МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 9 (2021), 113 – 135
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-9.html

ИДЕНТИТЕТОТ НА ТРОЕН ПРОИЗВОД НА ЈАКОБИ

Адмир Хусеини [1]

1. ВОВЕД

Идентитетот на троен производ на Јакоби е следната равенка помеѓу q –производ и q –ред,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\cdot(1+q^{2n-1}z)\cdot(1+q^{2n-1}z^{-1})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{k^2}z^k$$

каде што q и z се реални броеви.

Во делот 2 од овој труд ја развиваме теоријата на q –анализа, каде што главниот резултат е q –биномната формула на Гаус:

$$(x+a)_q^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\cdot q^{\frac{k\cdot(k-1)}{2}}\cdot a^k\cdot x^{n-k}$$

Од неа се изведува идентитетот на Јакоби во следната форма:

$$(1-q)_q^{\infty}\cdot(1-x)_q^{\infty}\cdot(1-qx^{-1})_q^{\infty}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\cdot q^{\frac{k\cdot(k-1)}{2}}\cdot x^k$$

Почнувајќи од основните поими на q –анализата и користејќи само елементарни теореми и основни лимеси, го добиваме идентитетот на Јакоби. Овој идентитет може да се докаже и директно, без користење на теоријата на q-анализа. Во делот 3 ќе презентираме два директни докази. Првиот е еден од наједноставните директни докази, додека вториот е оригиналниот доказ на Јакоби. Во делот 4 се презентираат класични идентитети кои се непосредна последица на идентитетот на Јакоби. Материјалот е елементарен и секој читател кој има основни знаења од математичка анализа може да го разбере, но резултатите не се тривијални. Целта на трудот е да се покаже дека овие резултати може да се добијат со елементарни техники.

Резултатите и доказите не се оригинални туку се преземени од трудовите на цитираните автори. Сепак се обидов да дадам концизен приказ на различните тврдења и докази од заедничка гледна точка.

2. $\boldsymbol{q}$ –АНАЛИЗА И $\boldsymbol{q}$ –БИНОМНИ ФОРМУЛИ

Во овој дел ќе ја изложиме теоријата на q –анализа почнувајќи од основните поими, во аналогија со класичната анализа. Во овој контекст, $q \in \mathbb{R}$. Дефинициите и својствата во делот 2.2. се преземени од книгата [6].

2.1. $\boldsymbol{q}$ –ДИФЕРЕНЦИЈАЛ и $\boldsymbol{q}$ –БИНОМНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Дефиниција 1. За која било полиномна функција од реална променлива $f(x)$, q *–диференцијалот* $d_q f$ се дефинира преку

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x).$$

Веднаш следува дека $d_q x = (q-1) \cdot x$. Може да се докажат формули за q –диференцијал на збир, разлика, производ и количник на две функции. Подолу го прикажуваме само правилото на производ.

$$\begin{aligned} d_q\big(f(x) \cdot g(x)\big) &= f(qx) \cdot d_q g(x) + d_q f(x) \cdot g(x) \\ &= f(x) \cdot d_q g(x) + d_q f(x) \cdot g(qx) \end{aligned}$$

Може да се види дека правилото на производот не е целосно симетрично, туку дека постојат две еквивалентни форми.

Дефиниција 2. q *–извод* се дефинира преку

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1) \cdot x}.$$

D_q е линеарен оператор. Од соодветните формули на q –диференцијалот може да се докажат формули за q –извод D_q на збир, разлика, производ и количник на две функции.

Аналогно како кај класичен извод, се дефинира k –ти q –извод D_q^k за $k > 1$ рекурзивно преку следнава формула:

$$D_q^k f(x) = D_q^{k-1}\left(D_q f(x)\right)$$

Пример 1. За $f(x) = x^n$, каде што $n \in \mathbb{N}$, се добива дека

$$D_q(x^n) = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot x^{n-1} = [n] \cdot x^{n-1}$$

каде што

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + \cdots + q^{n-1}.$$

Притоа, $[n]$ е q –аналог на на ненегативен цел број n во класична анализа. Сега сакаме да ги најдеме q –аналозите на факториелите и биномите.

Дефиниција 3. Дефинираме $[0]! = 1$ и за $n = 1,2, \dots$

$$[n]! = [n] \cdot [n-1] \cdots [1].$$

Конкретно, се добива следната вредност:

$$[n]! = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \cdots \frac{q - 1}{q - 1}.$$

Слично ги воведуваме и q –биномните коефициенти.

Дефиниција 4. *Гаусовиот* или q *–биномниот коефициент* е дефиниран како

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]! \cdot [n-k]!}$$

Заменувајќи ги вредностите на факториелите, се добива

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q - 1)}{\{(q^k - 1) \cdot \ldots \cdot (q - 1)\} \cdot \{(q^{n-k} - 1) \cdot \ldots \cdot (q - 1)\}}.$$

За разлика од класичните биномни коефициенти, за $|q| < 1$ може да се земе лимес кога $n \to \infty$ при што се добиваат следните вредности.

