МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 5 (2019), 131 – 153
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-5.html

ШАПЛИ - ШУБИК ИНДЕКС НА МОЌНОСТ – ОД ТЕОРИЈА ДО СЕКОЈДНЕВИЕ

Стево Ѓоргиев [1]

Секој од нас се нашол во ситуација да направи избор во одреден момент, односно да се приклучи кон една или друга коалиција, кои застапуваат различни ставови, или поточно кажано се во конфликт. Теоријата на игри е релативно млада дисциплина во областа на математиката, која со помош на алатки од теоријата на веројатност, математичко програмирање и линеарната алгебра, ги опишува и решава тие секојдневни конфликтни ситуации. Според тоа, *игра* е множество од ситуации за кои крајниот исход зависи од одлуките на две или повеќе лица, [3]. Главната цел е лицата кои учествуваат во играта, односно играчите, да носат рационални и оптимални одлуки, односно да играат на начин со кој ќе остварат најголема добивка. Комплетниот план на акции кои еден играч ќе ги презема, согласно дозволените потези во играта, односно почитувајќи ги правилата на игра, се нарекува *стратегија* на еден играч. Според тоа, велиме дека еден играч има стратегија, ако тој знае однапред каков потег ќе повлече, во кој било момент кога е на потег во играта која ја игра. Во овој труд ќе се обидеме да дадеме еден пристап кон определување на *оптимална стратегија* за еден играч начин на определување на интензитетот на важност на поединецот во група, односно коалиција. Определувањето на интензитетот на важност, односно Шапли – Шубик индексот на моќност, ќе се обидеме да го воведеме како решение на коалициона игра, сето тоа сведувајќи го на решавање на збир нула 2×2 игри во матрична форма.

1. ФОРМАЛНИ ДЕФИНИЦИИ И СВОЈСТВА ОД ТЕОРИЈА НА ИГРИ

Ќе наведеме некои основни поими од теоријата на игри, конкретно за збир нула игрите на кои ќе се навраќаме низ целиот овој труд. *Збир нула играта* со двајца играчи е многу едноставна и лесна за разбирање, затоа што едниот играч остварува онолку добивка колку што другиот играч остварил загуба. Ќе ги означуваме играчите со Играч 1, односно И1 и со Играч 2, односно И2.

Дефиниција 1. Стратешка форма или нормална форма на *збир нула игра* со двајца играчи е тројката (X,Y,A), каде што

(1) X е непразно множество што го претставува множеството стратегии на И1

(2) Y е непразно множество што го претставува множеството стратегии на И2

(3) A е реално-вредносна функција дефинирана од $X \times Y \to \mathbb{R}$.

Збир нула игра со двајца играчи од облик (X,Y,A) се нарекува *конечна игра*, ако множествата стратегии X и Y на играчите И1 и И2 се конечни. Конечна збир нула игра со двајца играчи во стратешка форма (X,Y,A), понекогаш се нарекува и *матрична игра*, затоа што *функцијата на исплата* $A(x,y)$ може да се претстави во матрична форма. Ако $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}$ и $Y=\{y_1,y_2,...,y_n\}$, тогаш под *матрица на играта* или *матрица на исплата* ќе подразбираме матрица од облик

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ каде што } a_{ij}=A(x_i,y_j),\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n.$$

Во ваквото претставување на играта, И1 избира редица, И2 избира колона и И2 му плаќа на И1 онолку колку што е вредноста на елементот од матрицата во избраните редица и колона. Да забележиме дека елементите на матрицата ја претставуваат добивката за И1 и загубата за И2.

Дефиниција 2. Подредената *m*-ка веројатности од облик $p=(p_1,...,p_m)^T$ такви што $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, која ја претставува честотата со која еден играч ќе игра одредена редица, односно колона, се нарекува *мешана стратегија* за играчот.

Дефиниција 3. *Чиста стратегија* на еден играч е подредената m-ка веројатности од облик $p=\left(p_1,p_2,...,p_m\right)^T$ за која постои единствен $j\in\left\{1,2,...,m\right\}$, така што

$$p_i=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$$

и ја претставува честотата со која еден играч ќе игра одредена редица или колона.

Следното тврдење е една алтернативна форма на Minimax теоремата која е фундаменталната теорема на теоријата на игри.

Тврдење 1. ([1]) За секоја конечна збир нула игра во стратешка форма со двајца играчи

(1) постои реален број V кој се нарекува *вредност на играта*,

(2) постои мешана стратегија за И1, така што просечната добивка на И1 е најмалку V, без разлика каков потег ќе преземе И2,

(3) постои мешана стратегија за И2, така што просечната загуба на И2 е најмногу V, без разлика каков потег ќе преземе И1.

Ако V прима вредност нула тогаш велиме дека играта е *фер*. Ако V прима позитивна вредност тогаш велиме дека играта е во корист на првиот играч И1, а ако V е негативно тогаш велиме дека играта е во корист на вториот играч И2.

Со следното тврдење даден е доволен услов за чиста оптимална стратегија на И2.

Тврдење 2. ([6]) Ако еден играч има фиксна мешана стратегија, тогаш другиот играч има оптимална контрастратегија која е чиста.

Дефиниција 4. Ако некој елемент a_{ij} од матрицата $A_{m\times n}$ е со својство:

(1) a_{ij} е минимумот во i - тата редица,

(2) a_{ij} е максимумот во j - тата колона,

тогаш велиме дека a_{ij} е *седлеста точка* на матрицата A.

Ако a_{ij} е седлеста точка, тогаш И1 може да оствари добивка со вредност најмногу a_{ij} со избор на i-тата редица, а И2 може да оствари загуба со вредност најмногу a_{ij} со избор на j - тата колона. Уште повеќе a_{ij} е *вредност на играта*.

