Математички Билтен
16 XLII)
1992 (85-89)
Скопје, Македонија

ЗА РЕШАВАЊЕТО НА ЕДНА КЛАСА ЛИНЕАРНИ ИНТЕГРАЛНИ РАВЕНКИ НА ВОЛТЕРРА ОД ВТОР ВИД

Лазо А. Димов

Апстракт. Во оваа работа е докажано дека решението на линеарната интегрална равенка (6) е од облик (11).

Потоа е докажано дека решавањето на линеарната интегрална равенка (13) се сведува на решавање на нормалниот систем диференцијални равенки (17) со почетни услови (15).

1. Да ја посматраме линеарната интегрална равенка на Волтерра од втор вид:

$$\phi(x) + \int_0^x K(x,y)\phi(y)dy = f(x), \text{ каде што } 0 \le x \le h, \tag{1}$$

ако јадрото $K(x,y)$ е аналитичка функција од x и y на квадратот $0 \le x \le h$, $0 \le y \le h$, а $f(x)$ е определена на $[0,h]$. Од аналитичноста на јадрото $K(x,y)$ имаме:

$$\phi(x) - \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n\Big)\phi(y)dy = f(x), \tag{2}$$

каде што двојниот ред конвергира рамномерно што значи дека тој може да се интегрира член по член па тогаш е од првенствена важност линеарната интегрална равенка на Волтерра со полиномно јадро:

$$\phi(x) - \int_0^x \Big(\sum_{n,m=0}^{N,M} a_{mn}x^m y^n\Big)\phi(y)dy = f(x), \tag{3}$$

чиј еден специјален случај би бил коефициентот:

$$a_{mn} = a(m)b(n). \tag{4}$$

Во тој случај би ја имале факторизацијата:

$$K(x,y) = \Big(\sum_{m=0}^{M} a(m)x^m\Big)\Big(\sum_{n=0}^{N} b(n)y^n\Big) = A(x)B(y). \tag{5}$$

Затоа од посебен интерес би била линеарната интегрална равенка на Волтерра од втор вид:

$$\phi(x) - \int_0^x A(x)B(y)\phi(y)dy = f(x), \quad 0 \le x \le h. \tag{6}$$

2. Овде заправо ќе ја разгледаме равенката (6) како линеарна интегрална равенка на Волтерра од втор вид со специјално јадро

$$K(x,y) = A(x)B(y),$$

при што ќе претпоставиме дека за секој x од сегментот $[0,h]$, $A(x) \neq 0$. Ако во равенката (6) ја воведеме смената:

$$t(x) = \int_0^x B(y)\phi(y)dy + \frac{f(x)}{A(x)}, \tag{7}$$

при што $t(0) = \frac{f(0)}{A(0)}$, тогаш за $\phi(x)$ добиваме

$$\phi(x) = A(x)t(x). \tag{8}$$

Сега со диференцирање на (7) ќе добиеме:

$$\frac{dt}{dx} = A(x)B(x)t(x) + \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{A(x)}\right]. \tag{9}$$

Решението на (9) што го задоволува погоре зададениот услов е дадено со:

$$t(x) = \frac{f(x)}{A(x)} + e^{\int_0^x A(u)B(u)du} \int_0^x f(u)B(u)e^{-\int_0^u A(z)B(z)dz} du. \tag{10}$$

Со заменување на (10) во (8) се добива решението на интегралната равенка (6) со следнава формула:

$$\phi(x) = f(x)+A(x)e^{\int_0^x A(u)B(u)du} \int_0^x f(u)B(u)e^{-\int_0^u A(z)B(z)dz} du. \tag{11}$$

Да забележиме дека интегралната равенка:

$$\phi(x) + \int_0^x \frac{A(x)}{A(y)}\phi(y)dy = f(x),$$

разгледана во [1] е специјален случај од равенката (6) и се добива за $B(x) = \frac{1}{A(x)}$.