Својство 1. *За $|q| < 1$ границите на q –аналогот на n и на q –биномниот коефициент ги имаат следните вредности*

$$
\begin{aligned}
[\infty] &= \lim_{n\to\infty}[n] = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)_q^1},\\
\begin{bmatrix}\infty\\ k\end{bmatrix} &= \lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}n\\ k\end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)\cdots(1-q^k)} = \frac{1}{(1-q)_q^k},\\
\begin{bmatrix}\infty\\ \infty\end{bmatrix} &= \lim_{n,k\to\infty}\begin{bmatrix}n\\ k\end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)\cdot(1-q^2)\cdots} = \frac{1}{(1-q)_q^\infty}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Доказ. Формулите следуваат од својствата на гранични вредности на низи, како и $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ за $|q| < 1$.

$$
\begin{aligned}
[\infty] &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q},\\
\begin{bmatrix}\infty\\ k\end{bmatrix} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(1-q^{n-k+1})\cdots(1-q^n)}{(1-q)\cdots(1-q^k)} = \frac{1}{(1-q)\cdots(1-q^k)},\\
\begin{bmatrix}\infty\\ \infty\end{bmatrix} &= \lim_{k\to\infty}\begin{bmatrix}\infty\\ k\end{bmatrix} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(1-q)\cdots(1-q^k)} = \frac{1}{(1-q)_q^\infty}.
\end{aligned}
$$

2.2. $\boldsymbol{q}$ –АНАЛОГ НА $\boldsymbol{(x-a)^n}$ И НЕГОВИ $\boldsymbol{q}$ –ИЗВОДИ

Следно, ќе го дефинираме q –аналогот на $(x-a)^n$ за $n \in \mathbb{N}$, имено $(x-a)_q^n$. Овој дел е преземен од Глава 3, стр. 7–12, [6].

Дефиниција 5. $(x-a)_q^n$ се дефинира на следниов начин:

$$(x-a)_q^0 = 1 \text{ и за } n = 1,2, \ldots$$

$$(x-a)_q^n = (x-a)\cdot(x-qa)\cdot\ldots\cdot(x-q^{n-1}a). \tag{2}$$

Својство 2. *За $k \le n$, важи*

$$D_q^k\left((x-a)_q^n\right) = \frac{[n]!}{[n-k]!}\cdot (x-a)_q^{n-k}. \tag{3}$$

Доказ. Доказот се спроведува со индукција и едноставна примена на правилото за q −извод на производ.

Прво ја докажуваме формулата за $k = 1$:

$$\begin{aligned}
&D_q\left((x-a)_q^{n+1}\right)\\
&= D_q\left((x-a)_q^n \cdot (x-q^n a)\right)\\
&= (x-a)_q^n \cdot \underbrace{D_q\left((x-q^n a)\right)}_{1} + (q\cdot x - q^n a)\cdot \underbrace{D_q\left((x-a)_q^n\right)}_{[n]\cdot (x-a)_q^{n-1}}\\
&= (x-a)_q^n + q\cdot (x-q^{n-1}a)\cdot [n]\cdot (x-a)_q^{n-1}\\
&= (1+q\cdot [n])\cdot (x-a)_q^n = \left(1+q\cdot \frac{q^n-1}{q-1}\right)\cdot (x-a)_q^n\\
&= [n+1]\cdot (x-a)_q^n,
\end{aligned}$$

и потоа ја применуваме рекурзивно за да го добиеме резултатот за кој било позитивен број $k \leq n$.

Својство 3. *За $n \in \mathbb{N}$ важи*

$$D_q\left(\frac{(x-a)_q^{n+1}}{[n+1]!}\right) = \frac{(x-a)_q^n}{[n]!}. \tag{4}$$

Доказ. Ова следува од формулата (3) за $k = 1$:

$$D_q\left(\frac{(x-a)_q^{n+1}}{[n+1]!}\right) = \frac{D_q\left((x-a)_q^{n+1}\right)}{[n+1]!} = \frac{[n+1]\cdot (x-a)_q^n}{[n+1]!} = \frac{(x-a)_q^n}{[n]!}.$$

Својство 4. *За $n \in \mathbb{N}$ важи:*

$$\begin{aligned}
(0-a)_q^n &= (-1)^n q^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}} \cdot a^n,\\
(x-0)_q^n &= x^n.
\end{aligned} \tag{5}$$

Доказ. Ако се заменат $x = 0$ и $a = 0$ во формулата (2), се добиваат соодветно следните вредности

$$(0+a)_q^n = (0-a)\cdot(0-qa)\ldots(0-q^{n-1}a) = (-1)^n q^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}} \cdot a^n,$$

$$(x-0)_q^n \quad = (x-0)\cdot(x-q\cdot 0)\cdots(x-q^{n-1}\cdot 0) = x^n.$$

Потребни ни се и следниве резултати:

Својство 5. *За позитивни цели броеви* $m, n \in \mathbb{N}$ *важи*

$$(x-a)_q^{m+n} \quad = (x-a)_q^m \cdot (x-q^m a)_q^n. \tag{6}$$

Доказ. Ако се групираат множителите во производот од формулата (2), се добива

$$\begin{aligned}(x-a)_q^{m+n} &= (x-a)\cdot(x-q\cdot a)\cdots(x-q^{m+n-1}\cdot a)\\ &= \{(x-a)\cdots(x-q^{m-1}\cdot a)\}\\ &\cdot\{(x-(q^m a))\cdot(x-q\cdot(q^m a)\ldots(x-q^{n-1}\cdot(q^m a))\}\\ &= (x-a)_q^m\cdot(x-q^m a)_q^n.\end{aligned}$$

