МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 2 (2017), 147 – 169

МАТЕМАТИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ И ЗАДАЧИ НА ФЕРМИ ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Билјана Шуминоска [1]
Ирена Стојковска [2]

Математичкото моделирање е превод на реалноста во математика и обратно. Под поимот реалност мислиме на онаа според Полак, *„остатокот од светот*" настрана од математиката, влучувајќи ја природата, општеството, секојдневниот живот и другите научни дисциплини ([4]). *Математичко моделирањ*е е активност која ни овозможува да дадеме математички модел на зададена ситуација од секојдневниот живот. Нејзиното решение ни дава подобра слика и разбирање на оригиналната ситуација. Од друга страна, реалната ситуација може да дозволи и креирање на повеќе математички модели кои ја опишуваат „подеднакво добро".

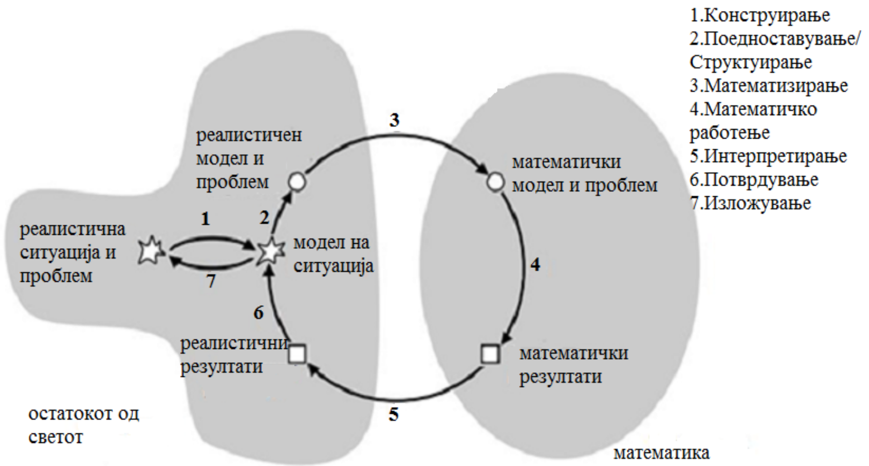
Математичкото моделирање во наставата по математика помага за развивање на креативноста, истражувачкиот дух, помага при суштинското разбирање на интеракцијата меѓу математиката и реалноста, но и за вежбање на предвидувачките способности на учениците. Задачи кои се решаваат со математичко моделирање и со кои може да се вежбаат и предвидувачките способности, се задачите на Ферми, именувани според нобеловецот Енрико Ферми. Овие задачи најчесто подразбираат правење проценки за одредена величина. Карактеристично за овие задачи е што при нивното решавање се бараат длабоки математички и логички вештини, а се бара и критичко размислување, искуство од животот, како и способност да се раздробат посложените задачи на помали дискретни, решливи делови.

Но, колку нашите наставници по математика се запознаени со математичкото моделирање и неговите придобивки за наставата по математика? Во продолжение, најнапред ќе го дефинираме попрецизно поимот математичко моделирање, ќе изложиме дел од резултатите од спроведената анкета за тоа како нашите наставници го разбираат математичкото моделирање. Потоа, ќе се осврнеме на разликата меѓу традиционалното решавање на проблемски задачи и математичкото моделирање. На крајот, низ конкретни примери и резултати од спроведените истражувања, ќе ја илустрираме примената на математичкото моделирање во наставата по математика преку решавање задачи на Ферми.

1. Математичкото моделирање во наставата по математика

Постојат онолку дефиниции за математичкото моделирање колку што има и автори кои пишуваат за него, а и годишниот број публикации, записи, изданија за математичкото моделирање, непрекинато се зголемува. Со тоа се добива впечаток дека не постои одреден конечен број чекори за решавање на една задача со математичко моделирање.

На Слика 1 е претставен најшироко прифатениот модел на процесот на математичкото моделирање заедно со неговите седум чекори ([2]).



Слика 1. Циклус на математичко моделирање, според Блум, [2]

Ќе го илустрираме циклусот на математичко моделирање и неговите чекори прикажан на Слика 1 преку следниот пример ([2]).

