

## КАКВЕ НУМЕРИЧКЕ ТАБЛИЦЕ ТРЕБА УПОТРЕБЉАВАТИ У ВЕЗИ СА НАСТАВОМ МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊИМ ШКОЛАМА

Платон Димић

Још на I конгресу математичара и физичара Југославије, одржаном 1949 године на Бледу, било је у току дискусије речи о нумеричком рачунању и употреби нумеричких таблица у средњим школама<sup>1)</sup>. Затим, у току наредних пет година, ово је питање у круговима наших математичара било више пута третирано, тако да је став наставника математике у овом погледу дошао до израза и у резолуцији II конгреса математичара и физичара, одржаном 1954 године у Загребу, у следећем:

„Конгрес константира — каже се у II ставу тачке 10 другог одељка конгресне резолуције — да се врло мала пажња поклања нумеричком и графичком рачуну и употреби нумеричких таблица у настави математике у средњим школама и на факултетима. Зато сматра да томе треба посветити много више пажње с обзиром на велики значај нумеричког рачуна, статистике и нумеричких таблица у разним применама математике.“<sup>2)</sup>

Сем тога се и у реферату о настави математике у средњим школама, прочитаном на овом конгресу, на једном месту каже да би у овим школама требало:

„Поједноставити и усавршити нумеричко рачунање увођењем скраћених поступака и, нарочито, што већег броја таблица.“<sup>3)</sup>

Међутим, колико ми је познато, све до сад нигде у нашој педагошкој и стручној штампи није изашао ни један чланак у коме би се узело у разматрање било опште питање нумеричког рачунања у нашим средњим школама, било

1) Видети књигу „Први конгрес математичара и физичара ФНРЈ, I (Београд, 1950), стр. 61, 68, 76, и 136.

2) Видети часопис „Настава математике и физике“, III, бр. 3—4 (Београд, 1955), стр. 118.

3) Видети часопис „Настава математике и физике“, III, бр. 3—4 (Београд, 1955), стр. 137.

само питање употребе нумеричких таблица. Стога сматрам да може бити од користи ако на овом месту изложим своје мишљење бар по овом другом питању, трудећи се да се држим само оног најбитнијег, с тим што ћу то касније евентуално допунити, ако овај чланак буде довео можда до какве дискусије.

**А) Употреба нумеричких таблица у нижим разредима гимназија и вишим разредима осмогодишњих школа**

Под нумеричким таблицама ми ћемо овде подразумевати све оне таблице, које дају вредности неке функције од једне или две независно променљиве за поједине вредности тих променљивих.

Прве такве таблице, на које се природно наилази у настави математике, јесу таблица збирова (в. т. 1) и таблица производа (в. т. 2) целих бројева. Међутим, на првој од ових ми се нећемо задржавати, јер она ни у настави математике, ни у практичној употреби није ни од каквог значаја. Таблица збирова, уколико су у питању два једноцифрена броја, учи се напамет; а није тешко увидети колико би велика требало да буде та таблица и како би се мало уштедело у напору и времену, ако би помоћу ње требало сабрати, на

$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Т. 1

пример, 12836, 186 и 3675. Међутим, што се тиче таблице производа, ту ствар стоји друкчије. Таблица производа, који се добивају множењем свих једно, дво и троцифрених целих бројева свим једноцифреним целим бројевима, или који се добијају множењем свих једно, дво и троцифрених целих бројева свим једноцифреним и двоцифреним целим бројевима, и друге сличне таблице, одређене за практичну употребу, објављивале су се, до уласка у употребу савремених машина за рачунање, знатно чешће него што се сад објављују, али се оне објављују и данас и могу да послуже врло корисно кад треба да се изврше не само велика множења, него и велика

дељења.<sup>4)</sup> Стога се може поставити питање: да ли је корисно уводити у школску употребу овакве таблице, када их и у којој форми треба евентуално уводити, у којим разредима треба допустити њихову употребу, и слично.

