МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 2 (2017), 125 – 145

СТРАТЕГИИ ЗА ПРЕДВИДУВАЊА ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Марија Илиевска [1]
Гордана Николовска [1]
Ирена Стојковска [1]

Практикувањето на предвидувањата во наставата по математика е важно од повеќе причини. Имено, начинот на расудување при предвидувањата создава посебна состојба на учење. Важно е тоа што учениците сами си поставуваат прашања од типот „Зошто?“ и „Зошто не?“, и ги бараат нивните одговори. При предвидувањата учениците често се служат со различни начини за визуелизација на проблемите, го поврзуваат претходно изучениот материјал со конкретниот проблем и откриваат врски меѓу математичките поими и концепти ([3]). Вежбањето на предвидувачките способности на учениците е и од голема важност за одржување на љубопитноста и мотивацијата за работа. Мал е обемот на студиите кои ставаат акцент на предвидувањата во наставата по математика. Некои од тие студии се [1]–[6].

Во овој труд, ќе изложиме неколку начини на вежбање на предвидувачките способности кај учениците. Ќе бидат опфатени главно две групи на стратегии за предвидувања - алгебарски стратегии и веројатносни стратегии. При тоа, под алгебарски стратегии ќе подразбираме постапки при кои со користење на аритметички операции доаѓаме постепено до генерализации кои важат за разгледуваните елементи, односно сите тие ко да припаѓаат на одредена класа од објекти. Додека пак, веројатносните стратегии се основаат на заклучоци добиени по собирање на одреден број на податоци, при што во самите заклучоци има доза на неодреденост, затоа што податоците биле случајни. Поголемиот дел од стратегиите може да се применуваат и со учениците од пониските одделенија.

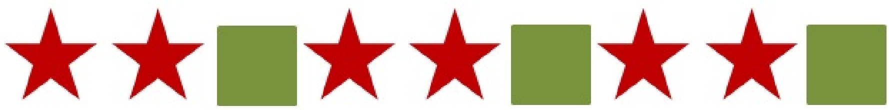
1. АЛГЕБАРСКИ СТРАТЕГИИ ЗА ПРЕДВИДУВАЊА

Алгебарското размислување е важен процес во наставата по математика, при кој учениците генерализираат математички идеи од конкретно множество на вредности, а заклучокот го претставуваат на различен начин во зависност од нивната возраст. Алгебарските стратегии може да се користат и при вежбање на предвидувачките способности кај учениците. Нив ќе ги разгледаме проучувајќи неколку видови шаблони и низи со броеви. Чекор понатаму е искористувањето на алгебарските стратеги за предвидувања, за воведување на функционалното размислување кај учениците ([4]), што во овој труд нема да биде примарна цел на разгледување.

1.1. ПОВТОРУВАЧКИ ШАБЛОНИ

Повторувачките шаблони се едни од подоминантните видови на шаблони кои учениците ги истражуваат во раните години. Тие се користат за опишување на правилото на појавување на елементите во една низа (шаблон), преку одговарање на прашањата „Што следи во низата?“, „Кој дел се повторува?“ или „Што недостига?“. Всушност, препознавањето на распоредот на елементите кај ваквите шаблони води до скоро секогаш точни предвидувања како одговор на гореспоменатите прашања ([6]). Ќе предложиме неколку чекори за обработка на повторувачките шаблони. Во секој чекор се вклучени прашања или барања за учениците, што би им помогнало на учениците при предвидувањата.

Пример 1. Да го разгледаме повторувачкиот шаблон даден на Слика 1. Ова е пример на шаблон кој го следи правилото ААБ.



Слика 1. Повторувачки шаблон

Истражувањето на шаблонот од Пример 1 ќе го проследиме преку следните чекори:

а) Препишување на шаблонот во тетратка. Со препишувањето на секој елемент од шаблонот ученикот ќе се запознае со неговиот состав и ќе го почувствува повторувањето на фигурите (елементите).

б) Продолжување на шаблонот. Почетно прашање во овој чекор е „Која фигура е следна?“. Одговорот опфаќа предвидување за еден чекор надесно, меѓутоа шаблонот може да се продолжи и од левата страна, со прашањето „Која фигура претходи на првата ѕвезда?“. Пополнувањето на шаблонот со фигури од двете страни води кон дефинирање на редоследот на елементите.

в) Идентификација на повторувачката целина. *Повторувачката целина* се состои од најмалиот број елементи кои се повторуваат, по определениот редослед. Во повторувачкиот шаблон од Пример 1, таа целина е „ѕвезда, ѕвезда, квадрат“. Од учениците се бара да ги заокружат овие целини на цртежот (види Слика 2). Секако, може да има повеќе опции и предлози за изборот на оваа целина (други точни одговори за повторувачката целината се „ѕвезда, квадрат, ѕвезда“ и „квадрат, ѕвезда, ѕвезда“, доколку се смета низата од фигури дека е продолжлива и од лево и од десно). Но, важно е да се напомене дека, треба да се избере наједноставната претстава за повторувачката целина, затоа што оваа целина понатаму ја разгледуваме како генератор на шаблонот и треба да биде множество погодно за анализирање по број и состав на елементи. Затоа велиме дека шаблонот на Слика 1 го следи правилото ААБ.

