МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 9 (2021), 137 – 148
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-9.html

(НЕ)ВОЗМОЖНА ОСЛОБОДИТЕЛНА СТРАТЕГИЈА

Стево Ѓоргиев [1]

Математичките загатки отсекогаш привлекувале големо внимание кај секој од нас. Многу често на прв поглед тие изгледаат нерешливи, конфузни и многу комплицирани. Многу често имаме случаи во кои нашата цел не е решавање на загатката, туку разбирање на решението на загатката. Исто така, не се ретки случаите во кои врз база на даденото решение на една загатка, се обидуваме да најдеме нејзино поелегантно решение. Една таква загатка е и загатката позната под името *100 затвореници*, која за прв пат била дадена во 2003 година од страна на данскиот компјутерски научник Питер Бро Милтерсен, [2].

1. ФОРМУЛАЦИЈА НА ЗАГАТКАТА

Како што кажува и самото име на оваа загатка, станува збор за затвореници чија крајна цел е да добијат ослободителна пресуда, односно да ја победат управата на затворот во играта која се игра под одредени правила. Овој проблем е поставен во многу различни верзии, но секоја од нив ја има истата цел. Во продолжение ќе наведеме две познати верзии на овој проблем. Прво ќе ја наведеме првичната формулација на проблемот, а потоа верзијата во која најчесто се среќава овој проблем, т.е. формулацијата како загатка.

Првична формулација: ([3,6]) Директорот на еден затвор, на 100 затвореници осудени на смртна казна, нумерирани со бројчиња од 1 до 100, им дава последна шанса за ослободување. Во една соба има шкафче со 100 фиоки. На случаен начин директорот става по едно бројче од 1 до 100 во секоја од фиоките. Затворениците влегуваат во собата еден по еден. Секој од затворениците може да отвори 50 фиоки по кој било редослед. Откако ќе заврши еден од затворениците со отворањето на фиоките, фиоките се затвораат пред да влезе следниот затвореник во собата. Ако при отворањето на фиоките, секој од затворениците го најде своето бројче во една од фиоките кои ги отворил, тогаш сите затвореници се ослободени од извршување на казната. Ако барем еден затвореник не го најде своето бројче при отворањето на фиоките, тогаш се извршува смртната казна за сите затвореници. Пред почетокот на играта, т. е. пред влегувањето на првиот затвореник во собата со шкафчето со фиоки, затворениците можат да договараат стратегија на играње. Од влегувањето на првиот затвореник во собата со шкафчето со фиоки, тие повеќе немаат право на меѓусебна комуникација. Која е најдобрата стратегија за играње на затворениците?

Формулација како загатка: ([5]) Имињата на 100 затвореници, сите со различни имиња, се ставени во 100 дрвени кутии, по едно име во една кутија. Кутиите се поставени во една редица, една до друга, на маса во една соба. Еден по еден, секој од затворениците влегува во собата со кутиите. Секој од затворениците може да отвори најмногу 50 кутии, но мора да ја напушти собата кога ќе ја најде кутијата со своето име и нема право да комуницира со останатите затвореници откако ќе ја напушти собата со кутиите. На затворениците им е дозволено да формираат стратегија на играње пред почетокот на играта (пред влегување на првиот играч во собата со кутии), што е навистина потребно, затоа што ако некој од нив не ја најде кутијата со своето име, тогаш сите ќе бидат егзекутирани. Определи стратегија за играње на затворениците, така што веројатноста за успех е поголема од 30%.

Како што можеме да забележиме од горните две формулации, се работи за решавање на проблем од иста природа, само разликата е во поставените барања. Имено, во првичната формулација потребно е да се најде најдобра стратегија, а во формулацијата како загатка, потребно е да се најде стратегија која гарантира веројатност на успех поголема од 30%. Всушност, барањето од формулацијата како загатка е потслучај од барањето во првичната формулација.