$\begin{array}{c} n \\ m \end{array}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	...
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	...
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Т. 2

Мени је познато да су многи наставници велики противници употребе оваквих таблица. Њихови главни разлози су следећи: наши ученици, чак и у вишим разредима гимназије, и овако често греше у елементарним рачунским радњама, а када би им се допустило да се служе оваквим таблицама, онда би неки од њих заборавили чак и како се множи; у средњој школи учи се само оно што је битно у математици, а механичко примењивање овог или оног техничког средства не спада у њен домен наставе; у средњој школи, или бар у њеним нижим разредима, треба избегавати задатке у којима се јављају дуга множења или дељења, док се у вишим разредима могу користити логоритми. Међутим, мени се чини да употребу оваквих таблица треба допустити већ и ученицима двају највиших разреда осмогодишње школе, па бих то схватање хтео и да образложим.

Са употребом таблица је, наиме, као и са употребом многих других ствари: ученик треба да свикне, и то на време да свикне на ту употребу, па да се стварно касније умења користити. Ми данас видимо, на пример, често следеће: да наш студент, кад му затреба приближна вредност са 4 децимала броја  $\sqrt{5}$ , често радије врши у својој свесци извлачење другог корена, иако при том треба неколико пута

<sup>4)</sup> Код нас су последњи пут биле издате овакве таблице у издању Министарства жељезнице 1949 год., под насловом „Rechnische tablice“ од Dr. Ing. H. Zimmermann-a и оне дају производе, који се добивају множењем свих 1, 2 и 3-цифрених целих бројева свим 1 и 2-цифреним целим бројевима. Иначе, највеће од оваквих таблица су „Rechentafeln“ од L. Crelle-a (које дају производе, што се добивају множењем свих 1, 2 и 3-цифрених бројева свим 1, 2 и 3-цифреним бројевима) и „Neue Rechentafeln“ од J. Peters-a (које дају производе, што се добивају множењем свих 1, 2, 3 и 4-цифрених бројева свим 1 и 2-цифреним бројевима). Обе се још увек повремено прештампавају.

да множи, одузима итд., него што би отворио таблице и видео из њих колико износи та тражена вредност, само зато што на то у гимназији није навикао. Стога, ако се хоће уопште да се ученици навикну на употребу таблице производа, њих треба на њу упућивати већ у седмом и осмом разреду осмогодишње школе, кад четири основне рачунске радње престају да бивају саме себи циљ, док решавање многих задатака, особито ако се хоће да они буду узети из реалног живота, са подацима који одговарају стварности, тражи доста гломазна израчунавања. Са друге стране пак, не видим зашто ученике не бисмо упутили на ову таблицу, кад од ње могу — бар док не постигнемо то да свака школа има изврстан број машина за рачунање — имати практичне користи: ми не можемо вечито остати на том да и у вишим разредима гимназије учимо ученике оном (у овом случају множењу и дељењу) што је требало да науче већ у основној школи; употреба ове таблице је сасвим једноставна; најзад, множење и дељење вишецифрених бројева не обавља се увек брже помоћу логаритамских таблица, него помоћу таблице производа, а да притом и не говоримо о ограниченом броју тачно нађених цифара у резултату, на који смо у случају употребе логаритамских таблица упућени. Притом, то још не значи да би ученику и за најкраће множење или делење требало дозволити да и на часу отвара ову таблицу. Али бих му већ дозволио да је отвори, ако би требало да реши, на пример, овај задатак: „Наћи запремину купе, ако је полупречник њене основе  $r = 6,8$  см, а висина купе  $h = 14,8$  см“.