Дефиниција 5. За i-тата редица на матрицата $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ велиме дека ја *доминира* (*строго доминира*) k-тата редица, ако $a_{ij}\geq a_{kj}$ (т.е. $a_{ij}>a_{kj}$) за секој $j=1,2,...,n$. Слично, за j-тата колона на матрицата $A=\left(a_{ij}\right)$ велиме дека ја доминира (строго доминира) k-тата колона, ако $a_{ij}\leq a_{ik}$ (т.е. $a_{ij}<a_{ik}$) за секој $i=1,2,...,m$.

Нека со $p=\left(p_1,p_2,...,p_m\right)^T$ и $q=\left(q_1,q_2,...,q_n\right)^T$ ги означиме мешаните стратегии на И1 и И2, соодветно. Ако И1 ја користи мешаната стратегија p и И2 ја избере j-тата колона, тогаш исплатата на И1 е еднаква на сумата $\sum_{i=1}^{m}p_ia_{ij}$. Слично, ако И2 ја користи мешаната стратегија q и И1 ја избере i-тата редица, тогаш исплатата на И2 е еднаква на сумата $\sum_{j=1}^{n}q_ja_{ij}$. Поопшто, ако И1 ја користи мешаната стратегија p и И2 ја користи мешаната стратегија q, тогаш исплатата за И1 е еднаква на $p^TAq=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_ia_{ij}q_j$. За $p^TAq=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_ia_{ij}q_j$ уште велиме дека е *очекувана вредност на играта*.

2. РЕШЕНИЕ НА 2×2 МАТРИЧНИ ИГРИ

Разгледуваме 2×2 матрична игра од облик

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}.$$

За да ја решиме оваа игра, односно да најдеме вредност на играта и најмалку една оптимална стратегија за секој играч, постапно работиме на следниов начин:

1. Проверуваме дали играта има седлеста точка;

2. Ако нема седлеста точка, тогаш играта ја решаваме со изедначување на стратегии.

Ќе го докажеме методот на изедначувачки стратегии, под претпоставка дека нема седлести точки во дадената игра, бидејќи тој случај го разгледавме претходно.

Значи, да претпоставиме дека играта нема седлеста точка. Ако $a \geq b$, тогаш $b < d$, затоа што во спротивно b е седлеста точка. Исто така, ако $b < d$, тогаш $d > c$, затоа што во спротивно d е седлеста точка. Разгледувајќи понатаму добиваме дека мора да важат и неравенствата $c < a$ и $a > b$. Со други зборови, ако $a \geq b$, тогаш $a > b < d > c < a$. Симетрично, ако $a \leq b$, тогаш $a < b > d < c > a$. Според тоа, го добиваме следното тврдење.

Тврдење 3. *Ако играта нема седлеста точка, тогаш се исполнети неравенствата $a > b$, $b < d$, $d > c$ и $c < a$ или неравенствата $a < b$, $b > d$, $d < c$ и $c > a$.*

Нека мешаната стратегија на играчот И1 ја означиме со $(1-p, p)$. Бидејќи на секоја мешана стратегија на еден играч во дадена игра, одговара чиста контрастратегија, доволно е да ги изедначиме равенките за добивката на И1 кога И2 ја користи првата, односно втората колона, затоа што сакаме првиот играч да има најголема можна добивка без разлика која стратегија ќе ја избере вториот играч. Нека со $r_j(p), j = 1, 2$, ја означиме вредноста на исплатата на првиот играч кога вториот играч ја избира j-тата колона. Според тоа

$$r_1(p) = (1-p)a + pc, \quad r_2(p) = (1-p)b + pd.$$

Од претходната дикусија имаме дека $r_1(p) = r_2(p)$, па значи $(1-p)a + pc = (1-p)b + pd$. Решавајќи ја последната равенка по променливата p добиваме дека $p = \dfrac{a-b}{(a-b)+(d-c)}$. Затоа што по претпоставка нема седлеста точка, изразите $(a-b)$ и $(d-c)$ се истовремено и двата позитивни или и двата негативни од каде што следува дека $p \in (0,1)$. Според тоа, користејќи ја стратегијата

$$\left(1-p,p\right)=\left(\frac{d-c}{\left(a-b\right)+\left(d-c\right)},\frac{a-b}{\left(a-b\right)+\left(d-c\right)}\right),$$

просечната добивка на И1 е $r_p=\left(1-p\right)a+pc=\dfrac{ad-bc}{a-b+d-c}$.

Нека мешаната стратегија на играчот И2 ја означиме со $\left(1-q,q\right)$. Слично како и за играчот И1, добиваме:

$$q=\frac{a-c}{\left(a-b\right)+\left(d-c\right)}.$$

Според тоа, користејќи ја мешаната стратегија:

$$\left(1-q,q\right)=\left(\frac{d-b}{\left(a-b\right)+\left(d-c\right)},\frac{a-c}{\left(a-b\right)+\left(d-c\right)}\right),$$

просечната загуба на И2 е $r_q=\dfrac{ad-bc}{a-b+d-c}$. Забележуваме дека $r_p=r_q$. Всушност со ова е определена *вредноста на играта,* која ќе ја означуваме со $V=V\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$, при што $V=r_p=r_q$ како и оптималните стратегии на играчите со кои таа се обезбедува.

Во продолжение, преку пример ќе се обидеме да ги илустрираме воведените поими и добиените резултати од теоријата на игри.