Слика 2. Повторувачки целини во шаблонот од Пример 1

г) Прашања, табели и генерализации. Дефинирањето на повторувачката целина е важно за остварување на потребната генерализација. За наставникот да се увери дека учениците добро го разбрале создавањето на шаблонот, а учениците да се уверат во моќта на сопственото предвидување, кое го направиле за поединечни чекори во продолжување на шаблонот, предлагаме неколку типови прашања:

- Нацртај го овој шаблон така што да има 5 квадрати и повторувачките целини да се целосни. Колку ѕвезди ќе има на цртежот?
- Ако има 10 повторувачки целини, колку квадрати, а колку ѕвезди ќе има?
- Ако се нацртани 12 фигури од шаблонот, така што првата е квадрат, која е дванаесеттата фигура?

Иста улога како прашањата, може да одигра и пополнувањето на Табела 1 со вредностите кои недостигаат, под претпоставка дека повторувачките целини се целосни.

Број на целини	Број на ѕвезди	Број на квадрати	Вкупно фигури
20			
	12		
			33
		40	

Табела 1. Табела за пополнување
(за повторувачкиот шаблон од Пример 1)

Генерализирањето на шаблонот за произволен непознат број на повторувачки целини е интересен предизвик за учениците од основното образование, кој не треба да се исклучи, покрај тоа што можеби ќе изгледа несоодветен за пониските одделенија. Размислувањето започнува со прашање од типот „Колку квадрати ќе има ако има вкупно *n* повторувачки целини од шаблонот?“ На овој начин се поттикнува согледувањето на врската помеѓу бројот на повторувачки целини и вкупниот број на елементи од секој облик од кои е составена секоја целина (вкупниот број квадрати е исто n, вкупниот број на ѕвезди е двојно поголем т.е. 2n, а вкупниот број на фигури е три пати поголем т.е. 3n). Согледувањето на оваа зависност и нејзината оценка е најважниот чекор при генерализирањето.

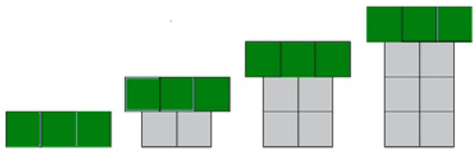
д) Создавање на друг шаблон со истото правило и примери од секојдневниот живот. Откако ќе се утврди дека фигурите во шаблонот следат определено правило кое е диктирано од повторувачката целина, јасно е дека природата на елементите не е важна, туку правилото по кое тие се распоредени. Може да започнеме од менување на боите, на пример, да ги обоиме ѕвездите во жолта боја, а квадратите во сина боја. Потоа, да ги замениме квадратите со кругови, а ѕвездите со триаголници. Постојат неограничен број можности за вакви модификации, кои може да се прават чекор по чекор, се додека наставникот не увиди дека правилото на шаблонот е усвоено.

Предизвик, но и задача на секој наставник е доближувањето на математичките содржини, кои се изучуваат на часот, до секојдневниот, реалниот живот. Така, може да се побара од учениците да дадат примери за повторувачки шаблони од секојдневниот живот, да ги идентификуваат повторувачките целини и да го опишат правилото на шаблонот. Такви примери се: деновите во седмицата, месеците во годината, потоа може да бидат плочките на плочникот пред училишната зграда, оградата на училишниот двор, зградите во населбата (некои од нив го следат правилото „висока-ниска“), но и музичките ритми.

1.2. РАСТЕЧКИ ШАБЛОНИ

Шаблоните се моќна алатка за развивање на разбирањето на математичките врски и зависности ([1]). Растечките шаблони се добар пример за воведување на учениците во поимот на линеарна функција и нејзиниот график. За разлика од повторувачките шаблони, кои ги разгледувавме како непрекинато повторување на генерирачките целини, кај растечките шаблони ќе го воведиме поимот *почетен чекор*.

Пример 2. Да го разгледаме растечкиот шаблон даден на Слика 3.



Слика 3. Растечки шаблон

Растечкиот шаблон од Пример 2 ќе го истражиме во следните чекори:

а) Препишување на шаблонот во тетратка. Иста постапка како и кај повторувачките шаблони, имено со препишување на шаблонот во тетратка, може да се направат и првичните „груби“ предвидувања.

б) Определување, нумерирање и споредба на чекорите. Растечката природа на шаблонот е очигледна од самиот цртеж, па очекувањето за повеќе квадратчиња во неговото продолжување е очигледно. Да забележиме, дека продолжувањето го правиме само од десната страна, т.е. во насока на „растењето“ на шаблонот. Тогаш прашањето за продолжување на шаблонот се сведува на прашањето „Како изгледа следниот чекор?“ Помошно прашање е: „Во која боја се квадратите чиј број се зголемува?“ Првата констатација е дека секој чекор содржи точно три зелени квадратчиња, додека секој следен чекор содржи повеќе сиви квадратчиња од претходниот. Бидејќи воочивме дека бројот на сиви квадратчиња го „гради“ шаблонот, а такви нема во првиот чекор, на првиот чекор одлучуваме да му го доделиме бројот 0 и од причина што тоа е почетниот чекор. Значи, сакаме да го опишеме составот на чекорот со број 4. Предвидувањето е дека чекорот број 4 ќе содржи повеќе сиви квадратчиња од чекорот број 3.