Пример 1. *Г-ѓа Стоун живее во Триер, на 20km оддалеченост од границата со Луксембург. За да го наполни својот Фолсфаген Голф таа вози до Луксембург каде што веднаш после границата има бензинска станица. Таму треба да плати 1,10 евра за литар гориво, додека пак во Триер треба да плати 1,35 евра. Дали вреди г-ѓата Стоун да вози до Луксембург?*

Прво, проблемската ситуација во Пример 1 треба да биде сфатена од оној што ќе го решава проблемот, т.е. дека треба да се конструира *ситуациски модел*. Потоа ситуацијата треба да биде поедноставена, структуирана и прецизирана, водејќи кон *реалниот модел* на ситуацијата. Поточно, решавачот на проблемот мора да дефинира што е тоа „што вреди". Вообичаено, кај ваквиот тип проблеми, ова значи само ,,минимизирање на трошоците за полнење и возење". Математизирањето го трансформира реалниот модел во *математички модел* кој се состои од одредени равенки. Математичкото работење (сметање, решавање равенки итн.) дава *математички резултати*, кои во реалниот свет се интерпетираат како *реални резултати*, а кои завршуваат со препорака за г-ѓа Стоун. Важно е да се напомене, дека при следењето на чекорите во процесот на математичко моделирање, често се случува тие да се повторуваат и испреплетуваат додека да се добие реален резултат. Но, исто така, потврдувањето на добиениот резултат може да покаже дека е потребно по вторпат да се помине циклусот, на пример, за да се земат предвид повеќе фактори како што се времето или загадувањето на воздухот (како влијае времето кое г-ѓа Стоун ќе го потроши на патување за да наполни гориво за пониски цени или загадувањето на воздухот при возење на возилото до Луксембург и назад и колку овие фактори ќе влијаат на одлуката). Во зависност од тоа кои фактори се земени, за дадената реална ситуација може да бидат конструирани различни математички модели, па препораките за г-ѓа Стоун може да бидат различни. Ќе дадеме пример за два математички модела и соодветни препораки за г-ѓа Стоун.

Првиот модел ги зема предвид само трошоците за полнење и возење. Со p да ја означиме потрошувачката на гориво на автомобилот на г-ѓа Стоун (во литри на километар). Тогаш, во еден правец автомобилот ќе потроши $20 \cdot p$ литри гориво, што значи дека патот од Триер до Луксембург и назад, во најлош случај, г-ѓа Стоун ќе ја чини $20 \cdot p \cdot 1{,}35 + 20 \cdot p \cdot 1{,}10 = 49 \cdot p$ евра (доколку сметаме дека за патот од Триер до Луксембург таа користи гориво купено во Триер по повисока цена). Да го означиме со g количеството гориво (во литри) кое г-ѓа Стоун ќе го наполни во Луксембург. Со купувањето гориво по пониска цена г-ѓа Стоун заштедува $(1{,}35\text{-}1{,}10) \cdot g = 0{,}25 \cdot g$ евра. Значи, патувањето до Луксембург за да се наполни гориво, вреди само ако нема загуба т.е. ако $0,25 \cdot g - 49 \cdot p \geq 0$, што претставува математички модел за дадената ситуација. Па, при потрошувачката на гориво на автомобилот од 5 литри на 100 km, односно $p = 0,05$ литри на km, полнењето на гориво од Луксембург вреди само ако се наполни количина на гориво $g \geq \frac{49 \cdot 0,05}{0,25} = 9,8$ литри.

За вториот модел, како дополнетелен фактор, ќе го земеме предвид времето потрошено за патување и трошокот кој со себе го носи потрошеното време. Нека t е времето потребно г-ѓа Стоун да оди и да се врати од Луксембург за да наполни гориво во својот автомобил. Нека c е цената (во евра) на г-ѓа Стоун за еден час што влегува во вкупниот трошок. Доколку г-ѓа Стоун оди да полни гориво за време на работното време, c ќе биде цента во евра што таа ја заработува на своето работно место. Тогаш, патувањето до Луксембург ќе биде исплатливо доколку $0,25 \cdot g - 49 \cdot p - c \cdot t \geq 0$, што претставува друг математички модел за истата ситуација. Па, при иста потрошувачка на гориво на автомобилот од $p = 0,05$ литри на 1 km, време $t = 0,5$ часа и цена $c = 10$ евра за час, патувањето до Луксембург вреди само ако се наполни гориво $g \geq \frac{49 \cdot 0,05 + 10 \cdot 0,5}{0,25} = 29,8$ литри. Добиениот резултат од овој модел, долната граница од скоро 30 литри гориво, налага дополнителни разгледувања на моделот, од причини што во реалноста резервоарите на автомобилите имаат ограничен капацитет. Нека $g_{\max}$ е капацитетот на резервоарот на автомобилот. Тогаш, при капацитет на резервоарот од $g_{\max} = 55$ литри, патувањето за гориво до Луксембург вреди, само ако цената на г-ѓа Стоун е најмногу

