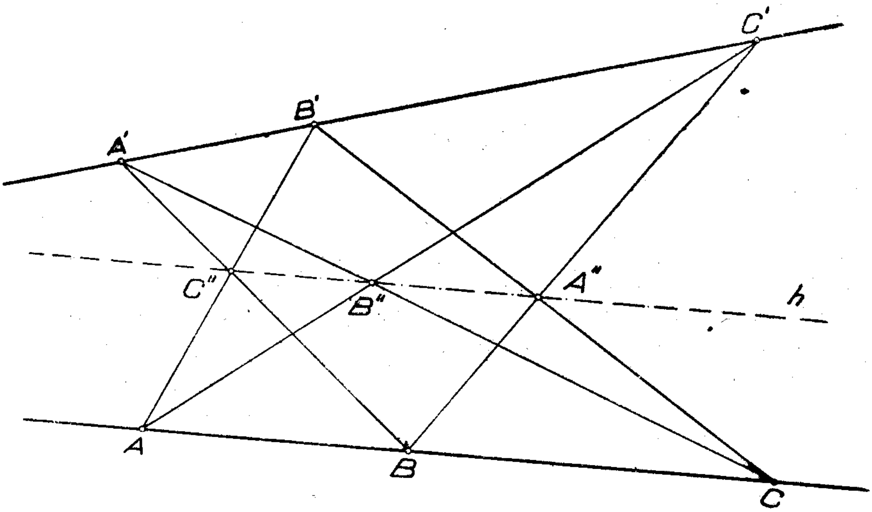

Fig. 3

Sei h die durch die Punkte A'' und C'' bestimmte Gerade, dann ist

$$(10) \qquad (AB',\ BA')_h = 0 \text{ und } (BC',\ CB')_h = 0\,,$$

und es soll gezeigt werden dass

$$(11) \qquad (AC',\ CA')_h = 0$$

ist. Wird

$$AC' = AB + BB' + B'C',$$
$$CA' = CB + BB' + B'A'$$

gesetzt, wegen

$$(AB,\ CB)_h = 0, \ \ (BB',\ BB')_h = 0, \ \ (B'C',\ B'A')_h = 0,$$

wird

$$\begin{aligned}(AC',\ CA')_h = {} & (AB,\ CB)_h + (AB,\ BB')_h + (AB,\ B'A')_h + \\ + {} & (BB',\ CB)_h + (BB',\ BB')_h + (BB',\ B'A')_h + \\ + {} & (B'C',\ CB)_h + (B'C',\ BB')_h + (B'C',\ B'A')_h =\end{aligned}$$

$$= (AB+BB',\ B'A'+BB')_h + (BB'+B'C',\ CB+BB')_h =$$
$$= (AB',\ BA')_h + (BC',\ CB')_h,$$

woraus (11) aus (10) folgt.

Um $(AB,\ A'B')_h$ zu realisieren, sei in der komplexen Ebene die Gleichung der Geraden h durch

$$\bar{a}z + a\bar{z} + p = 0, \quad p \text{ reell},$$

gegeben, und die z-Ebene kolinear auf die w-Ebene durch

$$w = \frac{a'z + b'\bar{z} + c}{\bar{a}z + a\bar{z} + p} \tag{12}$$

abgebildet. Entsprechen z_1, z_2, z'_1 und z'_2 den Punkten A, B, A' bzw. B', und seien w_1, w_2, w'_1 bzw. w'_2 die durch (12) abgebildeten Punkte dieser Punkte, so ist, wie man leicht einsieht,

$$(AB,\ A'B')_h = (w_2 - w_1 \mid w'_1 - w'_2).$$