Што се пак тиче састава саме таблице производа, коју би у школи требало употребљавати, сматрам да би за школу могла доћи у обзир само таблица која даје све производе, добијене путем множења свих једноцифрених, двоцифрених и троцифрених целих бројева свима једноцифреним целим бројевима. Та се таблица може распоредити на свега 20 страница нормалног формата (док је за прву већу таблицу ове врсте потребно 200 стртница), а може нарочито корисно да послужи при свима множењима и дељењима у којима један од чинилаца, односно делитељ, немају више од три важеће цифре.<sup>5)</sup>

Затим, друге две таблице, на које се спонтано наилази већ у првом разреду гимназије, односно у петом разреду осмогодишње школе, јесу таблица квадрата, односно таблица кубова целих бројева, па ако би у погледу употребе таблица производа и могло бити спора, у погледу употребе ових двеју таблица мислим да га не може бити. Наиме, већ

<sup>5)</sup> Такве су, на пример, таблице „Tables numériques usuelles“ од L. Zoretti-a, Paris.

при израчунавању површине квадрата ученик спонтано наилази на појам квадрата неког броја, а при израчунавању запремине коцке он наилази на појам трећег степена неког броја, и долази до сазнања да му таблица квадрата, односно таблица кубова целих бројева може бити корисна. Сем тога, он на основу те две таблице одмах може, и без ичијег објашњења, да решава у извесној мери и обратне задатке, тј. да одређује приближно вредности ивице квадрата, односно ивице коцке, ако познаје њихову површину, односно запремину, а то ће рећи да врши на неки начин вађење другог, односно трећег корена и пре него што чује за појам кореновања. Стави ли се, наиме, таблица квадрата целих бројева макар и пред ког било, просечног ученика петог разреда осмогодишње школе, који је навикао да помоћу ње брзо израчунава величину површине квадрата, и постави ли му се питање: „Колико износи величина ивице оног квадрата, чија је површина  $30 \text{ cm}^2$ ?“, сваки ће од њих, после извесног размишљања, одговорити да је та ивица дужа од 5 см, а краћа од 6 см. Па онда, и када се касније пређе на појам кореновања, најподесније је ако се пође од ових таблица, као већ познатих ученицима. Стога је природно да се већ ученици V и VI разреда осмогодишње школе упуте на таблицу квадрата и таблицу кубова целих бројева, и то — с обзиром на њихове потребе — бројева од 1 до 100, с тим да те таблице буду уређене у виду таблица са по једним улазом, евентуално спојене у једну таблицу, са заједничком уводном колоном. А када ученици стигну у VII и VIII разред осмогодишње школе, онда је најбоље да се служе таблицама у којима су упоредо дати квадрати, кубови, квадратни и кубни корени (заокругљени на 4 децимала) свих целих бројева 1 до 1000 (в. т. 3).

Међутим, сматрам да за ученике нижих разреда средње школе ни у ком случају не треба давати таблице које се примењују уз помоћ интерполације, па макар како да се путем њих штеди у простору, пошто они састав тих таблица не могу да разумеју. Лако је увидети, наиме, да таблице у овом случају треба да буду средство које ученике ослобађа од многих мучних израчунавања, али чији састав они потпуно разумеју, тако да се њима свесно служе. Стога, уколико је у питање кореновање бројева који имају више од три важеће цифре, њих треба упућивати пре на коришћење таблицама квадрата односно кубова у обратном смислу, него на интерполацију. Сем тога сматрам да у свим оваквим таблицама треба да се јављају само целе вредности аргумената, а ученици треба да науче како се њима могу користити и када су дати бројеви децимални.

Најзад, да се зауставимо још на извесним таблицама, које се могу користити већ у вишим разредима осмогодишње

школе. То су, пре свега, таблице које дају величину обима (или полуобима) и величину површине круга, односно величину запремине (или, обично, осмине запремине) лопте, чији се полупречник зна, као и таблице реципрочних вредности целих бројева (в. т. 4). Све ове таблице могу бити ограничене из техничких разлога за школску употребу на аргументе од 0 до 100, ма да се у пракси од њих има највише користи баш у случајевима кад су аргументи вишецифрени бројеви. Специјално пак, што се тиче таблице реципрочних вредности, она може бити и изостављена: те вредности се, наиме, сразмерно ретко траже, а ако се ова таблица искоришћује и за дељење, онда резултати, добијени после њене употребе, носе у себи грешку, чију величину ученик нижих чазреда није у стању да процени.