Претходната формула (6) може да се напише и како

$$(x-q^{-m}a)_q^{m+n} = (x-q^{-m}a)_q^m \cdot (x-a)_q^n.$$

Својство 6. *За позитивни цели броеви* $m, n \in \mathbb{N}$ *важи*

$$\begin{aligned}(1-q^{-m}a)_q^m &= (-1)^m q^{-\frac{m\cdot(m+1)}{2}}\cdot a^m\cdot\left(1-\frac{q}{a}\right)_q^m,\\ (1-q^{-m}a)_q^{m+n} &= (-1)^m q^{-\frac{m\cdot(m+1)}{2}}\cdot a^m\cdot\left(1-\frac{q}{a}\right)_q^m\cdot(1-a)_q^n.\end{aligned} \tag{7}$$

Доказ. Првата формула следува од групирањето на множителите во производот од формулата (2):

$$\begin{aligned}(1-q^{-m}a)_q^m &= \left(1-(q^{-m}a)\right)\cdot\left(1-q\cdot(q^{-m}a)\right)\cdots\left(1-q^{m-1}\cdot(q^{-m}a)\right)\\ &= \left(1-\frac{a}{q^m}\right)\cdot\left(1-\frac{a}{q^{m-1}}\right)\cdots\left(1-\frac{a}{q}\right)\\ &= \frac{a}{q^m}\cdot\left(\frac{q^m}{a}-1\right)\cdot\frac{a}{q^{m-1}}\cdot\left(\frac{q^{m-1}}{a}-1\right)\ldots\cdot\frac{a}{q}\left(\frac{q}{a}-1\right)\\ &= (-1)^m q^{-\frac{m\cdot(m+1)}{2}}\cdot a^m\cdot\left(1-q^{m-1}\frac{q}{a}\right)\left(1-q^{m-2}\frac{q}{a}\right)\cdots\left(1-\frac{q}{a}\right)\\ &= (-1)^m q^{-\frac{m\cdot(m+1)}{2}}\cdot a^m\cdot\left(1-\frac{q}{a}\right)_q^m.\end{aligned}$$

Сега втората формула од (7) лесно се добива

$$\begin{aligned}(1-q^{-m}a)_q^{m+n} &= (1-q^{-m}a)_q^m \cdot (1-a)_q^n \\ &= (-1)^m q^{-\frac{m\cdot(m+1)}{2}} \cdot a^m \cdot \left(1-\frac{q}{a}\right)_q^m \cdot (1-a)_q^n.\end{aligned}$$

2.3. $\boldsymbol{q}$ –ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА И $\boldsymbol{q}$ –БИНОМНА ФОРМУЛА НА ГАУС

Сега сакаме да изведеме q –аналог на Тејлоровата, како и на биномната формула. Овој дел е преземен од главите 4 и 5, стр. 12–17, [6].

Ги дефинираме полиномите:

$$\begin{aligned}P_0(x) &= 1, \\ P_k(x) &= \frac{(x-c)_q^k}{[k]!}, \text{ за } k = 1,2,\dots,n \text{ и } c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Својство 7. *Полиномите $P_k(x)$ ги исполнуваат следните услови:*

i) $P_0(c) = 1$ и $P_k(c) = 0$, *за секој* $k \geq 1$.

ii) $\deg P_k = k$, *за секој* $k \in \mathbb{N}_0$.

iii) $D_q P_k(x) = P_{k-1}(x)$, *за секој* $k \geq 1$ и $D_q(1) = 0$.

Доказ. Условите i) и ii) се очигледни, а iii) е последица од формулата (4).

Теорема 1 ($\boldsymbol{q}$ –*Тејлорова формула*). *За кој било полином $f(x)$ со $degf \leq n$, важи*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(D_q^k f\right)(c) \frac{(x-c)_q^k}{[k]!}. \tag{8}$$

Доказ. Нека е V векторскиот простор од сите полиноми со степен $k \leq n$. Полиномите $P_0, P_1, \dots, P_n$ се линеарно независни поради условот ii) од Својството 7. Бидејќи нивните степени строго се зголемуваат, тие формираат база на V и затоа секој полином $f \in V$ може да го запишеме на единствен начин како

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \, P_k.$$

Од условот iii) од Својството 7 следува дека

$$D_q^j P_k = P_{k-j}.$$

За да го пресметаме c_k, ќе ја пресметаме прво вредноста на $(D_q^j f)(c)$.

$$\begin{aligned}(D_q^j f)(c) &= \sum_{k=1}^{n} c_k \, (D_q^j P_k)(c) \\ &= \sum_{k=j}^{n} c_k \, P_{k-j}(c) \\ &= c_j \cdot 1 + c_{j+1} \cdot 0 + \cdots + c_n \cdot 0 \\ &= c_j,\end{aligned}$$

бидејќи од условот i) од Својството 7 следува дека $P_{k-j}(c) = 1$ само за $k = j$, а за сите други вредности е нула. Ова ја докажува q –Тејлоровата формула.