в) Пребројување и предвидување на следниот чекор. По пребројувањето лесно може да се направи прецизно предвидување. Имено, секој чекор содржи точно за две повеќе сиви квадратчиња од претходниот, па предвидуваме дека чекорот број 4 има две сиви квадратчиња повеќе отколку чекорот број 3.

г) Пополнување табела. Пополнувањето на Табела 2 го поддржува направеното предвидување. Првите четири колони се пополнуваат од цртежот, а останатите три колони се предвидувања.

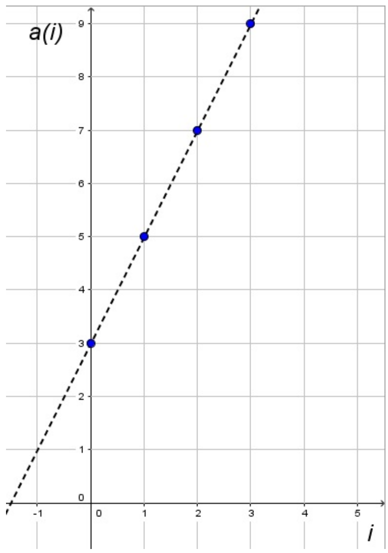
реден број на чекор	0	1	2	3	**4**	**5**	**6**
број на сини квадрати	3	3	3	3	**3**	**3**	**3**
број на сиви квадрати	0	2	4	6	**8**	**10**	**12**
вкупен број на квадрати	3	5	7	9	**11**	**13**	**15**

Табела 2. Продолжување на растечкиот шаблон од Пример 2

д) Дефинирање на врските, генерализација и примери од секојдневниот живот. Кај растечките шаблони разгледуваме две врски помеѓу чекорите: зависност помеѓу соседните чекори и зависност помеѓу редниот број на чекорот и неговата структура, [4]. Рекурзивната врска помеѓу соседните чекори ја дискутиравме веднаш после пребројувањето. Имено, заради таа зависност, учениците од пониските одделенија може да го опишат шаблонот како 3+2+2+2+... шаблон. Задача за малку повозрасните ученици е да размислат за зависноста помеѓу бројот на сиви квадратчиња и редниот број на чекорот. Олеснувачка идеја е, ако во секој чекор се изоставaт трите зелени квадратчиња и се размислува за обопштување врз основа на редниот број на чекорот, ќе ја имаме следната коресподенција: $0\to 0$, $1\to 2$, $2\to 4$, $3\to 6$,... Доколку во секој чекор го додадеме непроменливиот број на зелени квадратчиња, ја добиваме кореспонденцијата: $0\to 3+2\cdot 0$, $1\to 3+2\cdot 1$, $2\to 3+2\cdot 2$, $3\to 3+2\cdot 3$,.... Сега, ако со k го означиме редниот број на чекорот, шаблонот од Пример

2 го опишуваме како $3+2\cdot k$ шаблон, каде што k прима вредности од множеството $\mathbb{N}_0$.

За учениците од погорните одделенија, истражувањето на растечките линеарни шаблони може да претставува добар вовед во график на линеарна функција. Доколку редниот број на чекорот го означиме со i, и неговите вредности ги читаме од апцисната оска, а вкупниот број на квадратчиња го означиме со $a(i)$ и овие вредности ги читаме од ординатната оска, тогаш растечкиот шаблон од Пример 2 може да го претставиме графички како на Слика 4. Испрекинатата права е графикот на линеарната функција $y = 3+2\cdot x$.



Слика 4. Графичко претставување на растечкиот шаблон од Пример 2.

За комплетност на истражувањата на растечките шаблони, добро е да се побараат и примери на растечки шаблони од секојдневието. Некои од нив се: возраста на еден човек (во години или месеци, забележана на еднакви временски интервали), фазите на изградба на една ракета (најнапред се гради главата, а потоа модулите се додаваат еден по еден одоздола), воз со локомотива и вагони при што на секоја станица се додаваат по одреден еднаков број на вагони, или пак малку посложени растечки шаблони како бројот на завршни краци на снегулката во секоја фаза од нејзиното формирање, бројот на гранки на едно дрво на годишно ниво и слични.

1.3. НИЗИ ОД БРОЕВИ (ЛИНЕАРНА ЗАВИСНОСТ)

При пребројувањето на составните елементи на фигурите кај растечките шаблони лесно може да се почувствува низата броеви, така што на секој чекор од шаблонот му соодветствува член од низата. Следно, ќе ги разгледаме стратегиите за предвидување кај низите од броеви и предвидвањето на зависноста на членовите на низата од редниот број на членот. Така, кај растечкиот шаблон од Пример 2, низата формирана од вкупниот број на квадрати е низа броеви кај која забележуваме линеарна зависност на членовите на низата од редниот број на членот. Во продолжение ќе разгледаме уште еден пример на низа броеви со линеарна зависност и техника за откривање на зависноста.

Пример 3. Нека е дадена низата броеви

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots$$

Треба да го откриеме правилото на низата и да ја продолжиме за барем три члена.