Пример 1. Во една кутија има бели, црни и зелени топчиња. Двајца другари играат игра, така што едниот запишува на ливче една боја, бела, црна или зелена, а другиот со гледање извлекува едно топче од кутијата. Потоа, ја споредуваат запишаната боја на ливчето и бојата на извлечетото топче. Доколку се со иста боја, тогаш нема исплата. Ако бојата на ливчето е бела, вториот играч му дава на првиот играч две парички, ако е црна првиот играч му дава на вториот играч пет парички, а ако е зелена вториот играч му дава на првиот три парички.

Ќе се обидеме да ја определиме матрицата на исплата на играта, најдобрите мешани стратегии за двајцата играчи и вредноста на играта.

Од дадените услови имаме дека секој од играчите може да избере една од боите бела, црна или зелена. На тој начин ќе ги обележиме и редиците, односно колоните на матрицата на исплата. Уште повеќе, можеме да заклучиме дека ќе разгледуваме матрица на исплата од ред 3×3. Од дадените услови, матрицата на исплата гласи:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{И2} \\ & & \begin{array}{ccc} \text{Б} & \text{Ц} & \text{З} \end{array} \\ \text{И1} & \begin{array}{c} \text{Б} \\ \text{Ц} \\ \text{З} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & -5 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Забележуваме дека првата и третата редица во матрицата на исплата строго ја доминираат втората редица, како и дека првата и третата колона ја доминираат втората колона, па матрицата на исплата може да се редуцира на матрица од втор ред:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{И2} \\ & & \begin{array}{cc} \text{Б} & \text{З} \end{array} \\ \text{И1} & \begin{array}{c} \text{Б} \\ \text{З} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Решението на овие игри е веќе определено и дискутирано, па ќе ги искористиме добиените резултати. Најдобра мешана стратегија на првиот играч И1 во 2×2 игра е

$$\left(1-p,p\right)=\left(\frac{-3}{-2+\left(-3\right)},\frac{-2}{-2+\left(-3\right)}\right)=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right),$$

а за вториот играч И2 е

$$\left(1-q,q\right)=\left(\frac{-2}{-2+\left(-3\right)},\frac{-3}{-2+\left(-3\right)}\right)=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right).$$

Сега, ако се вратиме во почетната игра од ред 3×3, најдобрите стратегии на играчите се $\left(\frac{3}{5},0,\frac{2}{5}\right)$ и $\left(\frac{2}{5},0,\frac{3}{5}\right)$, за И1 и И2, соодветно.

Притоа, добивката на првиот играч е $\frac{6}{5}$, а загубата на вториот е $\frac{6}{5}$.

За да провериме дали играта има седлеста точка, потребно и доволно е да ги определиме минималните вредности по редици и максималните вредности по колони и да ги споредиме. Доколку овие вредности се совпаѓат, тогаш таа точка е седлеста точка. Минималните вредности по редици се 0, –5, 0, за прва, втора, трета редица, соодветно, а максималните вредности по колони се 3, 3, 2, за прва, втора, трета колона, соодветно. Очигледно е дека нема поклопување на вредности, па според тоа, играта нема седлеста точка.

Сега ќе се обидеме да разгледаме една поинаква ситуација. Првиот играч одлучил да користи фиксна мешана стратегија. Честотата со која првиот играч ќе запишува бела боја е еднаква на веројатноста од непроѕирна кутија со 5 бели, 3 црни и 4 зелени топчиња без гледање да извлече бело топче. Честотата со која првиот играч ќе запишува црна боја е еднаква на веројатноста од непроѕирна кутија со 5 бели, 3 црни и 4 зелени топчиња без гледање да извлече црно топче, додека пак честотата со која првиот играч ќе запишува зелена боја е еднаква на веројатноста од непроѕирна кутија со 5 бели, 3 црни и 4 зелени топчиња без гледање да извлече зелено топче. Доколку првиот играч ја користи оваа подредена тројка од веројатности, да ја определиме најдобрата стратегија за вториот играч.

Веројатноста од непроѕирна кутија со 5 бели, 3 црни и 4 зелени топчиња, без гледање да се извлече бело топче е $\frac{5}{12}$, црно топче $\frac{3}{12}$ и зелено топче $\frac{4}{12}$. Според тоа, мешаната стратегија која ќе ја користи И1 е $\left(\frac{5}{12},\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$. Познато е дека, на секоја мешана стратегија на едниот играч, одговара најдобра стратегија на другиот играч која е чиста. Познато е дека И1 ќе користи мешана стратегија $\left(\frac{5}{12},\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$, додека И2 може да користи една од следниве три чисти стратегии: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$

и $(0,0,1)$. Ако И2 ја користи чистата стратегија $(1,0,0)$, тогаш ќе оствари загуба $s_1 = \frac{5}{12}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot(-5) + \frac{1}{3}\cdot 3 = -\frac{1}{4}$. Ако И2 ја користи чистата стратегија $(0,1,0)$, тогаш неговата загуба е $s_2 = \frac{5}{12}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 3 = \frac{11}{6}$. Ако И2 ја користи чистата стратегија $(0,0,1)$, тогаш загубата е $s_3 = \frac{5}{12}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot(-5) + \frac{1}{3}\cdot 0 = -\frac{1}{4}$. Според тоа, добиваме дека најдобри чисти стратегии за И2 се $(1,0,0)$ и $(0,0,1)$. Да забележиме дека, при изборот на И2 на која било од двете најдобри стратегии, при што И1 да ја користи мешаната стратегија $\left(\frac{5}{12},\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$, играта е во полза на вториот играч И2 кој остварува добивка во износ $\frac{1}{4}$.