Теорема 2. ***(q –Биномна формула на Гаус)*** *За реална променлива x, произволен реален број a и природен број n, важи*

$$(x+a)_q^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot q^{\frac{k\cdot(k-1)}{2}} \cdot a^k \cdot x^{n-k}. \tag{9}$$

Доказ. Ја применуваме q –Тејлоровата формула (8) на полиномот $f(x) = (x+a)_q^n$ во $c = 0$ и со користење на формулата (3) добиваме:

$$\begin{aligned}(x+a)_q^n &= \sum_{k=0}^{n} \left(D_q^k f\right)(c) \frac{(x-c)_q^k}{[k]!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{[n]!}{[n-k]!} \cdot (c+a)_q^{n-k} \frac{(x-c)_q^k}{[k]!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot (0+a)_q^{n-k} \cdot (x-0)_q^k.\end{aligned}$$

Користејќи ги вредностите од формулата (5), се добива

$$(x+a)_q^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot q^{\frac{(n-k)\cdot(n-k-1)}{2}} \cdot a^{n-k} \cdot x^k.$$

Формулата на Гаус следува од замените $n-k \mapsto k$ и равенството $\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Теорема 3. *За реална променлива x, произволен реален број a и природен број n, важи*

$$\left(1-\frac{q}{a}\right)_q^m \cdot (1-a)_q^n = \sum_{k=-m}^{n} \begin{bmatrix} m+n \\ m+k \end{bmatrix} \cdot (-1)^k \cdot q^{\frac{k\cdot(k-1)}{2}} \cdot a^k. \qquad (10)$$

Доказ. Ако се заменат вредностите $x \to 1, a \to q^{-m}a$ во Гаусовата q –биномна формула (9), се добива

$$\begin{aligned} (1-q^{-m}a)_q^{m+n} &= \sum_{k=0}^{m+n} \begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix} \cdot q^{\frac{k\cdot(k-1)}{2}} \cdot (-q^{-m}a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} \begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix} \cdot (-1)^k \cdot q^{\frac{k\cdot(k-1)}{2}-mk} \cdot a^k. \end{aligned}$$

Ако се заменат вредностите од формулата (7) се добива

$$\begin{aligned} &(-1)^m q^{-\frac{m\cdot(m+1)}{2}} \cdot a^m \cdot \left(1-\frac{q}{a}\right)_q^m \cdot (1-a)_q^n \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} \begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix} \cdot (-1)^k \cdot q^{\frac{k\cdot(k-1)}{2}-mk} \cdot a^k. \end{aligned}$$

$$\left(1-\frac{q}{a}\right)_q^m \cdot (x-a)_q^n = \sum_{k=0}^{m+n} \begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix} \cdot (-1)^{k-m} \cdot q^{\frac{(k-m)\cdot(k-m-1)}{2}} \cdot a^{k-m}.$$

каде што користиме дека $\frac{k\cdot(k-1)}{2} - mk + \frac{m\cdot(m+1)}{2} = \frac{(k-m)\cdot(k-m-1)}{2}$. Со промена на индексот $k \mapsto m+k$ се добива формулата (10).

Да спомнеме дека важи и слична формула

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k. \tag{11}$$

која се нарекува *биномна формула на Хајне*. Читателот може да го најде доказот во книгата [6], Глава 8, стр. 27–29.

2.4. ТЕОРЕМИТЕ НА ОЈЛЕР И ЈАКОБИ

Во овој дел ќе изведеме два добро познати резултати на Ојлер, како и идентитетот на Јакоби земајќи лимеси кога $n \to \infty$ на биномните формули од претходниот дел. Овој дел е преземен од Глава 9, стр. 29–33, [6].

Теорема 4. (*Ојлер*) *За реална променлива x и произволен реален број q, каде што $|q| < 1$, важи*

$$\begin{aligned} (1+x)\cdot(1+qx)\cdot(1+q^2x)\cdots &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{k\cdot(k-1)}{2}}}{(1-q)\cdot\ldots\cdot(1-q^k)}\cdot x^k, \\ \frac{1}{(1-x)\cdot(1-qx)\cdot(1-q^2x)\cdots} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q)\cdot\ldots\cdot(1-q^k)}\cdot x^k. \end{aligned} \tag{13}$$

Овие идентитети пократко може да се напишат во следната форма

$$\begin{aligned} (1+x)_q^{\infty} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{k\cdot(k-1)}{2}}}{(1-q)_q^k}\cdot x^k, \\ \frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q)_q^k}\cdot x^k. \end{aligned}$$

Доказ. Земајќи лимес кога $n \to \infty$ на биномната формула на Гаус (9) за вредности $x = 1, a = z$, се добива првата формула

$$(1+z)_q^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \infty \\ k \end{bmatrix} \cdot q^{\frac{k\cdot(k-1)}{2}} \cdot z^k.$$

Втората формула следува од лимесот кога $n \to \infty$ на биномната формула на Хајне (11)

$$\frac{1}{(1-z)_q^\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \infty \\ k \end{bmatrix} z^k.$$

Теорема 5. ***(Јакоби)*** *За реална променлива* x *и произволен реален број* q, ~~со~~ $|q| < 1$, *важи*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \cdot (1+q^{2n-1}x) \cdot (1+q^{2n-1}x^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \cdot x^n. \qquad (14)$$

Доказ. Земајќи лимес кога $m, n \to \infty$ од двете страни на формулата (10), добиваме

$$\left(1-\frac{q}{a}\right)_q^\infty \cdot (1-a)_q^\infty = \frac{1}{(1-q)_q^\infty} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot q^{\frac{k\cdot(k-1)}{2}} \cdot a^k.$$

Притоа ја искористивме формулата (1) за да го пресметаме лимесот на биномниот коефициент. Од тука следува

$$(1-q)_q^\infty \cdot (1-a)_q^\infty \cdot (1-qa^{-1})_q^\infty = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot q^{\frac{k\cdot(k-1)}{2}} \cdot a^k.$$

Ако се запишат заедно соодветните множители од формулата (2) во производот во левата страна се добива

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) \cdot (1-q^{n-1}a) \cdot (1-q^n a^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot q^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}} \cdot a^n.$$

Тврдењето следува од замената $q \mapsto q^2$, а потоа $a \mapsto -qx$.