Истражувањето на низата броеви од Пример 3 го спроведуваме на следниот начин: Редните броеви на елементрите во низата ги означуваме со i, а соодветните вредности со $a(i)$ и ги внесуваме во Табела 3. Во истата табела паралелно се разгледуваат и врските помеѓу членовите на низата, така се пресметуваат и разликите меѓу соседните членови, $a(i+1)-a(i)$. Учениците лесно можат да воочат дека во секој чекор, оваа разлика е еднаква на 3. Тогаш, се прави предвидувањето за следните три чекори. Имено, предвидуваме дека и во следните три чекори разликата на соседните членови ќе биде 3, па прво се пополнуваат тие вредности, а потоа знаејќи дека шестиот член е 16, и разликата меѓу седмиот и шестиот член е 3, го пресметиваме седмиот член како 16+3 и така натаму. Добиваме дека следните три члена во низата се 19, 22 и 25.

Но, која е зависноста на членот $a(i)$ од неговиот реден број i? Одговорот на ова прашање може да го побараме со прикажување на низата на график, на сличен начин како што го направивме тоа за низата од Пример 2.

реден број на членот i	вредност на членот $a(i)$	разлика меѓу соседните членови $a(i+1)-a(i)$
1	1	3
2	4	3
3	7	3
4	10	3
5	13	3
6	16	**3**
7	**19**	**3**
8	**22**	**3**
9	**25**	

Табела 3. Предвидувањето на елементите на низата од Пример 3 преку пресметување на разликите на соседните членови

Од соодветниот графички приказ ќе се воочи дека и дадените и предвидените членови на низата лежат на правата $y=3x-2$, па заклучуваме дека низата од Пример 3 е дефинирана со

$$a(i)=3i-2,\ i=1,2,3,\dots \qquad (1)$$

До зависноста (1) на членот на низата од редниот број, може да дојдеме и на следниот начин. Набљудувајќи ги членовите на низата согледуваме дека секој член го содржи бројот 3 онолку пати колку што изнесува неговиот реден број намален за 1, и вредноста на членот е за 1 поголема од тој број. Значи, $a(i)=(i-1)\cdot 3+1=3i-2$, $i=1,2,3,\dots$, односно дојдовме до истата зависност (1).

1.4. НИЗИ ОД БРОЕВИ СО „ДВОЈНО“ ПРАВИЛО

Во Пример 3, до линеарната зависност дојдовме со помош на предвидувања направени врз основа на членовите на низата запишани во табела и врската меѓу соседните членови. Линеарната зависност може да биде и посложена, не лесно воочлива, но сепак би можела да се предвиди со слични техники.

Пример 4. Да ја разгледаме следната низа броеви

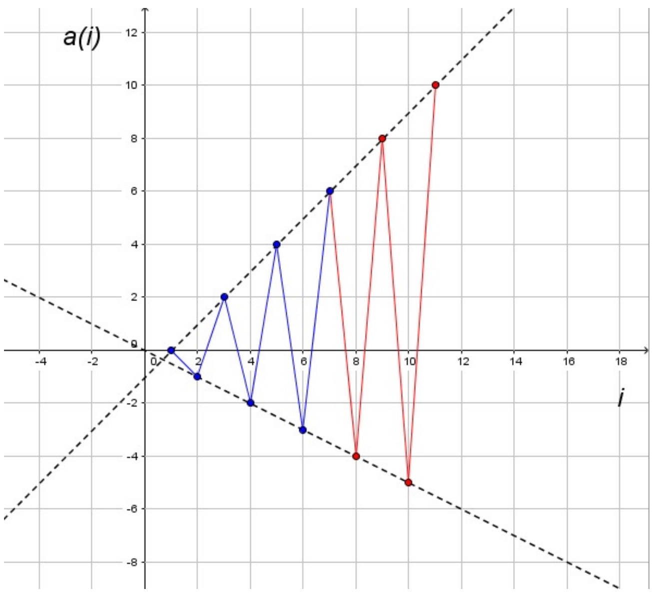
0, -1, 2, -2, 4, -3, 6, …

и да се обидеме да го откриеме правилото на низата, за да ја продолжиме за најмалку три члена.

Доколку започнеме со запишување на членовите на низата во табела, како онаа за претходниот Пример 3, веднаш ќе наидеме на потешкотии, имено правилото нема да биде толку очигледно. Затоа, ќе пристапиме кон графичко претставување на низата за да може да наслутиме одредено предвидување (Слика 5). Графичкиот приказ на низата може да ни помогне да направиме предвидување дека членовите на низата кои се наоѓаат на непарните места, тоа се $a(1)=0, a(3)=2, a(5)=4, a(7)=6$, следат линеарна зависност, но истото важи и за членовите на низата кои се наоѓаат на парните места, односно $a(2)=-1, a(4)=-2, a(6)=-3$. Правите кои ги опишуваат овие две линеарни зависности се $y=x-1$ и $y=-x/2$ за членовите на непарните, односно на парните места. Значи, низта од Пример 4 е дефинирана со

$$a(i)=\begin{cases} i-1, & \text{ако } i \text{ е непарен} \\ -i/2, & \text{ако } i \text{ е парен} \end{cases}, \qquad i=1,2,3,\ldots \quad (2)$$

Па, според ова правило, и според графичкиот приказ на низата, следните три нејзини члена се -4, 8 и -5 (Слика 5).