Во продолжение ние ќе се задржиме на формулацијата како загатка и определувањето на стратегијата за играње која гарантира веројатност на успех поголема од 30%, што всушност е и најдобрата стратегија за играње во оваа игра, но нема да се задржуваме на тоа да докажеме дека е најдобра.

2. СТРАТЕГИИ ЗА ИГРАЊЕ И ВЕРОЈАТНОСТ ЗА УСПЕХ

Решавањето на оваа загатка се базира на два пристапа, односно разгледување на две стратегии за играње:

1. *Класична стратегија* - секој од играчите при влезот во собата со кутии ги отвора на случаен начин предвидените 50 кутии по сопствено убедување;
2. *Пермутациона стратегија* – секој од играчите при влезот во собата со кутии ги отвора предвидените 50 кутии по претходно утврден заеднички алгоритам, стратегија за играње.

Во продолжение ќе направиме детални разгледувања на загатката во случај на класична стратегија за играње и во случај на пермутациона стратегија за играње.

2.1. КЛАСИЧНА СТРАТЕГИЈА

Она што на прв поглед „ни дава за право“ да размислуваме во насока дека оваа загатка е со погрешно формулирани барања и дека е невозмножно да се определи стратегија со која ќе постигнеме веројатност за успех од над 30%, е токму размислувањето во контекст на класична стратегија. Да ги разгледаме следните настани:

$A_i - i -$ тиот играч ја отворил кутијата во која се наоѓа бројот i,

$B_j^i -$ бројот i е во $j -$ тата отворена кутија,

каде што $i = 1,2,...,100$ и $j = 1,2,...,50$. Според тоа,

$$P\left(A_i\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^{50} B_j^i\right) = \sum_{j=1}^{50} P\left(B_j^i\right) = \sum_{j=1}^{50} \frac{1}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2},$$

од тоа што $B_k^i \cap B_l^i = \varnothing$, за секое $k \neq l$, $i = 1,2,...,100$ и $P\left(B_j^i\right) = \dfrac{1}{100}$, за секое $j = 1,2,...,50$.

Од независноста на настаните A_i, веројатноста на настанот $E -$ затворениците не биле егзекутирани, е еднаква на

$$P\left(E\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{100} A_i\right) = \prod_{i=1}^{100} P\left(A_i\right) = \prod_{i=1}^{100} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100}.$$

Значи, со ваквиот пристап на решавање на загатката, добиваме дека веројатноста за успех, односно веројатноста затворениците да избегнат егзекуција е многу мала, па може да се каже дека е невозможно да ја остварат својата цел. Оваа веројатност не е ниту приближно до веројатноста за успех која затворениците ја посакуваат. Всушност со ваквиот класичен пристап за решавање на оваа загатка, дури и во случај на двајца затвореници добиваме веројатност за успех помала од 30%.

2.2. ПЕРМУТАЦИОНА СТРАТЕГИЈА

Во овој дел ќе ја разгледаме стратегијата за играње која е всушност најдобра стратегија која затворениците можат да ја применат при играње на оваа игра. Со други зборови, оваа е стратегијата со која веројатноста да успеат да не бидат егзекутирани е над 30%. За поедноставување, на почеток ќе ја разгледаме оваа игра како игра со 10 затвореници, во која секој од затворениците треба да ја пронајде кутијата која во внатрешноста го содржи неговото бројче со најмногу 5 отворени кутии. Согласно правилата на играта, секој од играчите е нумериран со еден од броевите од 1 до 10. Според тоа, можеме да ја разгледуваме секоја кутија со имињата на затворениците како кутија со два броја и тоа:

- Првиот број е редниот број на кутијата на надворешната страна. Доколку не се означени кутиите однадвор со бројчиња, согласно тоа што се наредени во редица на една маса, можат да бидат нумерирани со броеви од 1 до 10 согласно редоследот како што се поставени на масата, сметајќи од лево кон десно.
- Вториот број е бројот кој се наоѓа внатре во кутијата. Иако во самата формулација на загатката, во кутиите се наоѓаат имињата на затворениците, од тоа што секој од затворениците е нумериран со еден од броевите од 1 до 10, значи дека секое име одговара на еден број од 1 до 10.