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1,0000	1,0000
2	4	8	1,4142	1,2599
3	9	27	1,7321	1,4422
—	—	—	—	—

Т. 3

$n$	$2\pi n$	$\pi n^2$	$\frac{\pi n^3}{6}$	$\frac{1}{n}$
1	6,2832	3,1416	0,5236	1,000
2	12,566	12,566	4,1888	0,500
3	18,850	28,274	14,139	0,333
—	—	—	—	—

Т. 4

## Б. Употреба нумеричких таблица у вишим разредима гимназије

У вишим разредима гимназије ученици треба да употребљавају све оне таблице, које су већ употребљавали у нижим разредима гимназије, а сем тога још и таблице тригонометријских функција, таблице логаритама природних бројева и тригонометријских функција, као и неке друге, мање значајне таблице, о којима ће бити још речи. Притом пак мислим да је врло добро што се у неким новијим таблицама вредности тригонометријских функција (тз. „природне вредности тригонометријских функција“) дају за свих шест од ових функција и за све вредности аргумента, за које су дати и логаритми тригонометријских функција, и то не само зато да би се њима могли служити већ и ученици V разреда гимназије, него и зато што је крајње непрактично да, на пример, за израчунавање вредности  $x = 2000. \operatorname{tg} 16^\circ 32'$  ученик употребљава логаритме, кад се то израчунавање без употребе логаритама може свршити много брже.<sup>6)</sup>

<sup>6)</sup> Као пример таквих таблица могу се навести, рецимо, таблице „Mathematical tables“ од С. V. Durell-a, London. Од таблица, које су код нас штампане, такве су „Логаритамске и нумеричке таблице“ од В. В. Мишковића, Београд.

Што се пак тиче детаљнијег састава ових таблица, тај састав ће пре свега зависити од тога а) са каквом се тачношћу хоће да се из таблица могу добити тражени подаци и б) да ли се сматра да ученици треба да буду упознати са тзв. линеарном интерполацијом, или се сматра да ова интерполација не треба да уђе у школски програм.

Но, иако је тачност са којом се могу добити тражени подаци из неких таблица често од огромног значаја кад је у питању решавање извесних конкретних проблема из практичног живота, није тешко увидети да је значај те тачности, уколико се ради о самој настави математике, далеко мањи. Тако, на пример, за рад у школи није од великог значаја да ли ће се помоћу употребљене таблице логаритама природних бројева моћи одредити само прве три цифре, или, рецимо, свих првих шест цифара мантисе траженог логаритма (односно само прве три цифре или свих првих шест цифара траженог нумеруса), јер се у школи не морају ни задавати задаци у којима нумеруси имају више од три важеће цифре (сем уколико се хоће да се узимају и што разноврснији подаци из реалног живота). Ту се ради, наиме, пре свега о принципијелном, суштинском разумевању употребе ових таблица, док се број цифара са којим ће се радити и тако у сваком случају мора на неки начин ограничити. А како су таблице које дају податке са мањом тачношћу, мање обимне и спретније за руковање него оне које дају податке са већом тачношћу (таблице из којих се могу непосредно прочитати, на пример, мантисе троцифрених целих бројева десет пута су краће од оних које дају непосредно мантисе четвороцифрених целих бројева), то се у току последњих педесет година у многим школама неких културно развијених земаља (САД, Енглеска, Немачка, СССР), прешло са такозваних шесто и петодецималних таблица, које су дотле биле у употреби, на такозване четвородецималне таблице, и оне су се показале сасвим подесним за наставне сврхе. Помоћу њих, на пример, могу се одређивати са тачношћу до на једну јединицу са места последње цифре четвороцифрени почечи тражених посебних бројева; затим, помоћу њих се могу одређивати са тачношћу до на један минут углови, и тд., што је све за школу сасвим довољно<sup>7)</sup>.