3. ДИРЕКТНИ ДОКАЗИ НА ИДЕНТИТЕТОТ НА ЈАКОБИ

Во овој дел ќе презентираме докази на идентитетот на Јакоби, кои се засноваат на директно користење на бесконечни редови и производи. Целта е да се добијат претставувања на бесконечни производи во форма на бесконечни редови, Лоранови редови или парцијални дропки. Овие докази се добиваат на следниот начин:

1. Од бесконечниот производ се изведува едноставна функционална равенка,
2. Функциите се претставуваат како соодветен ред со неопределени коефициенти,
3. Се изведува рекурентна релација за коефициентите преку чекор 1,
4. Се решава рекурентната релацијата.

Резултатите од следните делови ќе послужат како убави примери на техниката користена за докажување на вакви идентитети.

3.1. ПРВ ДИРЕКТЕН ДОКАЗ

Во овој дел, преземен од трудовите [2] и [9], даваме директен доказ на формулата (14), следејќи ги горенаведените чекори. Левата страна на (14) ја означуваме со I(z)

$$I(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) \cdot (1+q^{2n-1} \cdot z) \cdot (1+q^{2n-1} \cdot z^{-1}).$$

и дефинираме

$$J(z) = I(z^2) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) \cdot (1+q^{2n-1} \cdot z^2) \cdot (1+q^{2n-1} \cdot z^{-2}).$$

Теорема 6. *Ако* $|q| < 1$, *тогаш*

$$J(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n}. \tag{15}$$

Доказ. Доказот ќе го презентираме според горенаведените чекори.

Чекор 1. Ќе го докажеме равенството

$$J(z) = qz^2 J(qz). \tag{16}$$

Навистина,

$$J(qz) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) \cdot (1+q^{2n-1} \cdot (qz)^2) \cdot (1+q^{2n-1} \cdot (qz)^{-2})$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\cdot(1+q^{2n+1}z^2)\cdot(1+q^{2n-3}z^{-2}) \\
&= \left(\frac{1}{1+q\cdot z^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{q\cdot z^2}\right)J(z) \\
&= \frac{J(z)}{q\cdot z^2}.
\end{aligned}
$$

Чекор 2.

$$J(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, z^{2n}.$$

каде што $a_{-2n} = a_{2n}$. Од функционалната равенка (16) заклучуваме дека:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, z^{2n} &= (q\cdot z^2)\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(qz)^{2n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, q^{2n+1} z^{2n+2} \qquad (17)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n-1}\, q^{2n-1} z^{2n}.
\end{aligned}
$$

Чекор 3 и 4. Од равенката (17) следува дека $a_0 = 1,\ a_n = a_{n-1}\cdot q^{2n-1}$ и оттука

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1}\cdot q^{2n-1} = a_{n-2}\cdot q^{2n-3}\cdot q^{2n-1} \\
\ldots &= q\cdot q^3\cdot\ldots\cdot q^{2n-3}\cdot q^{2n-1} = q^{1+3+\cdots+(2n-3)+(2n-1)} = q^{n^2},
\end{aligned}
$$

со што се докажува равенката (15). Оригиналниот идентитет на Јакоби (14) следува со замена $z^2 \mapsto x$.

3.2. ОРИГИНАЛНИОТ ДОКАЗ НА ЈАКОБИ

Овој дел е преземен од книгата [2], стр.180 и трудот [8]. Ги дефинираме следниве бесконечни q –производи:

$$\begin{aligned} F(z) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}\cdot z)\,, \\ G(z,q) &= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n\cdot z)}, \\ H(z) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}\cdot z)\cdot(1+q^{2n-1}\cdot z^{-1}). \end{aligned} \tag{17}$$

Потоа ги претставуваме $F(z)$ и $G(z,q)$ како бесконечни редови и парцијални дропки, соодветно. Нив ги користиме за да го добиеме Лорановиот ред на $H(z)$, имено:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2n})\cdots}z^n. \tag{18}$$

Од двете претставувања на $H(z)$, дадени со формулите (17) и (18) следува идентитетот на Јакоби.