3. КОАЛИЦИОНИ ИГРИ. КАРАКТЕРИСТИЧНА ФУНКЦИЈА НА ИГРА

Во теоријата на игри, кооперативните игри се игри во кои е дозволена комуникација помеѓу играчите и исто така е дозволено да се склучуваат обврзувачки договори. Ова бара некој механизам, надвор од самата игра кој ќе овозможи спроведување на договорите. Со комплетната слобода за склучување обврзувачки договори во теоријата на кооперативни игри, играчите во глобала можат да остварат поголема добивка. Теоријата на кооперативни игри е поделена на два дела во зависност од тоа дали постои или не постои начин за пренос на корист од еден на друг играч. Ако постои таков начин, можеме да размислуваме за пренос на средства како што се паричните средства, и да претпоставиме дека играчите имаат иста потреба од парични средства. Всушност, можеме да ја рангираме користа од паричните средства на тој начин што кога нема парични средства тогаш користа е 0, додека користа од една парична единица е 1. Во продолжение, ќе разгледуваме само кооперативни игри со пренослива корист, иако општо постојат и кооперативни игри без пренослива корист, како што напоменавме на почеток од овој дел.

Во кооперативните игри со повеќе играчи, нема ограничувања на договорите што можат да се склучат меѓу играчите. Исто така, претпоставуваме дека сите исплати може да се претставaт во иста мерна единица и дека има *пренослива корист* која дава можност за да се вршат *странични плаќања* меѓу играчите. Страничните плаќања може да се користат како поттик за некои играчи да користат одредени заемно корисни стратегии. Значи, ќе се занимаваме со играчи чија цел во играта е да формираат коалиција. Структурата на игрите со коалициона формација се проучува, така што, погодно ќе се сведе на игра во некоја форма во која главна улога играат коалициите. Откако ќе ја дефинираме коалиционата форма на игра со пренослива корист со повеќе играчи, ќе разгледаме како може да ја трансформираме играта од стратешка во коалициона форма.

Дефиниција 6. Нека $N = \{1, 2, ..., n\}$, $n \geq 2$ е множеството играчи. Кое било подмножество $S = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$, $0 \leq k \leq n$, од множество играчи N се нарекува *коалиција*.

Забелешка 1. Множеството играчи N, е конечно подмножество од множеството природни броеви $\mathbb{N}$, односно $N = \mathbb{N}_n$. Но, за поедноставување на понатамошните излагања, ќе користиме ознака N за множеството играчи.

Од тоа што бројот на подмножества на множеството N е 2^n, следува дека вкупниот број на коалиции кои можат да се формираат е 2^n. Да забележиме дека во разгледувањата го вклучуваме и празното множество, $\varnothing$, кое се нарекува *празна коалиција*. Множеството N е исто така коалиција, која се нарекува *гранд (голема) коалиција*.

Ќе го разгледаме следниот пример кој го илустрира овој поим за коалиции.

Пример 2. Ќе ги определиме сите коалиции од множество играчи $N = \{1, 2, 3\}$. Јасно е дека вкупниот број на коалиции е 2^3, односно 8 коалиции. Тие се: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$. Забележуваме дека, определувањето на коалиции од дадено множество играчи, е всушност определување на партитивното множество на дадено множество.

Дефиниција 7. *Коалициона форма* на игра со n играчи е дадена со подредениот пар (N,v), каде што $N=\{1,2,...,n\}$ е множеството играчи и v е функција која прима реални вредности, наречена *карактеристична функција* на играта, определена со $v:\mathcal{P}(N)\to\mathbb{R}$ и притоа ги задоволува условите:

(i). $v(\varnothing)=0$;

(ii). (суперадитивност) ако S и T се две дисјунктни коалиции $(S\cap T=\varnothing)$, тогаш $v(S)+v(T)\le v(S\cup T)$.

Големината $v(S)$ е реален број за секоја коалиција $S\subset N$ и може да се смета како вредност на коалицијата S, кога нејзините членови дејствуваат заеднички како единка. Условот (i) кажува дека празната коалиција прима вредност нула, а условот (ii) кажува дека збирот на вредностите на две дисјунктни коалиции кои дејствуваат самостојно, може да достигне вредност која не е поголема од вредноста која се добива кога двете коалиции би дејствувале заеднички како единка. Претпоставката за суперадитивноста не е дел во некои разгледувања на коалиционите игри, но се наметнува на некој начин како природен услов, па затоа го вклучуваме во дефиницијата.

Дефиниција 8. Игра во коалициона форма се нарекува *игра со константен збир* ако $v(S)+v(\overline{S})=c=v(N)$ за секоја коалиција $S\in\mathcal{P}(N)$. Играта се нарекува збир нула игра, ако $v(N)=0$.

Пример 3. Да се навратиме на Пример 1 Нека во играта се приклучи уште еден другар и добиваме игра со тројца играчи И1, И2 и И3, каде што секој од нив има по две чисти стратегии, при што ги исклучуваат зелените топчиња од играта. Притоа важи следното:

Ако првиот играч И1 ја избере чистата стратегија за бело топче $\text{Б}=(1,0)$, за И2 и И3 имаме матрица на исплата од следниот облик

$$\begin{array}{cc} & \text{И3} \\ & \begin{array}{cc} \text{Б} & \text{Ц} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{И2 Б} \\ \text{Ц} \end{array} & \begin{bmatrix} (0,3,1) & (2,1,1) \\ (4,2,3) & (1,0,0) \end{bmatrix} \end{array}$$

Ако првиот играч И1 ја избере чистата стратегија за црно топче $\text{Ц}=(0,1)$, за И2 и И3 имаме матрица на исплата од следниот облик

$$\begin{array}{cc} & \text{И3} \\ & \begin{array}{cc} \text{Б} & \text{Ц} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{И2 Б} \\ \text{Ц} \end{array} & \begin{bmatrix} (1,0,0) & (1,1,1) \\ (0,0,1) & (0,1,1) \end{bmatrix} \end{array}$$