Стога сматрам да ни код нас нема више никаквог стварног разлога да се у средњим школама, уколико би се остало при садашњем јединственом типу гимназија, не замене до сада готово стално употребљаване петодецималне

<sup>7)</sup> У вези са увођењем четвородецималних логаритамских таблица у средње школе биле су вођене у првој половини овог нека многобројне дискусије. Један од математичара, који се највише залагао за њихово увођење, био је истакнути немачки методичар Dr. A. Schülke. Те се дискусије у извесној мери и данас настављају.

нумеричке таблице четвороцифреним таблицама. Аверзија, коју један део наставника показује према тим таблицама, може се образложити само извесном традиционалношћу, то јест оним истим, услед чега су наше још старије генерације наставника биле против тога да се шестоцифрене таблице замене петоцифренима. Уосталом, у томе смислу, тј. да треба увести четвороцифрене таблице, изјаснила се још 1951 године и комисија за математичку наставу у средњим школама при Савезу друштава математичара и физичара Југославије<sup>8</sup>). А уколико би пак дошло до бифуркације у последњим разредима гимназије, о овом би питању требало посебно расправљати.

Што се пак тиче питање интерполације — а то ће рећи линеарне интерполације, која у средњим школама једина долази у обзир — сматрам да би се она у гимназијама садашњег, јединственог типа, као и у средњим техничким школама, морала и у будуће објашњавати ученицима, иако то објашњавање односи доста времена, а ученици га, ако се то објашњење после, услед оскудице у времену, не тражи од њих, често забораве, па врше интерполацију само механички. Ствар је, наиме, пре свега у принципијелном схватању да ученици, који сврше средњу школу, треба нешто да знају и у погледу интерполације. Затим, чињеница је и то да су све веће таблице, које се употребљавају у геодезији, астрономији, па и у техници, састављене тако, да је за њихово потпуно искоришћене нужно да се зна интерполација, па они ученици, који о интерполацији ништа не чују у гимназији, не могу после, без посебног објашњавања, њима да се служе. Но, ова аргументација не мора изгледати сасвим убедљива, па има и присталица супротног схватања, тј. схватања да у гимназији треба употребљавати само оне таблице, које непосредно дају све оне вредности функција, које се путем њих уопште могу добити.<sup>9</sup>) То схватање се нарочито може подржавати тиме, што интерполација не претставља важан одељак елементарне математике, што није органски повезан за друге одељке који се предају у средњој школи, и што се баш четвородесетималне таблице могу уредити и тако, да се из њих све тражене вредности могу добити и непосредно, а да притом ипак не буду сувише гломазне. Но, мени изгледа да се ови разлози могу сматрати за довољно јаке само уколико би били у питању ученици класичних гимназија, учитељских школа или, евентуално, ученици хуманитарних отсека наших гимназија, док у случају осталих ипак не би дошли у обзир.

<sup>8</sup>) Видети часопис „Настава математике и физике у средњој школи“, бр. 2 из 1952 године, стр. 77.

<sup>9</sup>) Од многобројних таблица ове врсте навешћемо само таблице Dr. H. Schubert-а, које су под насловом „Vierstellige Tafeln und Gegendtafeln“ изашле у колекцији „Sammlung Göschen“, још 1903 године.



Према томе, у овом чланку се заступа мишљење да би у нашим садашњим средњим школама јединственог типа требало употребљавати, уколико су у питању таблице логаритама и тригонометријских функција, тзв. четвородецималне таблице, уређене тако, да је за њихову потпуну употребу потребно знање интерполације (в. т. 5). Иначе, што се тиче самог састава оваквих таблица, мислим да треба обратити пажњу на следеће.

а) Таблице треба да буду тако уређене, да онај ко навикне њима да се служи, може после без икаквих сметњи да се служи и свима већим таблицама ове врсте. — Према томе, изгледа ми да, с обзиром на наставне сврхе, није добро када се у неким од ових таблица дају тзв. „поправци“ за читаве редове заједнички, чак ни тамо где то не доводи до веће нетачности, зато што тако нису уређене скоро ни једне веће таблице ове врсте (в. т. 6). Поправке треба ученик или увек сам да тражи, или, евентуално, да их узима из тзв. споредних „таблица пропорционалности“.