$$c \leq c_{\max} = \frac{0,25 \cdot g_{\max} - 49 \cdot p}{t} = \frac{0,25 \cdot 55 - 49 \cdot 0,05}{0,5} = 22,6 \text{ евра за час,}$$

со дополнителен услов г-ѓа Стоун да пристигне во Луксембург со наполно празен резервоар и таму да го наполни целиот резервоар.

И двата модела ја опишуваат истата реалност „подеднакво добро“: различни се заради различните реални модели за ист ситуациски модел, заради различните фактори, земени за разгледување, а кои влијаат на одлуката. Ако се земе предвид и амортизацијата на возилото, се добива сосема нов модел; ако дополнително се разгледа загадувањето на околината од издувните гасови на автомобилот, се добива уште еден модел, итн.

Оваа разновидност на математички модели за иста реалност може да биде искористена за развивање на логичкото расудување, креативноста и истражувачкиот дух кај учениците. При составувањето на математичкиот модел врз основа на реалниот модел и неговото решавање (воведување променливи и примена на математички структури и законитости, па дури и развивање на нови структури) се увежбува и утврдува веќе изучениот материјал, но може и да се изучува и усвојува нов материјал по пат на истражување. И како последно, но подеднакво важно, математичкото моделирање ја истакнува интердисциплинарната природа на математиката, нејзината корисност за развојот на науките и нејзината применливост во секојдневниот живот, што доведува до зголемување на мотивацијата за изучување на овој наставен предмет.

1.1. АНКЕТА: КАКО НАШИТЕ НАСТАВНИЦИ ГО РАЗБИРААТ МАТЕМАТИЧКОТО МОДЕЛИРАЊЕ?

Како наставници имаме моќ, имаме сила и знаење што може да се употреби на начин кој ќе внесе разлика во учењето на нашите ученици. Можеме да ги користиме снаодливоста, пред се знаењето и вештините за да ги поттикниме учениците, да им дадеме одврзани раце, да им дадеме слобода при решавањето задачи од најразлична природа. Можеме да ги употребиме посветеноста и мотивацијата, за да ги компензираме слабостите на секое училиште во немањето доволно средства за целосна реализација на иновативни и современи методи на часовите по математика меѓу кои и недоволната застапеност на математичкото моделирање и во самите наставни програми.

Овде ќе презентираме дел од анкетата која ја спроведовме за да увидиме колку нашите наставници се запознаени со поимот математичко моделирање. Беа анкетирани 32 наставници по математика од нашата држава, во текот на март 2016 година. Секој наставник требаше да одговори на 8 прашања, со избор на еден од понудени неколку одговори. Овде ги излагаме само прашањата. Детален опис на секое прашање, понудените одговори и детални резултати од анкетата може да се најдат во [5].

Прашање 1. „Дали ви е познат поимот математичко моделирање?“

Прашање 2. „Доколку знаете што е тоа математичко моделирање, дали го користите во наставата и колку?“

Прашање 3. „Дали при решавањето на задачите со математичко моделирање, ученикот може да има повеќе решенија на задачата?“

Прашање 4. „Каков е процесот на математичко моделирање?“

Прашање 5. „При формирање на математичкиот модел, за решавање задача со математичко моделирање, кои чекори од понудените во анкетниот лист ги користи ученикот?“

Прашање 6. „Дали познавате некои колеги кои математичкото моделирање го користат во текот на наставата и во која област?“

Прашање 7. „Каде во наставните планови и програми по предметот математика се бара да се работи математичко моделирање?“

Прашање 8. „Колку нашата програма дозволува наставникот да примени некој нов метод за време на часовите?“

Табела 1: Одговори на наставниците на Прашање 1.
„Дали ви е познат поимот математичко моделирање?“