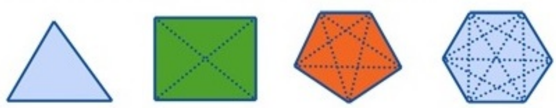
Слика 5. Графички приказ на низата со „двојно правило" од Пример 4.

Но, доколку и без графичкиот приказ наслутиме дека низата од Пример 4 се состои од две поднизи кои следат поедноставни правила отколку дадената низа, може да пристапиме кон анализа на тие поднизи поодделно. За секоја од двете поднизи (едната составена од членовита на непарните места, а другата од членовите на парните места) пополнуваме табела како онаа за низта од Пример 3, и ги пресметуваме разликите на соседните членови, па од нивната непроменливост ја предвидуваме линеарната зависност и ги одредуваме следните членови во низата.

1.5. НИЗИ ОД БРОЕВИ (КВАДРАТНА ЗАВИСНОСТ)

Принципот на предвидување со користење на табела во која се запишуваат членовите на низата и се согледуваат врските меѓу соседните членови, како што направивме во претходниот Пример 3, во општ случај може да се искористи за истражување на полиномна зависност на членот од неговиот реден број. Потврда за овој начин на размислување наоѓаме во првата Њутнова интерполациона формула со конечни разлики. Ние тука ќе се задржиме на квадратната зависност, при што покрај разликите меѓу соседните членови на низата (разлики од прв ред), ќе ги пресметуваме и разликите меѓу соседните разлики од прв ред (разлики од втор ред).

Пример 5. Ако е познато дека триаголникот нема дијагонали, четириаголникот има две, петаголникот има пет, а шестаголникот има девет (Слика 6), колку дијагонали има седумаголникот?



Слика 6. Многуаголници и нивните дијагонали.

Прво пристапуваме кон формирање на низата броеви за која треба да предвидиме како да ја продолжиме. Одговорите на следните прашања ќе ги наведат учениците да состават низа броеви од дадената текстуална задача и да ја истражат низата: Како изгледа низата чии членови се вкупниот број на дијагонали во дадените многуаголници? Како изгледа соодветната низа од бројот на страни на многуаголниците? За колку се зголемува вкупниот број на дијагонали, секој пат кога бројот на страни се зголемува за 1? Која е зависноста меѓу нараснувањата на вкупниот број на дијагонали и бројот на страни?

По дискусијата, учениците треба да согледаат дека задачата се сведува на наоѓање на петтиот член од низата 0, 2, 5, 9, ..., при што „редниот број“ на првиот член од оваа низа не е 1 туку 3, бидејќи првиот многуаголник е триаголник. За дадената низа, ја пополнуваме Табела 4 со бројот на страни n, соодветниот број на дјагонали $a(n)$, нараснувањата на вкупниот број на дијагонали, односно разликите од прв ред $b(n) := a(n+1) - a(n)$ и разликите од втор ред $b(n+1) - b(n)$.

број на страни n	број на дијагонали $a(n)$	разлики од прв ред $b(n) := a(n+1) - a(n)$	разлики од втор ред $b(n+1) - b(n)$
3	0	2	1
4	2	3	1
5	5	4	**1**
6	9	**5**	
7	**14**		

Табела 4. Истражување на низата составена од вкупниот број дијагонали во многуаголниците од Пример 5.

Од Табела 4, согледуваме дека двете конечни разлики од втор ред се еднакви на 1, па предвидуваме дека и третата конечна разлика од втор ред е исто така еднаква на 1, од каде следи дека четвртата конечна разлика од прв ред е за 1 поголема од 4, односно е 5, и конечно, предвидувањето за петиот член на низата е дека е за 5 поголем од 9, односно дека седумаголникот има 9 + 5 = 14 дијагонали.

Воочувањето на квадратната зависност на членовите на низата од нивниот реден број, се постигнува со изведување на рекурзивни релации на вкупниот бројот на дијагонали во еден многуаголник. Па, за вкупниот број на дијагонали во еден n-аголник ($n \geq 3$) се добива дека е, [4]

$$a(n) = \frac{n(n-3)}{2}, \; n = 3, 4, \ldots \qquad (3)$$

2. ВЕРОЈАТНОСНИ СТРАТЕГИИ ЗА ПРЕДВИДУВАЊА

Претходно изложените стратегии за предвидувања се основаат на претпоставката дека зависноста на следниот член во низата од редниот број на членот или зависноста на изгледот на следната фигура во шаблонот од редниот број на фигурата е детерминистичка, па следствено таа зависност може функционално да биде опишана ([4]). Но, што се случува доколку вметнеме случајност, неодреденост во формирањето на шаблоните и низите од броеви? Што ако следниот член во низата зависи од исходот од фрлањето на една коцка или од случајниот избор на карта од еден шпил карти? Во тој случај потребни ни се веројатносни стратегии за предвидувања.