Според тоа, оправдано е да ги разгледуваме кутиите како кутии кои се индетификуваат со два броја, еден на надворешната страна и еден во внатрешноста. Притоа да забележиме дека, броевите (имињата на затворениците) во внатрешноста на кутиите се распоредени од страна на директорот на затворот на случаен начин. На овој начин можеме да формираме таканаречена пермутациона стратегија, која се состои од следните чекори за играње:

Чекор 1. При влегување во собата со кутиите, секој од затворениците како прва кутија ја отвора кутијата на која бројот од надворешната страна се совпаѓа со неговиот реден број.

Чекор 2. Ако затвореникот го пронајде својот реден број (своето име) во внатрешноста на кутијата, тогаш неговото играње завршува и тој ја напушта собата со кутиите.

Чекор 3. Ако бројот во кутијата не се совпаѓа со редниот број на играчот, тогаш тој продолжува со играта, така што ја отвора онаа кутија на која бројот од надворешната страна е ист со бројот којшто го пронашол во кутијата којашто ја отворил последна.

Чекор 4. Чекор 2 и Чекор 3 се повторуваат сè додека затвореникот во рамки на максималниот број предвидени потези не ја пронајде кутијата која во внатрешноста го содржи неговиот реден број (неговото име) или го достигне максималниот број предвидени потези за играње.

Пример 1. Да се обидеме да ги примениме дадените чекори на стратегијата на играта со 10 затвореници, со максимум 5 потези за играње по затвореник. Да забележиме дека вкупниот број на разместувања на имињата на затворениците во кутиите е $10!$, односно тоа е вкупен број на пермутации од 10 елементи. За да дојдеме до заклучокот кој го посакуваме, ќе започнеме со разгледувања на една пермутација дадена со

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 5 & 2 & 1 & 9 & 4 & 3 & 10 & 6 \end{pmatrix},$$

каде што првиот ред ги претставува броевите на кутијата од надворешната страна, а вториот ред ги претставува броевите во внатрешноста на секоја од кутиите. Ќе ги примениме чекорите од стратегијата на дадената премутација. На тој начин ја добиваме Табела 1.

Со дадената пермутација, секој од затворениците го наоѓа своето име во една од кутиите со помош на пермутационата стратегија. Всушност, доколку ги разгледаме чекорите на движење на секој од затворениците, ќе забележиме дека по играта на Затвореник 1, играчите Затвореник 3, Затвореник 5 и Затвореник 8, не треба да играат, затоа што со сигурност ќе го пронајдат своето име, бидејќи тие ќе ги имаат истите чекори на движење како и Затвореник 1, само во различна почетна точка. Од истите причини, пронаоѓањето на своето име од страна на Затвореник 2, значи дека со сигурност и Затвореник 7 и Затвореник 4 ќе го пронајдат своето име. Исто така, пронаоѓањето на своето име од страна на Затвореник 10, значи дека и Затвореник 6 и Затвореник 9 ќе го пронајдат своето.

Затвореник	Чекори на „движење“
Затвореник 1	$1 \to 8 \to 3 \to 5 \to$ пронајдено име
Затвореник 2	$2 \to 7 \to 4 \to$ пронајдено име
Затвореник 3	$3 \to 5 \to 1 \to 8 \to$ пронајдено име
Затвореник 4	$4 \to 2 \to 7 \to$ пронајдено име
Затвореник 5	$5 \to 1 \to 8 \to 3 \to$ пронајдено име
Затвореник 6	$6 \to 9 \to 10 \to$ пронајдено име
Затвореник 7	$7 \to 4 \to 2 \to$ пронајдено име
Затвореник 8	$8 \to 3 \to 5 \to 1 \to$ пронајдено име
Затвореник 9	$9 \to 10 \to 6 \to$ пронајдено име
Затвореник 10	$10 \to 6 \to 9 \to$ пронајдено име

Табела 1. Приказ на чекорите на пермутациона стратегија при дадената пермутација.