Да ја запишеме играта од стратешка форма во коалициона форма со помош на карактеристична функција. Ќе ја определиме карактеристичната функција v на дадената игра. Од самата дефиниција за карактеристична функција на игра, имаме дека важи $v(\varnothing)=0$. Исто така, лесно е да се определи и $v(N)$, затоа што претставува најголемиот меѓу збировите на елементите во секоја од подредените тројки, дадени во условите на примерот. Максималниот збир се добива од елементот $(4,2,3)$ и е еднаков на 9, односно $v(N)=9$, каде што И1 користи Б, И2 користи Ц и И3 користи Б. За да определиме $v(\{1\})$, ја разгледуваме матрицата на исплата за коалицијата $\{\text{И1}\}$, наспроти $\{\text{И2}, \text{И3}\}$:

$$\begin{array}{cc} & \{\text{И2,И3}\} \\ & \begin{array}{cccc} \text{Б,Б} & \text{Б,Ц} & \text{Ц,Б} & \text{Ц,Ц} \end{array} \\ \begin{array}{r} \{\text{И1}\}\ \text{Б} \\ \text{Ц} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Првата ја доминира втората колона, а четвртата ја доминира третата и втората колона, па

$$v(\{1\})=V\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}.$$

За да определиме $v(\{2\})$, ја разгледуваме матрицата на исплата за коалицијата $\{И2\}$, наспроти $\{И1, И3\}$:

$$\begin{array}{cc} & \{И1,И3\} \\ & \begin{array}{cccc} Б,Б & Б,Ц & Ц,Б & Ц,Ц \end{array} \\ \{И2\} \begin{array}{c} Б \\ Ц \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Третата колона ги доминира сите останати колони на матрицата, па $v(\{2\}) = 0$.

За да определиме $v(\{3\})$, ја разгледуваме матрицата на исплата за коалицијата $\{И3\}$, наспроти $\{И1, И2\}$:

$$\begin{array}{cc} & \{И1,И2\} \\ & \begin{array}{cccc} Б,Б & Б,Ц & Ц,Б & Ц,Ц \end{array} \\ \{И3\} \begin{array}{c} Б \\ Ц \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Третата колона ги доминира првата и четвртата колона на матрицата, па $v(\{3\}) = V\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{3}{4}$.

За да определиме $v(\{1,3\})$, ја разгледуваме матрицата на исплата помеѓу коалицијата $\{И1, И3\}$, наспроти $\{И2\}$:

$$\begin{array}{cc} & \{И2\} \\ & \begin{array}{cc} Б & Ц \end{array} \\ \{И1,И3\} \begin{array}{c} Б,Б \\ Б,Ц \\ Ц,Б \\ Ц,Ц \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Втората редица ги доминира третата и четвртата редица на матрицата, па $v\left(\{1,3\}\right)=V\left(\begin{bmatrix}1 & 7\\ 3 & 1\end{bmatrix}\right)=\frac{5}{2}$.

За да определиме $v\left(\{1,2\}\right)$, ја разгледуваме матрицата на исплата за коалицијата $\{И1, И2\}$, наспроти $\{И3\}$:

$$\begin{array}{cc} & \{И3\} \\ & \begin{array}{cc} Б & Ц \end{array} \\ \{И1,И2\} \begin{array}{c} Б,Б \\ Б,Ц \\ Ц,Б \\ Ц,Ц \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Првата редица ги доминира третата и четвртата редица на матрицата, па $v\left(\{1,2\}\right)=V\left(\begin{bmatrix}3 & 3\\ 6 & 1\end{bmatrix}\right)=3$.

За да определиме $v\left(\{2,3\}\right)$, ја разгледуваме матрицата на исплата за коалицијата $\{И2, И3\}$, наспроти $\{И1\}$:

$$\begin{array}{cc} & \{И1\} \\ & \begin{array}{cc} Б & Ц \end{array} \\ \{И2,И3\} \begin{array}{c} Б,Б \\ Б,Ц \\ Ц,Б \\ Ц,Ц \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \\ 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Третата редица ја доминира првата редица, а втората редица ја доминира четвртата редица на матрицата, па $v\left(\{2,3\}\right)=V\left(\begin{bmatrix}2 & 2\\ 5 & 1\end{bmatrix}\right)=2$.

Со тоа добиваме дека карактеристичната функција на дадената игра е:

$$v(\varnothing)=0, \quad v(\{1\})=\frac{1}{2} \quad v(\{2\})=0, \quad v(\{3\})=\frac{3}{4} \quad v(\{1,2\})=3 \quad v(\{1,3\})=\frac{5}{2}, \quad v(\{2,3\})=2 \quad v(N)=9.$$

4. ВРЕДНОСТ НА ШАПЛИ

Во овој дел, разгледуваме друг пристап кон коалиционите игри со n играчи, дадени во форма на карактеристична функција. Поточно, во овој дел ќе посветиме внимание на поимот за наоѓање вредност на играта. Со овој пристап, ќе се обидеме да најдеме единствен вектор на исплата за која било игра во коалиционен облик, наречен вредност на играта. Како мера за вредноста или моќта на i-тиот играч во играта, ќе го сметаме i-тиот елемент од векторот на исплата. „Поимот за вредност" во теоријата на игри е предложен за прв пат во 1953 година од Лојд Шапли (Lloyd Shapley), [4]. Овде ја дефинираме вредноста на Шапли, а во наредниот дел ја дискутираме нејзината „мерлива моќ" во гласачкиот систем, која се нарекува Шапли – Шубик (Shapley – Shubik) индекс на моќност, [5].