Својство 8. *За $F(z)$ и $G(z,q)$ важат следните функционални равенки*

$$\begin{aligned} F(z) &= (1+q\cdot z)\cdot F(q^2z), \\ G(z,q) &= \frac{G(qz,q)}{1-qz}. \end{aligned} \tag{19}$$

Доказ. Равенката за $F(z)$ се добива со одвојување на првиот множител од производот (17) и поместување на индексот на преостанатиот бесконечен производ

$$\begin{aligned} F(z) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}\cdot z) \\ &= (1+q\cdot z)\cdot\prod_{n=2}^{\infty}(1+q^{2n-1}\cdot z) \\ &= (1+q\cdot z)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2(n+1)-1}\cdot z\right) \end{aligned}$$

$$= (1 + q \cdot z) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + q^{2n-1} \cdot (q^2 z)\right)$$
$$= (1 + q \cdot z) \cdot F(q^2 z).$$

На сличен начин, од формулата (17) следува дека

$$\begin{aligned} G(z,q) &= \frac{1}{(1-q\cdot z)\cdot(1-q^2\cdot z)\cdot(1-q^3\cdot z)\cdots} \\ &= \frac{1}{(1-q\cdot z)}\cdot\left(\frac{1}{\left(1-q\cdot(qz)\right)\cdot\left(1-q^2\cdot(qz)\right)\cdots}\right) \\ &= \frac{G(qz,q)}{1-qz}.\square \end{aligned}$$

Да ја запишеме функцијата $F(z)$ како бесконечен ред

$$F(z) = A_0 + A_1 \cdot z + A_2 \cdot z^2 + \cdots. \tag{20}$$

а функцијата $G(z,q)$ како парцијална дропка

$$G(z,q) = B_0 + \frac{B_1 z}{1-qz} + \frac{B_2 z^2}{(1-qz)(1-q^2 z)} + \cdots. \tag{21}$$

каде што $A_0 = 1$, и $B_0 = 1$.

Својство 9. *Коефициентите A_n, B_n од (20) и (21) ги исполнуваат следните рекурентни релации*

$$\begin{aligned} A_0 &= B_0 = 1, \\ A_n &= A_n \cdot q^{2n} + A_{n-1} \cdot q^{2n-1}, \\ B_n &= B_{n-1} q^{2n-1} + B_n q^n. \end{aligned} \tag{22}$$

Доказ. Ако во функционалната равенка (19) за $F(z)$ го замениме бесконечниот ред (20), се добива

$$\begin{aligned} & A_0 + A_1 \cdot z + A_2 \cdot z^2 + \cdots \\ & = (1 + q \cdot z) \cdot (A_0 + A_1 \cdot q^2 z + A_2 \cdot q^4 z^2 + \cdots) \\ & = A_0 + (A_1 \cdot q^2 + A_0 \cdot q) \cdot z + (A_2 \cdot q^4 + A_1 \cdot q^3) \cdot z^2 + \cdots \\ & = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot q^{2n} + A_{n-1} \cdot q^{2n-1}) \cdot z^n. \end{aligned}$$

Со изедначување на коефициентите се добива дека

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \\ A_n &= A_n \cdot q^{2n} + A_{n-1} \cdot q^{2n-1}. \end{aligned}$$

Ако во функционалната равенка (19) за $G(z,q)$ ја замениме парцијалната дропка (21), се добива

$$1 + \frac{B_1 z}{1-qz} + \frac{B_2 z^2}{(1-qz)(1-q^2 z)} + \cdots = \frac{1}{1-qz} + \frac{B_1 qz}{(1-qz)(1-q^2 z)} + \cdots.$$

Го користиме следниот едноставен идентитет

$$1 = (1-q^n z) + q^n z, \;\; n \in \mathbb{Z}$$

за да докажеме дека

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-qz} &= 1 + \frac{qz}{1-qz} \\ \frac{z}{(1-qz)(1-q^2 z)} &= \frac{z}{1-qz} + \frac{q^2 z^2}{(1-qz)(1-q^2 z)}. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Сега, следува

$$\begin{aligned} &1 + \frac{B_1 z}{1-qz} + \frac{B_2 z^2}{(1-qz)(1-q^2 z)} + \cdots \\ &= 1 + \frac{(q + B_1 q)z}{1-qz} + \frac{(B_1 q^3 + B_2 q^2)z}{(1-qz)(1-q^2 z)} + \cdots. \end{aligned}$$

и оттука $B_n = B_{n-1} q^{2n-1} + B_n q^n$.

Својство 10. *За* $F(z)$ *и* $G(z,q)$ *важат следните формули*

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(q) \cdot z^n, \\ G(z,q) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(q) \cdot \frac{z^n}{(1-qz)\cdots(1-q^n z)}. \end{aligned} \tag{23}$$

каде што

$$\begin{aligned} A_n(q) &= \frac{q^{n^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2n})}, \\ B_n(q) &= \frac{q^{n^2}}{(1-q)\cdots(1-q^n)}, \end{aligned} \tag{24}$$

Доказ. Коефициентите $A_n(q)$ се добиваат преку решавањето на рекурентните релации (22).

$$\begin{aligned} A_n(q) &= \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n}} \cdot A_{n-1}(q) \\ &= \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n}} \cdot \frac{q^{2n-3}}{1-q^{2n-2}} \cdot A_{n-2}(q) \\ &\vdots \\ &= \frac{q^{2n-1} \cdot q^{2n-3} \cdots q^3 \cdot q^1 \cdot}{(1-q^{2n}) \cdot (1-q^{2n-2}) \cdots (1-q^2)} \\ &= \frac{q^{n^2}}{(1-q^{2n}) \cdot (1-q^{2n-2}) \cdots (1-q^2)}. \end{aligned}$$

Последниот чекор следува од равенството

$$(2n-1) + (2n-3) + \cdots + 3 + 1 = n^2.$$

Коефициентите B_n ја исполнуваат следната рекурентна релација

$$\begin{aligned} B_0(q) &= 1, \\ B_n(q) &= \frac{q^{2n-1}}{1-q^n} B_{n-1}(q) \,. \end{aligned}$$

Решението се добива слично како во претходната релација и е

$$B_n(q) = \frac{q^{n^2}}{(1-q)\cdots(1-q^n)}.$$

Ова го завршува доказот на формулите (23) и (24).