Од сето ова доаѓаме до следниот заклучок.

Играчот Затвореник i, *којшто ја нашол кутијата со своето име, со сигурност знае дека играчите чиишто имиња се наоѓаат во кутиите коишто тој ги отворил, исто така ќе ја пронајдат кутијата со своето име.*

Во продолжение ќе наведеме некои основни поими и тврдења кои важат општо за пермутациите, поточно во теоријата на групи од пермутации, а кои и претходно ги применивме за дадената пермутација.

Нека е дадено конечно множество $A=\mathbb{N}_n=\{1,2,...,n\}$. *Пермутација* на множеството A е *биективно пресликување* $\sigma : A\to A$. Множеството од сите пермутации на множеството A го означуваме со S_A, односно со S_n. Множеството S_A од сите пермутации на множеството A е *група* во однос на операцијата *композиција на пресликувања*, [4].

Дефиниција 1. ([7]) Нека $\tau \in S_n$. За τ велиме дека е $k-$*циклус*, ако постојат $a_1,a_2,...,a_k \in A$ т.ш. $\tau(a_1)=a_2$, $\tau(a_2)=a_3,\dots,$ $\tau(a_k)=a_1$ и τ го фиксира секој друг елемент на A, т.е.

$$\tau(a_i)=\begin{cases} a_{i+1}, i<k \\ a_1, i=k \\ a_i, \text{во сите други случаи} \end{cases},$$

и означуваме $\tau=(a_1\, a_2\, a_3 \dots a_k)$.

Бројот на елементи од еден циклус се нарекува *должина на циклус*. Притоа, циклусите кои немаат заеднички елементи ги нарекуваме *дијунктни циклуси*. Едно од поважите тврдења, кое ќе го користиме во наредните разгледувања е следното тврдење.

Тврдење 1. ([4]) Нека $\sigma \in S_n$. Тогаш σ може да се претстави како производ на дисјунктни циклуси ако и само ако има конечно многу нетривијални циклуси. Ако не се земе предвид распоредот на факторите во производот, тогаш претставувањето на σ во облик на производ е еднозначно определено.

Пример 2. Доколку се навратиме на Пример 1, користејќи ги претходно изнесените дефиниции и тврдења, добиваме дека дадената пермутација од примерот, запишана како производ на дисјунктни циклуси има облик

$$(1\;8\;3\;5)(2\;7\;4)(6\;9\;10).$$

Да забележиме дека, во нашиот пример, еден играч да биде победник, треба должината на циклусот со кој играчот ќе го пронајде своето име да биде помала или еднаква на 5. Па, во случај на пермутација запишана како производ на дисјунктни циклуси, погоре донесениот заклучок значи дека сите играчи чиишто редни броеви се наоѓаат во циклус со должина помала или еднаква на 5 го пронашле своето име. Според тоа, проблемот го сведуваме на разгледување на должини на дисјунктни циклуси на пермутација.

3. ВЕРОЈАТНОСТА НА „ГОЛЕМИОТ“ ЦИКЛУС

Во продолжение ќе се обидеме поформално да ја дадеме врската помеѓу должината на циклуси и поволните настани за пресметување на посакуваната веројатност. Имено, во претходниот пример дојдовме до заклучок дека сите играчи чиишто редни броеви се наоѓаат во циклус со должина помала или еднаква на 5 го пронашле своето име. Доколку се навратиме на нашиот почетен проблем, определување на веројатноста за успех на затворениците, односно веројатноста на настанот

$$E - \text{затворениците избегнале егзекуција},$$

што значи дека секој од нив го пронашол своето име во дозволените 50 на број потези. Запишано во терминологија од теорија на групи од пермутации, овој настан е еквивалентен со настанот

$$F - \begin{array}{c}\text{пермутацијата е составена од циклуси со}\\ \text{должини помали или еднакви на 50}\end{array},$$