б) С обзиром на ову околност, боље је ако се код углова задржи као прва нижа подела степена његова подела на делове од по 10 минута, него ако се заведе подела степена на његове десете делове, тј. на делове од по 6 минута, иако је та подела уведена већ у доста новијих таблица (в. т. 6).

#### МАНТИСЕ ЛОГАРИТАМА ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Р. Р.
10	0 000	043	086	128	170	212	253	294	334	374	43 42 41
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755	1   4,3 4,2 4,1
12	792	828	864	899	934	969	004	038	072	106	2   8,6 8,4 8,2
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Т. 5

#### ВРЕДНОСТИ СИНУСА

°	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	Поправки 1' 2' 3'
0	0,0000	017	035	052	070	087	105	122	140	157	175	89   3 6 9
1	175	192	209	227	244	262	279	297	314	332	349	88   3 6 9
2	349	366	384	401	419	436	454	471	488	506	523	87   3 6 9
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

#### ВРЕДНОСТИ КОСИНУСА

Т. 6

в) Таблице треба да буду уређене тако, да поступак око добијања података буде по могућности што једноставнији и једнообразан. — Тако, на пример, на местима где предвиђени интернационални поступак не може да се употреби, из таблица треба да могу непосредно да се добију тражени подаци, па макар то повећавало обим таблица.

Најзад, ради потпуности да набројимо и неке друге таблице, које треба бар повремено да се употребљавају у ви наших средњих школа. То су: шим разредима

а) Таблица простих чинилаца бројева од 1 до 1000.

б) Таблица за претварање степена, минута и секунда у стоте делове првог угла (граде), и обратно.

в) Таблица тригонометријских функција у случају када је величина угла дата у стотим деловима правоугла (у градусима).

г) Таблица за претварање степена, минута и секунда у радијане, и обратно.

д) Таблица тригонометријских функција у случају када је величина угла дата у радијанима.

ђ) Таблица фактора пропорционалности при израчунавању крајње и почетне вредности капитала, датог под сложен интерес.

е) Таблица вредности факторијела и биномних коефицијената.

ж) Таблица некојих чешће употребљаваних математичких констаната и њихових логаритима.

Но, нема потребе да се и на овим таблицама дуже задржавамо. То су кратке таблице, које се ређе употребљавају, и чија је употреба сасвим једноставна. Таблица природних логаритама није овде поменута, зато што појам ових логаритама не улази сада у средњошколски наставни програм. Исто тако нећемо се задржавати на овом месту ни на питању да ли би поред ових таблица требало увек штампати и таблице често употребљаваних констаната, које се јављају у физици, хемији, астрономији и географији, као и да ли би им требало прикључивати и неке најпростије номограме, као што је то учињено у неким новијим таблицама<sup>10)</sup>. Једино што бих још да напоменем да уз ове таблице треба да буде штампана и збирка математичких образаца, пошто ми се чини да употребу ове збирке треба допустити ученицима при изради школских писмених задатака, као и при изради писменог задатка из математике на матури.

<sup>10)</sup> Као пример оваквих таблица наводимо таблице Dr. Ph. Lötzbeyer-a, чије је најновије издање изашло под насловом „Vierstellige Tafeln zum logarithmischen und natürlichen Rechnen“, 1954 године.

*Résumé***QUELLES TABLES NUMÉRIQUES FAUT-IL EMPLOYER  
DANS LES ÉCOLES DE SECOND DEGRÉ****Platon Dimić**

L'auteur expose son opinion à propos de l'emploi des tables numériques dans l'enseignement mathématique dans les écoles de second degré. Il est d'avis que quelques uns de ces tables doivent être introduites déjà dans les premières classes de ces écoles et que dans les classes supérieures il est recommandable qu'on emploie les tables logarithmiques et trigonométriques à quatre décimaux.

---