Предвидувањата, во веројатносна смисла, најчесто се последната етапа од статистичката обработка на податоци. Без можеби да сте биле свесни за тоа, и вие самите веќе сте користеле предвидувања како резултат на обработка на податоци. Кога се подготвувате да излезете од дома и погледнувате низ прозорецот и при тоа гледате темни облаци пропратени со ветер, предвидувате дека ќе заврне, па затоа земате чадор со себе. Ова предвидување сте го направиле врз основа на собраните податоци за времето и временските услови кои се наоѓаат во вашата меморија ([5]). Ваквите предвидувања, направени како резултат на обработка на претходно собрани податоци, ќе ги наречеме *веројатносни предвидувања*.

Постојат многу математички активности со кои може да се вежбаат веројатносните предвидувања. Овие активности, на децата им наликуваат многу повеќе на игра, отколку „класичните“ математички задачи, па затоа со задоволство ќе ги прифатат и ќе учествуваат во нивната реализација. Но, важно е да напоменеме дека кај овој вид на активности важна улога игра начинот на нивно реализирање, целата постапка до првичното предвидување, како и проверката на предвидувањето, се до математичкото оправдување на предвидувањето ([5]). Активности за вежбање на веројатностните предвидувања има на страниците во [7]–[9].

Во продолжение ви предлагаме две такви активности/игри, едната од нив е со коцки, а другата е со карти. При играње на играта со коцки, може да се послужите и со некој он-лајн симулатор на фрлање на коцки, на пример со [10]. Тежината на игрите е одредена од изборот на понудените опции и бројноста на реализирани етапи од играта. За пониските одделенија препорачливо е да се играат со целото одделение и бројот на реализирани етапи од играта да е помал (доволно е да се стигне до предвидувањето врз основа на собраните податоци), додека со повисоките одделенија може да се играат во групи или во парови и да се поминат сите етапи.

2.2. ИГРА СО КОЦКИ

Во игрите кои се играат со две коцки најчесто се собираат броевите паднати на двете коцки, и потоа фигурата со која се игра се придвижува за онолку места колку што изнесува збирот на броевите на коцките. Предвидувањето на паднатиот збир на двете коцки, претставува голем предизвик за секој играч, и како што ќе видиме, многу се разликува од предвидувањето на исходот при фрлање на една коцка, каде секој број на точки има подеднакви шанси да се падне. За да се обидеме да предвидиме кој збир има најмали, а кој збир има најголеми шанси да се падне, потребно е најнапред да собереме податоци од одреден број на фрлања на коцките. Предлагаме оваа активност да започне со собирање на податоци од 20 фрлања на две коцки ([5], [8]).

Во предложената активност со две коцки може да се вметнат елементи на игра (во етапите на собирање на податоци и проверка на предвидувањето) следејќи ги следните правила:

- Секој ученик на почетокот на играта има 0 поени.
- Секој ученик на свој лист го запишува пресметаниот збир на паднатите коцки.
- Секој нареден збир ученикот го собира со веќе собраните збирови кои ги запушал на својот лист.
- Доколку се падне збир 7, учениците кои се уште играат ги губат сите собрани поени и продолжуваат да играат со збир 0.
- Пред секое фрлање на коцките, секој ученик има право да се откаже од играта со оставање на пенкалото. Ученикот кој се откажал од играта, понатаму не добива поени, но ги задржува веќе собраните поени.
- Победник во играта е ученикот со намногу собрани поени.

Понатаму ќе согледаме зошто токму збирот 7 е избран за збир при кој ученикот кој се нема откажано од играта, би ги изгубил сите собрани поени. Етапите на играта се следните:

а) Собирање на податоците. Ако играта се игра со целото одделение, учениците еден по еден ги фрлаат коцките и го пресметуваат збирот, а еден ученик или наставникот во табела нацртана на таблата ги запишува цртичките (види Табела 6). Ако играта се игра во групи, учениците од групата еден по еден ги фрлаат коцките, го пресметуваат збирот и запишуваат цртичка во заедничката табела. Ако играта се игра по парови, најнапред едниот ученик 10 пати ги фрла коцките, додека другиот ги запишува цртичките во заедничката табела, а потоа си ги сменуваат улогите.

вредност на збирот	честота на појавување на збирот (цртички)	вкупно
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Табела 6. Табела за запишување на цртичките по секое фрлање на двете коцки и пресметување на збирот на паднатите точки.

б) Обработка на собраните податоци. По пополнување на табелата со цртички (Табела 6), треба да се пресмета вкупниот број на цртички во секој ред и тој број да се запише во колоната „вкупно". Може да се побара од учениците да изработат и столбест дијаграм во кој ќе бидат прикажани честотите на појавување на секој збир.

в) Предвидување врз основа на собраните податоци. Дали и како врз основа на собраните податоци и пресметаните честоти на појавување на секој збир, може да направиме предвидување за тоа кој збир има најмали, а кој збир има најголеми шанси да се падне? Водени од наставникот учениците треба да дојдат до заклучок дека врз основа на податоците собрани од 20-те фрлања на коцките, збирот кој најмал број пати се паднал (збирот кој има најмала честота, т.е. столпчето кое нему му одговара во столбестиот дијаграм е најниско), би бил збирот кој има најмали шанси да се падне, и соодветно збирот со најголема честота, би бил збирот кој има најголеми шанси да се падне. Ова се претпоставките направени врз основа на собраните податоци.