што значи дека должините на циклусите на пермутацијата претставена како производ на дисјунктни циклуси се помали или еднакви на 50. Според тоа, бројот на поволни настани е еднаков на бројот на пермутации од S_n, кои претставени како производ на дисјунктни циклуси, се состојат од циклуси со должини најмногу 50. Определувањето на овој број е покомплицирано, за разлика од определувањето на бројот на пермутации кои претставени како производ на дисјунктни циклуси содржат циклус со должина поголема од 50, што всушност е спротивниот настан на настанот F, односно тоа е настанот

$$\overline{F} - \text{пермутацијата содржи циклус со должина поголема од } 50 .$$

За таа цел, во продолжение ќе се обидеме да дојдеме до некои заклучоци кои важат општо за пермутациите при претставување како производ на дисјунктни циклуси. Да се обидеме да го определиме бројот на сите пермутации од S_n, кои содржат циклус со должина k, $\left[\frac{n}{2}\right] < k \leq n$, односно пермутациите од облик $\underbrace{(\_\_\_\_\_\_)}_{k-\text{циклус}}(\ )(\ )(\ )(\ ).$

Да забележиме дека една пермутација од S_n која содржи циклус со должина k, $\left[\frac{n}{2}\right] < k \leq n$, не содржи друг циклус со истата должина, односно циклусот со таа должина е единствен во претставувањето. Елементите на циклусот со должина k, можат да се изберат на C_n^k начини. Заради тоа што станува збор за циклус, позицијата од која го започнуваме движењето во циклусот не е битна, па добиваме дека елементите на циклусот формираат циклична пермутација од k елементи и тие можат да се распоредат на P_{k-1} начини. Останатите $n-k$ елементи можат да се распоредат на P_{n-k} начини, [4]. Според тоа,

$$C_n^k \cdot P_{k-1} \cdot P_{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k!)}(k-1)!(n-k)! = \frac{n!}{k},$$

е бројот на пермутациите од S_n кои содржат циклус со должина k, $\left[\frac{n}{2}\right] < k \leq n$. Со тоа сме го покажале следното тврдење:

Тврдење 2. Бројот на пермутации од S_n кои содржат циклус со должина k, $\left[\frac{n}{2}\right] < k \leq n$, е еднаков на $\frac{n!}{k}$.

Како последица на Тврдење 2, ги добиваме следните тврдења.

Тврдење 3. Веројатноста произволно избрана пермутација $\sigma \in S_n$ да содржи циклус со должина k, $\left[\frac{n}{2}\right] < k \leq n$ е еднаква на $\frac{1}{k}$.

Тврдење 4. Веројатноста произволно избрана пермутација $\sigma \in S_n$ да содржи циклус со должина поголема од k, $\left[\frac{n}{2}\right] < k \leq n$ е еднаква на $\sum_{i=[n/2]+1}^{n} \frac{1}{i}$.

Всушност, последните две тврдења се двете клучни алатки за да покажеме дека пермутационата стратегија навистина гарантира веројатност на успех поголема од 30%. За таа цел да го претставиме настанот $\overline{F}$ – пермутацијата содржи циклус со должина поголема од 50, како $\overline{F} = \bigcup_{k=51}^{100} M_k$, односно унија од настаните

$$M_k - \text{пермутацијата содржи циклус со должина } k,$$

за $51 \le k \le 100$. Да забележиме дека настаните од унијата се дисјунктни помеѓу себе. Од сето ова, добиваме дека

$$P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - P\left(\bigcup_{k=51}^{100} M_k\right) = 1 - \sum_{k=51}^{100} P(M_k) =$$

$$= 1 - \sum_{k=51}^{100} \frac{|M_k|}{|S_{100}|} = 1 - \sum_{k=51}^{100} \frac{\frac{100!}{k}}{100!} = 1 - \sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k} \approx 0,312 .$$