Понатаму сметаме дека од интерес би биле и следните случаи за упростување на формулата (11):

а) Ако меѓу функциите $A(x)$ и $B(x)$ е задоволена релацијата $A(x) = \frac{B'(x)}{B^2(x)}$, тогаш формулата (11) за решението на равенката (6) го има следниот облик:

$$\phi(x) = f(x) + \frac{B'(x)}{B(x)} \int_0^x f(u)du. \tag{11a}$$

б) Ако, пак, меѓу функциите $A(x)$ и $B(x)$ е задоволена релацијата

$$A(x) = \frac{aB'(x)}{B(x)}, \quad a=\mathrm{const},$$

тогаш формулата (11) го добива следниот облик:

$$\phi(x) = f(x) + \frac{aB'(x)}{B(x)} e^{aB(x)} \int_0^x f(u)B(u)e^{-aB(u)}du. \tag{11б}$$

3. Овде ќе разгледаме линеарна интегрална равенка на Волтерра од втор вид со јадро:

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(y), \tag{12}$$

односно равенката:

$$\phi(x) = \int_0^x \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(y)\phi(y)dy + f(x). \tag{13}$$

Прво да ја напишеме во следниот облик:

$$\phi(x) = a_1(x) \int_0^x b_1(y)\phi(y)dy + a_2(x) \int_0^x b_2(y)\phi(y)dy + \ldots + a_n(x) \times \left[\int_0^x b_n(y)\phi(y)dy + \frac{f(x)}{a_n(x)}\right]$$

и да ставиме

$$\begin{aligned} t_1(x) &= \int_0^x b_1(y)\phi(y)dy, \\ t_2(x) &= \int_0^x b_2(y)\phi(y)dy, \\ &\vdots \\ t_{n-1}(x) &= \int_0^x b_{n-1}(y)\phi(y)dy, \\ t_n(x) &= \int_0^x b_n(y)\phi(y)dy + \frac{f(x)}{a_n(x)}, \end{aligned} \tag{14}$$

Забележуваме дека

$$t_1(0)=0, t_2(0)=0, \ldots, t_{n-1}(0)=0,\ t_n(0) = \frac{f(0)}{a_n(0)} \tag{15}$$

и притоа важи релацијата:

$$\phi(x) = a_1(x)t_1(x)+a_2(x)t_2(x)+\ldots+a_n(x)t_n(x). \tag{16}$$

Со диференцирање на равенките (14), а воедно заменувајќи $\phi(x)$ од (16) се добива следниот нормален систем диференцијални равенки:

$$\begin{aligned}
t_1' &= a_1(x)b_1(x)t_1(x)+a_2(x)b_1(x)t_2(x)+\ldots+a_n(x)b_1(x)t_n(x)\\
t_2' &= a_1(x)b_2(x)t_1(x)+a_2(x)b_2(x)t_2(x)+\ldots+a_n(x)b_2(x)t_n(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t_{n-1}' &= a_1(x)b_{n-1}(x)t_1(x)+a_2(x)b_{n-1}(x)t_2(x)+\ldots+a_n(x)b_{n-1}(x)t_n(x)\\
t_n' &= a_1(x)b_n(x)t_1(x)+a_2(x)b_n(x)t_2(x)+\ldots+a_n(x)b_n(x)t_n(x)+\left[\frac{f(x)}{a_n(x)}\right]
\end{aligned} \tag{17}$$

Значи линеарната интегрална равенка на Волтерра од втор вид (13), ја сведовме на решавање на линеарниот систем диференцијални равенки (17) со почетни услови (15).

Пример. Интегралната равенка:

$$\phi(x) = \int_0^x [-(2+3x)+3y]\phi(y)dy + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3,$$

се трансформира во следниот систем диференцијални равенки:

$$\begin{aligned}
t_1'(x) &= -(2+3x)t_1 + 3t_2,\\
t_2'(x) &= -(2+3x)xt_1 + 3xt_2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2.
\end{aligned}$$

Забелешка: Јадрата на интегралните равенки разгледани во [2], а зададени со формулите:

$$K(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\frac{(x-y)^i}{i!},$$

$$K(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)\frac{(y-x)^i}{i!},$$

се специјални случаи од јадрото што овде го разгледавме а е зададено со формулата (12).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Трикоми, Ф.: Интегральные уравнения, Издательство иностранной литературы, Москва, 1960

[2] Goursat, E.: Cours d'analise matematique, tom III, Paris, 1942

RÉSOLUTION D'UNE CLASSE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES INTÉGRALES DE VOLTERRA DE SECONDE ESPECE

Dimov A. Lazo

Résumé

Dans cet article on demontre que la solution de l'équation linéaire intégrale (6) est du type (11).

Ensuite, on demontre que la résolutions de l'équations linéaire intégrale (13) ramène á la résolutions d'un système normal des équations differéntielles linéaires (17), avec des conditions initiales (15).