За што всушност станува збор? Прво, треба да се насочат играчите да формираат гранд коалиција за да остварат највисока заедничка исплата, но проблем се повторно прашањата: „Како таа ќе биде распределена помеѓу играчите?", „Кој играч е „поважен"?" и „Што е поважно?". За таа цел, ќе му пристапиме на проблемот, аксиоматизирајќи го „поимот за правичност". Вредноста на Шапли се темели на поимот за правичност, затоа што нејзина цел е правично распоредување на заеднички достигнатата исплата, помеѓу членовите на една коалиција. Вредноста на Шапли, правичноста ја темели на следните четири аксиоми, познати како *аксиоми на Шапли* или *аксиоми за правичност* за функцијата на вредност $f(v)$:

А1. **Ефикасност:** $\sum_{i\in N} f_i(v)=v(N)$;

А2. Симетричност: Ако i и j се играчи за кои важи $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, за секоја коалиција S која не ги содржи играчите i и j, тогаш $f_i(v) = f_j(v)$.

А3. Аксиома за бескорисност: Ако i е играч за којшто важи $v(S) = v(S \cup \{i\})$, за секоја коалиција S која не го содржи играчот i, тогаш $f_i(v) = 0$.

А4. Адитивност: Ако u и v се карактеристични функции, тогаш $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

Функцијата на вредност, f, е таква што на секоја можна карактеристична функција v на игра со n играчи, доделува n-ка од реални броеви, од облик $f(v) = (f_1(v), f_2(v), ..., f_n(v))$. Овде $f_i(v)$ ја претставува вредноста на i-тиот играч во играта, зададена со карактеристична функција v. „Аксиомите на правичност“ се вклучени во функцијата f.

Аксиомата А1 укажува дека вкупната поединечна вредност на играчите е еднаква на вредноста на гранд коалицијата. Аксиомата А2 вели дека, ако карактеристичната функција е симетрична во однос на играчите i и j, тогаш вредноста која се доделува на i и j треба да биде иста. Аксиомата А3 вели дека, ако еден играч е безопасен, во смисла дека ниту придонесува за подобрување, ниту претставува закана за која било коалиција во која може да биде вклучен, тогаш неговата вредност треба да биде еднаква на нула. Аксиомата А4 е „најсилната“ аксиома од сите четири аксиоми. Аксиомата за адитивност ги поврзува вредностите на две различни игри со карактеристични функции u и v и тврди дека f е единствена функција над просторот од сите коалициони игри, [2]. Исто така, да забележиме дека, ако u и v се карактеристични функции, тогаш и $u+v$ треба да е карактеристична функција.

Во следното тврдење е определен обликот на решението на игри со пренослива корист кое ги задоволува аксиомите за ефикасност, симетричност, бескорисност и адитивност, познато како *вредност на Шапли*. Со ова тврдење е покажана и егзистенцијата на функцијата на вредност f.

Тврдење 4. ([1]) Вредноста на Шапли е дадена со $f=\left(f_1,f_2,\ldots,f_n\right)$, каде што за $i=1,2,\ldots,n$ е исполнето

$$f_i=\sum_{\substack{S\subset N\\ i\in S}}\frac{\left(|S|-1\right)!\left(n-|S|\right)!}{n!}\left(v\left(S\right)-v\left(S\setminus\{i\}\right)\right).$$

Во следното тврдење е покажана единственоста на функцијата на вредност f.

Тврдење 5. ([1]) Постои единствена функција, f, која ги задоволува аксиомите на Шапли А1 – А4.

Забелешка 2. Нека е дадено непразно множество $S\subset N$ и нека w_S претставува *специјална карактеристична функција*, дефинирана за секое $T\subset N$ на следниот начин:

$$w_S\left(T\right)=\begin{cases}1, \text{ ако } S\subset T\\ 0, \text{ поинаку}\end{cases}.$$

Сега, ќе покажеме дека секоја карактеристична функција v, може да се запише во облик $v=\sum_{S\subset N}c_S w_S$, за некои константи c_S. Нека $c_\varnothing=0$. За секое $T\subset N$, го дефинираме c_T рекурзивно во однос на бројот на елементи на T, на следниов начин

$$c_T=v\left(T\right)-\sum_{\substack{S\subset T\\ S\neq T}}c_S .$$

Исто така, применувајќи ги аксиомите на Шапли, за карактеристичната функција cw_S, к.ш. c е произволен реален број, е исполнето:

$$f_i\left(cw_S\right)=\begin{cases}\dfrac{c}{|S|},\ i\in S\\ 0,\ i\notin S\end{cases}.$$

Збирот во формулата од Тврдење 4, е збир по сите коалиции S, кои го содржат i. Величината $\left(v\left(S\right)-v\left(S\setminus\{i\}\right)\right)$, е износот за кој расте вредноста на коалицијата $S\setminus\{i\}$, кога играчот $\{i\}$ ќе стане нејзин член. За да го определиме $f_i(v)$, ги разгледуваме сите коалиции во кои е член i, ја пресметуваме вредноста на придобивката од членството на тој играч во таа коалиција, го множиме сето тоа со $\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$ и сумираме.