Со ова покажавме дека пермутационата стратегија навистина гарантира веројатност на успех поголема од 30%. Според тоа, можеме да заклучиме дека барањата на загатката се оправдани и дека постои стратегија за играње со која може да се добие бараната веројатност на успех. Практична потврда за оваа веројатност на успех е добиена со помош на статистичкиот софтвер R со кодот даден во [8], презентиран подолу во Прилог, каде што се разгледуваат успесите и неуспесите во 1000 повторувања на играта. Како што кажавме и на самиот почеток, тежината на загатката не е само наоѓање на нејзиното решение, туку и во неговото разбирање. Тоа е така, затоа што, како што видовме, тоа претставува спој од повеќе математички области, како што се теоријата на веројатност, теоријата на игри, теоријата на групи од пермутации и комбинаторната анализа.

ПРИЛОГ ([8])

Во овој прилог е даден код во статистичкиот софтвер R, за 1000 повторувања на играта 100 затвореници и пресметување на веројатноста за успех користејќи пермутациона стратегија.

```
n = 1000 #број на обиди
uspesi = rep(0,n) #евидентирање на бројот на затвореници кои го пронашле своето име во секој од обидите
for(i in 1:n){
  pobeda = rep(F,100)
  ime = sample(1:100)
  for(j in 1:100){
    kutii = 0
    razgleduvana.kutija = j
    while(kutii<50 && !pobeda[j]){
      kutii=kutii+1
      pobeda[j] = ime[razgleduvana.kutija]==j
      razgleduvana.kutija = ime[razgleduvana.kutija]
    }
  }
  uspesi [i] = sum(pobeda)
}
cat("Веројатноста за успех во 1000 обиди со пермутациона стратегија е ",100*mean(uspesi==100),"%.",sep="")
```

Во Табела 2 дадена подолу, ги имаме веројатностите за успех добиени со помош на горенаведниот код во статистичкиот софтвер R. Со ова извршивме тестирање за различни вредности на бројот на обиди, односно повторувања на играта. Притоа увидовме дека со зголемувањето на бројот на повторувања на играта, експериментално добиената веројатност за успех се приближува до теориската. И двете се поголеми од 30%, што требаше да го илустрираме.

Број на повторувања	**10**	**100**	**1000**	**10000**	**100000**	**1000000**
Веројатност на успех (%)	**20%**	**34%**	**31.7%**	**31.28%**	**31%**	**31.14%**

Табела 2. Табеларен приказ на веројатностите при различен број на повторувања.

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. A. Brualdi, *Introductory Combinatorics,* Pearson Education, 2010.

[2] E. Curtin, M. Warshauer, *The Locker* Puzzle, Mathematical Entertainments, The Mathematical Intelligencer, Vol. 28, No. 1, 2006, 28-31.

[3] P. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2009.

[4] Ѓ. Чупона, Б. Трпеновски, *Предавања по алгебра Книга II*, НУБ „Св. Климент Охриски", 2000.

[5] *Data Genetics | 100 Prisoners Escape Puzzle*, https://datagenetics.com/blog/december42014/index.html

[6] *Department of mathematics and statistics Queen's Univeristy | The condemned prisoners and the boxes*, https://www.mast.queensu.ca/~peter/inprocess/prisoners.pdf

[7] *MIT Mathematics | 5. Permutation Groups*, http://math.mit.edu/~mckernan/Teaching/12-13/Spring/18.703/l_5.pdf

[8] *Rosseta code | 100 prisoners*, https://rosettacode.org/wiki/Rosetta_Code

[1] Природно-математички факултет
ул. „Архимедова" бр. 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: stevogjorgiev@gmail.com

Примен: 2.6.2021
Поправен: 19.10.2021
Одобрен: 22.10.2021
Објавен на интернет: 3.11.2021