г) Проверка на предвидувањето. Дали направеното предвидување е точно? Како може да провериме? За да го проверат своето предвидување, учениците нека направат уште 10 фрлања на двете коцки, и во нова табела нека ја забележат честотата на појавување на секој збир. Потоа, нека проверат дали збирот кој одговара на најмалата честота во новата табела е истиот збир за кој петходно предвиделе дека има најмали шанси да се падне, исто и дали збирот кој одговара на најголемата честота во новата табела е истиот збир за кој петходно предвиделе дека има најголеми шанси да се падне. Водени од наставникот нека се развие дискусија во врска со направената проверка. Кај некои ученици може да се случи проверката да го потврди предвидувањето (што се уште не значи дека предвидувањето е точно, видете ја следната етапа од играта), но кај некои ученици може проверката да се разликува од предвидувањето (што не значи дека проверката направила корекција во предвидувањето и дека е поточна!).

д) Математички оправдано предвидување (за повисоките одделенија). Како може да направиме математички точно предвидување? Имено, не секогаш ќе бидеме во можност да собереме податоци потребни за да се направи одредено педвидување. Но, затоа секогаш можеме да се потпреме на статистичките начини за заклучување. Прво треба да ги испишеме сите случаи на појавување на одреден збир на двете коцки. При тоа, ќе постои разлика меѓу случаите 2 + 5 и 5 + 2, затоа што првиот собирок ќе означува број на паднати точки на првата коцка, а вториот собирок, број на паднати точки на втората коцка. Така, ја добиваме Табела 7 со сите можни исходи од фрлањето на двете коцки, подредени според збирот на точките на коцките.

Од Табела 7 може да воочиме дека постојат дури 6 различни исходи од фрлањето на двете коцки при кои збирот на паднатите точки е 7, додека постои само по еден исход за да се добие збир 2, односно збир 12. Значи, збирот 7 има најголеми шанси да се падне (при 6 од вкупно 36 исходи, па веројатноста да се падне збирот 7 е

6/36), додека збировите 2 и 12 имаат подеднакво најмали шанси да се паднат (при 1 од вкупно 36 исходи, па веројатноста да се падне збирот 2 е 1/36, исто толку е и веројатноста да се падне збирот 12).

вредност на збирот	исходи од флањето на двете коцки
2	1 + 1
3	1 + 2, 2 + 1
4	1 + 3, 2 + 2, 3 + 1
5	1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1
6	1 + 5, 2 + 4, 3 + 3, 4 + 2, 5 + 1
7	1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 4 + 3, 5 + 2, 6 + 1
8	2 + 6, 3 + 5, 4 + 4, 5 + 3, 6 + 2
9	3 + 6, 4 + 5, 5 + 4, 6 + 3
10	4 + 6, 5 + 5, 6 + 4
11	5 + 6, 6 + 5
12	6 + 6

Табела 7. Табела со сите можни исходи од фрлањето на две коцки подредени според збирот на паднатите точки.

ѓ) „Проверка“ на математичкото предвидување. Дали вашите предвидувања добиени по експериментален пат се совпаднаа со математичките предвидувања? Но, зошто може да се случи да се разликуваат? Имено, доколку сте во можност бесконечно многу пати да ги фрлате двете коцки, тогаш збирот 7 би се појавил во најголемиот број на фрлања на двете коцки, додека збировите 2 и 12 би се појавиле подеднакво најмалку пати (ова тврдење е врз основа на Законот на големите броеви од Теоријата на веројатност). Секако, оваа проверка не може да ја направите. Но, може да се обидете веќе собраните податоци од првата серија од 20 фрлања и втората серија од 10 фрлања да ги вметнете во една табела, која ќе ги претставува податоците собрани од 30-те фрлања. Тогаш, би требало предвидувањето врз основа на ново направената табела да е поблиску до математичкото предвидување.

2.2. ИГРА СО КАРТИ

Како што исходот од фрлањето на коцките претставува случаен настан, така и случајниот избор на карта од шпил карти е случаен настан, па веројатносните стратегии за предвидувања може да се вежбаат и со помош на карти.

Играта со карти која тука ќе ја опишеме може да се игра со целото одделение, во групи или во парови. Потребни се 10 карти со вредности од 1 до 10. На почетокот наставникот или еден од учениците ги разместува картите во еден ред по случаен редослед со лицата надолу. Наставникот или ученикот кој ги разместил картите отвара една по една карта, а учениците одговараат на прашањата, при што одговорите ги дискутираат ([9]).

И тука, за да вметнеме елементи на игра, ги предлагаме следните правила:

- Секој ученик на почетокот на играта има 0 поени.
- Секој ученик пред да се отвори следната карта и пред наставниот да ги постави прашањата, го запишува на свој лист своето предвидување за следната карта, имено се обидува да предвиди дали таа има поголема или помала вредност од последно отворената карта. Пред отварањето на првата карта, учениците предвидуваат дали првата карта има вредност помала или еднаква на 5 или има вредност поголема од 5.
- По отварањето на картата, оној ученик чие предвидување се реализирало, добива 2 поена, а оној ученик чие предвидување не се реализирало губи 1 поен.
- Секој ученик пред отварањето на следната карта има право да се откаже од играта, при што си ги задржува веќе освоените поени, и понатаму ниту добива, ниту губи поени.
- Играта се игра се додека има играчи кои не се откажале или се додека не се отворат сите карти.
- Победник е ученикот со најмногу освоени поени.