Интерпретацијата на формулата од Тврдење 4 е следната: да претпоставиме дека избираме произволен начин на распоредување на членовите, од вкупните $n!$ начини на распоредување. Потоа, ги вклучуваме членовите, согласно редоследот од избраниот распоред. Ако со своето вклучување, играчот i формира коалиција S, тогаш тој добива поврат во износ од $\left(v(S)-v(S\setminus\{i\})\right)$. Веројатноста за влез на играчот i во коалиција $S\setminus\{i\}$, е определена со $\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$. Именителот го претставува вкупниот број на пермутации на n - те играчи. Броителот е бројот на пермутации на $(|S|-1)$ - те членови на $S\setminus\{i\}$, вкупно $(|S|-1)!$ на број, пред да се придружи играчот i, а останатиот дел го покажува бројот на пермутации на играчите, $n-|S|$, надвор од коалиција, вкупно $(n-|S|)!$ на број. Според тоа, оваа формула ни покажува дека $f_i(v)$, е всушност просечниот износ што го добива играчот i од приклучувањето кон гранд коалицијата, ако играчите последователно ја формираат оваа коалиција по случаен редослед.

5. ШАПЛИ – ШУБИК ИНДЕКС НА МОЌНОСТ

Вредноста на Шапли има голема и важна примена во определување на моќноста на членовите во игри со гласање, односно во гласачките тела. Оваа примена е воведена од страна на Шапли и Шубик во 1954 година и е позната под името Шапли-Шубик индекс на моќност.

Играчите се членови на законодавен дом, членови на управен одбор на корпорации, членови на гласачки тела при универзитети и слично. Во вакви игри, предлогот од страна на членовите се прифаќа или се одбива. Подмножеството од множеството играчи чијшто предлог ќе биде усвоен, без надворешна помош, се нарекува победничка коалиција, а оние чиј предлог не е усвоен се нарекува губитничка коалиција. Во ваквите игри, можеме да ставиме, вредноста на победничката коалиција да биде 1, а вредноста на губитничката коалиција да биде 0. Ваквите игри се нарекуваат едноставни игри.

Дефиниција 9. Играта (N,v) е *едноставна*, ако за секоја коалиција $S \subset N$, или $v(S)=0$ или $v(S)=1$.

Во едноставните игри, коалицијата S се нарекува *победничка* коалиција, ако $v(S)=1$ и *губитничка* коалиција, ако $v(S)=0$. Според тоа, во едноставна игра, секоја коалиција е или победничка или губитничка. Од суперадитивноста на v, добиваме дека во едноставните игри секое надмножество од победничка коалиција е победничко и секое подмножество од губитничка коалиција е губитничко.

Примери за едноставни игри се:

(1) *Игри со закон на просто мнозинство*, каде што $v(S)=1$, ако $|S|>\frac{n}{2}$ и $v(S)=0$ во сите други случаи, каде $n=|N|$;

(2) *Игри со консензус*, каде што $v(S)=1$, ако $S=N$ и $v(S)=0$ во сите други случаи;

(3) *Диктаторски игри*, каде што $v(S)=1$, ако $1 \in S$ и $v(S)=0$ во сите други случаи, при тоа 1 е диктаторот.

За едноставни игри, формулата од Тврдење 4 е поедноставна, затоа што разликата $\left(v(S)-v(S\setminus\{i\})\right)$, секогаш прима вредност нула или единица. Разликата е еднаква на нула, ако $v(S)$ и $v(S\setminus\{i\})$, истовремено примаат вредност нула или единица, а е еднаква на еден во секој друг случај. Според тоа, можеме да го отстраниме изразот $\left(v(S)-v(S\setminus\{i\})\right)$ од формулата и да сумираме по коалициите S кои станувааат победник со приклучување на i и губитнички при отсуство на i. На тој начин формулата за вредноста на Шапли, односно формулата на Шапли-Шубик индексот на моќност во случај на едноставна игра ќе гласи:

$$f_i(v) = \sum_{\substack{S \text{ победник} \\ S\setminus\{i\} \text{ губитник}}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}.$$

Пример 4. Да се навратиме на Пример 3 и да ја определиме вредноста на Шапли f како поим за рационално решение на играта, откако во играта се придружи уште еден играч, односно да определиме распределба на највисоката можна добивка, најсоодветно на секој од тројцата другари. Од Примерот 3 ја имаме карактеристичната функција v на дадената игра:

$$v(\varnothing)=0 \qquad \begin{matrix} v(\{1\})=\frac{1}{2} \\ v(\{2\})=0 \\ v(\{3\})=\frac{3}{4} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} v(\{1,2\})=3 \\ v(\{1,3\})=\frac{5}{2} \\ v(\{2,3\})=2 \end{matrix} \qquad v(\{1,2,3\})=9 \ .$$

Ползувајќи го претходно изнесеното ќе ги определиме коефициентите на карактеристичната функција на вредноста на Шапли. Имаме:

$$c_{\{1\}} = v(\{1\}) = \frac{1}{2},\ c_{\{2\}} = v(\{2\}) = 0,\ c_{\{3\}} = v(\{3\}) = \frac{3}{4},$$

$$c_{\{1,2\}} = v(\{1,2\}) - c_{\{1\}} - c_{\{2\}} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$c_{\{1,3\}} = v(\{1,3\}) - c_{\{1\}} - c_{\{3\}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \text{ и}$$

$$c_{\{2,3\}} = v(\{2,3\}) - c_{\{2\}} - c_{\{3\}} = 2 - 0 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

На крајот,

$$c_N = v(N) - c_{\{1\}} - c_{\{2\}} - c_{\{3\}} - c_{\{1,2\}} - c_{\{2,3\}} - c_{\{1,3\}} = 9 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{5}{2} - \frac{5}{4} - \frac{5}{4} = \frac{11}{4}.$$

Тогаш, функцијата v можеме да ја запишеме во облик

$$v = \frac{1}{2} w_{\{1\}} + \frac{3}{4} w_{\{3\}} + \frac{5}{2} w_{\{1,2\}} + \frac{5}{4} w_{\{1,3\}} + \frac{5}{4} w_{\{2,3\}} + \frac{11}{4} w_{\{1,2,3\}} .$$

Според тоа,

$$f_1(v) = \frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \frac{11}{24} = \frac{79}{24}, \; f_2(v) = \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \frac{11}{12} = \frac{67}{24} \text{ и}$$

$$f_3(v) = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{11}{12} = \frac{70}{24}.$$

Значи, вредноста на Шапли е векторот $f = \left(\frac{79}{24}, \frac{67}{24}, \frac{70}{24} \right)$.