Доказот на следниот идентитет е малку потежок и не го следи стандардниот алгоритам. Наместо тоа, директно ги множиме формулите на производот и наоѓаме репрезентација на коефициентите, користејќи го претходниот резултат. Ова е основната идеја на Јакоби во неговиот доказ.

Својство 11 *За $H(z)$ дефинирана во (17) важи следната формула*

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(q) z^n, \tag{25}$$

каде што

$$C_n(q) \quad = \frac{q^{n^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2n})\cdots}.$$

Доказ. Да напишеме

$$\begin{aligned}
F(z) &= A_0 + A_1 \cdot z + A_2 \cdot z^2 + \cdots, \\
H(z) &= (A_0 + A_1 \cdot z + A_2 \cdot z^2 + \cdots) \\
&\quad \cdot \left(A_0 + A_1 \cdot \frac{1}{z} + A_2 \cdot \frac{1}{z^2} + \cdots\right). \\
T_r(z,q) &= \frac{z^r}{(1-qz)(1-q^2z)\cdot \ldots \cdot (1-q^rz)}
\end{aligned}$$

Бидејќи $H(z) = H(z^{-1})$, јасно е дека $C_n = C_{-n}$. Изразот со z^n доаѓа од множење на z^{n+r} со z^{-r}, каде што r е ненегативен цел број. Оттука следува дека

$$C_n = \sum_{r=0}^{\infty} A_{n+r} \cdot A_r.$$

Со замена на пресметаните вредности за A_n од формулата (24) се добива

$$\begin{aligned}
A_{n+r} \cdot A_r &= \frac{q^{(n+r)^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2n+2r})} \cdot \frac{q^{r^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2r})} \\
&= \frac{q^{n^2+2nr+r^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2n+2r})} \cdot \frac{q^{r^2}}{(1-q^2)\cdot \cdots (1-q^{2r})} \\
&= \frac{q^{n^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2n})} \\
&\quad \cdot \left(\underbrace{\frac{q^{2nr}}{(1-q^{2n+2})\cdots(1-q^{2n+2r})}}_{T_r(q^{2n},q^2)} \cdot \underbrace{\frac{q^{2r^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2r})}}_{B_r(q^2)} \right) \\
&= \frac{q^{n^2}}{(1-q^2)\cdot(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})} \cdot B_r(q^2) \cdot T_r(q^{2n},q^2).
\end{aligned}$$

Може да се препознаат изразите

$$B_r(q^2) \quad = \frac{q^{2r^2}}{(1-q^2)\cdot(1-q^4)\cdots(1-q^{2r})},$$

$$T_r(q^{2n}, q^2) \quad = \frac{q^{2nr}}{(1-q^{2n+2})\cdot(1-q^{2n+4})\cdots(1-q^{2n+2r})},$$

на $G(q^{2n}, q^2) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} B_r(q^2)\cdot T_r(q^{2n}, q^2)$, и оттука користејќи го производот

$$G(q^{2n}, q^2) \quad = \frac{1}{(1-q^{2n+2})\cdot(1-q^{2n+4})\dots},$$

се наоѓа

$$C_n \quad = \sum_{r=0}^{\infty} A_{n+r}\cdot A_r = \frac{q^{n^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2n})}\cdot\left(\underbrace{1+\sum_{r=1}^{\infty} B_r(q^2)\cdot T_r(q^{2n}, q^2)}_{G(q^{2n},q^2)}\right)$$

$$= \frac{q^{n^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2n})}\cdot G(q^{2n}, q^2)$$

$$= \frac{q^{n^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2n})}\cdot\frac{1}{(1-q^{2n+2})\cdot(1-q^{2n+4})\dots}.$$

Според тоа,

$$C_n = \frac{q^{n^2}}{(1-q^2)\cdot(1-q^4)\dots}.$$

со што доказот е готов.

Се гледа дека целта на Јакоби во дефинирањето на функцијата $G(q,z)$ е претворање на збирот $1+\sum_{r=1}^{\infty} B_r(q^2)\cdot T_r(z, q^2)$ во производ. Доказот на овој идентитет е сведок за извонредните математички и пресметувачки вештини на Јакоби.

4. ПРИМЕНИ НА ИДЕНТИТЕТОТ НА ЈАКОБИ

Со одредени смени во идентитетот на Јакоби се добиваат повеќе корисни идентитети. Како примена изведуваме добро познати и класични идентитети на Ојлер, Гаус и Јакоби, чие истражување спаѓа во областите на елиптични функции, комбинаторика и аналитичка теорија на броеви.

Теоремите од оваа глава може да се најдат во книгите [3,4,5]. Овој дел е преземен од [7], секција 1.1, стр.3–10.

Теорема 7. ***(Јакоби)*** *За* $|uv| < 1, u \neq 0, v \neq 0$ *важи*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-u^n v^n)(1-u^n v^{n-1})(1-u^{n-1}v^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n u^{\frac{n(n+1)}{2}} v^{\frac{n(n-1)}{2}}. \quad (26)$$

Доказ. Формулата (26) се добива со замените $q = \sqrt{uv}$ и $z = \sqrt{\frac{u}{v}}$ во идентитетот на Јакоби (14).