За разлика од претходната игра со коцки, овде етапите на собирање податоци, обработка на собраните податоци и предвидување врз основа на собраните податоци се реализираат во текот на целата игра. Пред секое отварање на следната карта, учениците треба да предвидат каква ќе биде следната карта, поголема или помала. Податоците кои треба да ги користат се: колку карти со поголема вредност од последната се веќе отворени, колку карти со помала вредност од последната се веќе отворени, колку вкупно карти се до тогаш отворени и слично. На Слика 7 е даден приказ на еден тек на оваа игра заклучно со отварањето на петтата карта и заедно со прашањата кои може да им се постават на учениците по отварањето на секоја карта.

Слика 7. Приказ на еден тек на играта со карти заклучно со отварањето на петтата карта.

Како што може да се согледа од Слика 7, прашањата наставникот ги прилагодува во однос на веќе отворените и последно отворената карата. Така, петтата отворена карта е 1, што значи дека со сигурност следната карта ќе има поголема вредност од 1, па затоа тој го поставува прашањето „Каква мора да биде следната карта?“ Исто така, бара од учениците да проценат каков би бил исходот после две отварања на картите, доколку се реализира одреден исход при следното отварање на карта.

Да забележиме дека прашањата се формулирани со помош на терминот веројатност. Доколку оваа игра ја играат ученици од пониските одделенија, овие прашања може да се заменат со прашања од типот „Колку од преостанатите неотворени кари имаат помала/поголема вредност од последната карта?“ Па потоа, врз основа на тој одговор учениците да насетат кое предвидување би имало поголеми шанси да се реализира. Така, на овој начин и без да бидат запознаени со терминот веројатност, тие ќе може да го насетат, но и да го користат при правење на своите предвидувања.

3. ЗАКЛУЧОК

Истражувањата на шаблоните и низите броеви, како и игрите со коцки и карти, може многу да придонесат во вежбањето на предвидувачките способности. Меѓутоа, самото предвидување (обликот на следната фигура во шаблонот, односно вредноста на следниот член во низата, или исходот од следното фрлање на коцките, односно следното влечење на карта) не би требало да е единствената цел на овој тип на задачи. Потребно е правилно следење на етапите на решавање на овој тип задачи, за да се добие што пооправдано предвидување, а не само погодување.

Од друга страна, вежбањето на предвидувачките способности придонесува за поврзување на веќе стекнатите знаења и стекнување на нови знаења, учениците имаат чувство дека дошле самите до новите сознанија, со што се зголемува мотивацијата и интересот за предметот. Исто така, истражувањата на шаблоните, низите броеви, игрите со коцки и карти, нудат можности за развивање на математичка дискусија меѓу наставникот и учениците, но и меѓу самите ученици. Затоа, овој тип на задачи, шаблоните и низите броеви, се погодни за почетниот дел на часот по математика, кога треба да се реализира некоја активност за активирање на математичкото мислење, „за загревање“. А игрите со коцки и карти, доколку се целосно реализирани, вклучувајќи ги и дискусиите за оправданост на предвидувањата, се секогаш добредојдени, како средство за зголемување на интересот за предметот математика.

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Beatty, *Exploring the Power of Growing Patterns*, What Works?: Research into Practice, Manuscript #55, Student Achievement Division and Ontario Association of Deans of Education, August 2014.

[2] G. Buendía, F. Cordero, *Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework*, Educational Studies in Mathematics, 58 (2005), 299–333.

[3] L. A. Kasmer, O. K. Kim, *The nature of student predictions and learning opportunities in middle school algebra*, Educational Studies in Mathematics 79(2) (2012), 175–191.

[4] G. Nikolovska, I. Stojkovska, *Algebraic strategies for predictions in elementary mathematics education*, Mat. Bilten, 40 (LXVI), 2 (2016), 125–137.

[5] И. Стојковска, *Април 2016 - Месец на иднината на предвидувањето (Игра на предвидување со коцки)*, Математика +, 12 април 2016, http://matematika-plus.weebly.com/igra-na-predviduvanje-so-kocki.html

[6] E. Warren, T. Cooper, *Using repeating patterns to explore functional thinking*, APMC 11(1) (2006), 9–14.

[7] MATHWIRE.COM - Release the Prisoners Game, http://mathwire.com/games/releaseprisonersgame.pdf

[8] NEA - Math Awareness Month, http://www.nea.org/tools/lessons/math-awareness-month.html

[9] NOYCEFDN.ORG - Card Game, http://www.noycefdn.org/documents/math/MARS/MARS2007/tft2007gr6-part2.pdf

[10] RANDOM.ORG - Dice Roller, https://www.random.org/dice/

[1,2,3] Универзитет „Св. Кирил и Методиј", Скопје
Природно-математички факултет,
Институт за математика
ул. Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: marija_ilievska94@hotmail.com
e-mail: gordana.nikolovska.93@gmail.com
e-mail: irenatra@pmf.ukim.mk

Примен: 10.04.2017
Поправен: 13.05.2017
Одобрен: 15.05.2017