Пример 5. Да разгледаме друго дополнување на Пример 1. Играчите се договориле дека бојата повеќе нема важност. Во кутија ставиле 12 топчиња од кои 5 бели, 3 црни и 4 зелени топчиња. Притоа, на по едно топче од секоја боја (вкупно три) му ставиле буква со што означените топчиња добиле поголема важност, односно биле назначени како „главни“ топчиња. Играчите се договориле дека победник е оној кој во едно влечење од шест топчиња ќе ги извлече сите „главни“ топчиња. Да ја определиме моќта на секое топче во кутијата, кога топчињата би се договарале меѓусебно, на кој играч ќе му донесат победа.

Преминуваме на разгледување на важноста на секое од топчињата кои се во игра, односно ќе ја видиме интерпретацијата на Шапли – Шубик индексот на моќност. Нека со $f_A(v)$ ја означиме вредноста на Шапли за A, кој е претставник од класата на „главни“ топчиња и со $f_a(v)$ ја означиме вредноста на Шапли за *a*, кој е претставник на класата на топчиња кои не се „главни“. Затоа што разгледуваме едноставна игра и бараме да биде исполнет условот за победа, како и од аксиомата за симетричност, јасно е дека мора да важи условот $3f_A(v) + 9f_a(v) = 1$. Да ја определиме вредноста на $f_a(v)$. Коалиција која станува победничка откако ќе се придружи a, е онаа која ги содржи сите претставници од класата на „главни“ топчиња и уште двајца претставници од класата на топчиња кои не се „главни“. Според тоа, задачата се сведува на одредување на бројот на двочлени групи од претставници на класата топчиња кои не се „главни“, а тоа е бројот на комбинации со осум елементи од класа два, не сметајќи го a, па добиваме $\binom{8}{2}=\frac{8!}{2!6!}$. Според тоа и формулата на Шапли-Шубик за индексот на моќност, добиваме дека:

$$f_a(v)=\frac{5!6!}{12!}\cdot\frac{8!}{2!6!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}=0,0050505051.$$

Значи, секој од претставниците на класата со топчиња кои не се „главни“, има влијание од $0,505\%$ во победата. Ако замениме $f_a(v)=0,00505$ во равенството $3f_A(v)+9f_a(v)=1$, добиваме дека секој од претставниците на класата со „главни“ топчиња има влијание од $31,81\%$ во победата.

Примерот 5 можеме да го толкуваме од два аспекта на Шапли-Шубик индексот на моќност. Имено, првиот аспект е разгледување на играчите кои имаат поголеми ингеренции во играта или во случајов топчињата кои припаѓаат на класата „главни“ топчиња. Со самото назначување тие добиваат поголема важност и моќ во играта во однос на останатите играчи. Исто така, со тоа тие добиваат многу поголема улога во донесувањето на одредена одлука и се сметаат за вето играчи, затоа што без кој било од нив не може да се победи. Од друга страна, играчите кои не се во класата на „главни“ топчиња, имаат индекс кој е значајно помал во однос на оние кои припаѓаат во класата на „главни“ топчиња. Сепак, иако индексот е мал, без доволен број од нив, не може да се победи. Очигледно е дека, иако топчињата кои припаѓаат на класата „главни“ топчиња, имаат голема моќ, сепак немаат доволно за да донесат одредена одлука самостојно, односно тие сепак зависат од топчињата со помала моќ. Од сето ова можеме да заклучиме дека, дури и да е мало влијанието, сепак играчот од класата на топчиња кои не се „главни“ игра клучна улога во донесување на одредени одлуки. Шапли -Шубик индексот на моќност претставува една добра алатка со која едно лице како член на група, односно еден играч како член на коалиција, може да си ја одреди својата моќ во донесувањето на одуки и согласно тој индекс, да определи стратегија со која ќе го извлече максимумот од секоја ситуација.

ЛИТЕРАТУРА

[1] T. S. Ferguson, *Game theory*, Second Edition, University of California at Los Angeles, 2014.

[2] W. Saad, Z. Han, M. Debbah, A. Hjørungnes, T. Basar, *Coalitional Game Theory for Communication Networks: A Tutorial, 2009.* https://arxiv.org/pdf/0905.4057.pdf

[3] R. Serrano, *Cooperative games: Core and Shapley Value*, in Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer, Berlin, 2009. http://www.brown.edu/Departments/Economics/Faculty/serrano/pdfs/2008ECSS.pdf

[4] L. S. Shapley, *A value for n-person games*, Annals of Mathematics Studies 28 (1953), 307-317.

[5] L. S. Shapley, M. Shubik, *A method for evaluating the distribution of power in a committee system*, The American Political Science Review 48 (3) (1954), 787-792.

[6] S. Stahl, *A Gentle Introduction to game theory*, Mathematical World, Volume 13, American Mathematical Society, 1999.

1 Државен завод за статистика
ул. „Даме Груев“ бр.4, Скопје, Р.Македонија
e-mail: stevogorgiev@gmail.com

Примен: 06. 01. 2019
Поправен: 13. 05. 2019
Одобрен: 05. 06. 2019
Објавен на интернет: 7.06.2019