Теорема 8. **(*Ојлер, Гаус*)** *За* $|q| < 1$ *и* $m \in \mathbb{N}$ *важи*

$$\begin{aligned}&\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n(m+1)}\right)\left(1-q^{n(m+1)-m}\right)\left(1-q^{n(m+1)-1}\right)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(n-1)(m+1)}{2}+n},\end{aligned} \quad (27)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n)^2}{1-q^{2n}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}, \quad (28)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}. \quad (29)$$

Доказ. За првиот идентитет (27), треба да се направат замените $u \mapsto q$ и $v \mapsto q^m$ во идентитетот (26). Со овие смени изразите од левата страна на (26) го добиваат обликот

$$\begin{aligned} u^n v^n &= q^n \cdot (q^m)^n = q^{n\cdot(m+1)},\\ u^n v^{n-1} &= u^n v^n \cdot v^{-1} = q^{n\cdot(m+1)-m},\\ u^{n-1}v^n &= u^n v^n \cdot u^{-1} = q^{n\cdot(m+1)-1},\end{aligned}$$

што ги дава множителите на левата страна на (27). За десната страна, се добива

$$u^{\frac{n(n+1)}{2}} v^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad = q^{\frac{n(n+1)}{2}} (q^m)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$= q^{\frac{n}{2}((n+1)+m(n-1))} = q^{\frac{n}{2}((n-1)+m(n-1)+2)}$$
$$= q^{\frac{n(n-1)(m+1)}{2}+n}.$$

Вториот идентитет (28) следи од (27), со замената $m = 1$.

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n(m+1)}\right)\left(1-q^{n(m+1)-m}\right)\left(1-q^{n(m+1)-1}\right)$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}\overbrace{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})}^{(1-q^{n})}(1-q^{2n-1})$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n})\cdot\frac{\overbrace{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})}^{(1-q^{n})}}{(1-q^{2n})}$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{n})^{2}}{(1-q^{2n})}.$$

каде што производот на изразите над парни и непарни цели броеви го дава производот над сите природни броеви. Експонентот на q на десната страна на (27) за $m = 1$ е

$$\frac{n(n-1)(m+1)}{2} + n \quad = n(n-1) + n = n^{2}.$$

Идентитетот (29) следува со замена на $m = 2$ во првиот идентитет (27).

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n(m+1)}\right)\left(1-q^{n(m+1)-m}\right)\left(1-q^{n(m+1)-1}\right)$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}\overbrace{(1-q^{3n})(1-q^{3n-2})(1-q^{3n-1})}^{(1-q^{n})}$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n}).$$

Експонентот на q во десната страна на (27) станува

$$\frac{n(n-1)(m+1)}{2} + n = \frac{n}{2}(3(n-1)+2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

5. ЗАБЕЛЕШКИ

Мојата фасцинација за вакви идентитети и интересни пресметувачки резултати ја разбуди проф. Ристо Малчески за време на моите средношколски години. Алгебарските трансформации и основите на анализата ги научив од неговите учебници. Првпат се сретнав со вакви идентитети кога тој ме запозна со учебникот на Харди и Рајт, [4].

Правилно се запознав со оваа област за време на моите студии преку предавањата на проф. Еберхард Фрајтаг и проф. Зигрид Боге во Хајделберг. Проф. Боге го презентираше доказот на идентитетот на Јакоби на семинар и ме остави воодушевен. Тие ми дадоа како дипломска тема нов доказ на идентитетите на Мекдоналд, кои претставуваат модерно обопштување на идентитетот на Јакоби.

Им благодарам на организаторите на семинарот „Математика и примени“, проф. Ирена Стојковска и проф. Весна Целакоска-Јорданова кои ми дадоа можност да ја презентирам оваа тема пред јавноста. Исто така им благодарам на уредниците и рецензентите за нивните корисни забелешки и корекции за време на процесот на прегледување на трудот.

ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Chu. *Jacobis triple product identity and the quintuple product identity*. Bollettino dell Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 10-B (3), 2007, 867–874.

[2] J. A. Ewell. *An easy proof of the triple-product identity*. The American Mathematical Monthly, 88(4), 1981, p.270.

[3] C.F. Gauss. *Hundert Theoreme ueber die neuen Transscendenten*, Gesammelte Werke, Volume 3, Goettingen, 1876, p. 461–469.

[4] G. H. Hardy, E.M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 2008.

[5] C.G. J. Jacobi. *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*, Gesammelte Werke, Volume 1, Berlin, 1881.

[6] V. Kac and P. Cheung. *Quantum Calculus*. Springer New York, 2002.

[7] G. Koehler. *Eta Products and Theta Series Identities*. Springer Berlin Heidelberg, January 2013.

[8] P.Singh. *Elliptic functions: Theta functions continued*. February 2011.
https://paramanands.blogspot.com/2011/02/elliptic-functions-thetafunctions-contd.html

[9] R. Zaman. *The Jacobi triple product*.
https://pdfslide.tips/documents/the-jacobi-triple-productpdf.html

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет,
ул. Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија

[2] РИСАТ, Институт за истражување на наука и технологија,
Валона, Албанија,
e-mail: huseini@risat.org

Примен: 29.4.2021
Поправен: 9.6.2021
Одобрен: 25.9.2021
Објавен на интернет: 30.9. 2021