	Честоти	**Проценти (%)**
а) Не	5	15,625
б) Не, само сум го слушнал поимот, но не ми е познат	12	37,5
в) Да, познат ми е, ама не го практикувам во наставата	7	21,875
г) Да, познат ми е и го практикувам во наставата	8	25

Во Табела 1 се дадени одговорите на наставниците на првото прашање. Од одговорите може да се види дека само 25% од анкетираните наставници одговориле дека знаат што е и го практикуваат во наставата математичкото моделирање, со цел да го доближат, да го поедностават материјалот кои го предаваат на учениците, додека на

21,875% од наставниците им е познат тој поим, но не го практикуваат во наставата, од причини што немаат услови за спроведување на математичкото моделирање во наставата. Да забележиме дека на останатите 53,125% или на 17 од анкетирани 32 наставника не им е познат поимот математичко моделирање. Овие 17 наставници не одговараа на следните шест прашања, а на последното прашање одговаа сите наставници. Токму фактот дека на нешто повеќе од половина од анкетираните наставници не им е познато значењето на поимот математичко моделирање, ја зголемува потребата од активности за информирање на наставниците за можноста за примена на математичкото моделирање во наставата по математика.

Одговорите на второто прашање го потврдија ставот на наставниците дека примената на математичкото моделирање во наставата најмногу зависи од немањето услови и средства за таков тип настава, бидејќи најголем дел од нив (60% или 9 од 15) одговорија дека го применуваат, но само за некои поголеми наставни целини.

Следните три прашања (3, 4 и 5) имаа цел да проверат колку од наставниците кои одговорија дека им е познат поимот математичко моделирање, навистина владеат со значењето на овој поим. Во Табела 2 се дадени одговорите на третото прашање кое се однесува на бројноста на решенијата на задачата со математичко моделирање. Од одговорите на ова прашање (80% од наставниците одговорија дека се можни повеќе решенија само ако наставникот тоа го бара или ако има претходно опишана ситуација во задачата), согледуваме дека наставниците ја условуваат бројноста на решенијата (математичките модели) на една задача која се решава со математичко моделирање.

Табела 2. Одговори на наставниците на Прашање 3. „Дали при решавањето на задачите со математичко моделирање ученикот може да има повеќе решенија на задачата?“

	Честоти	**Проценти (%)**
а) Не	1	6,67
б) Да	2	13,33
в) Да, но само во претходно опишана ситуација во дадена задача	7	46,67
г) Да, но само доколку наставникот го бара тоа од него	5	33,33

Заклучокот е дека наставниците имаат потреба од дополнително информирање за природата и начинот на практикување на математичкото моделирање на часовите по математика. Имено, во задачите кои се решаваат со математичко моделирање нема опишани ситуации, туку во зависност од направените претпоставки при формирање на ситуацискиот модел и неговото претставување со реален модел (види Слика 1) може да се конструираат повеќе математички модели, и следствено задачата да има повеќе решенија. Потоа, правилното спроведување на математичкото моделирање на часовите по математика, подразбира ученикот да биде под надзор на наставникот, но при решавањето, претставувањето на решенијата да биде целосно независен, што значи наставникот не смее да ја ограничи бројноста на математичките модели.

Претходно видовме (Слика 1) дека процесот на математичко моделирање е цикличен, чекорите не мора да се извршуваат секогаш по однапред предвиден редослед, може да се повторуваат, испреплетуваат. Но, само 2 од 15 наставника одговорија точно на четвртото прашање за природата на процесот на математичко моделирање, а најголемиот дел од наставниците (10 од 15) одговорија точно на петтото прашање за чекорите на процесот на математичко моделирање (ја избраа опцијата „сите претходно наведени чекори").

Одговорите на последните три прашања од анкетата и разговорите со наставниците, го отсликаа нивниот став за моменталната состојба со изведувањето на наставата по математика во нашите училишта. Имено, наставниците се изјаснија дека во наставните планови и програми доминира излагачкиот метод, „предавањето е раскажување", има малку конкректни и практични активности и дека се учи за оценка. Меѓутоа, дури и да покажат подготвеност и желба да применат нови методи како што е математичкото моделирање, училниците не се адаптирани за ваков тип на предавања и должината на наставните часови е прекратка, за да може ефикасно да се реализира час со примена на математичко моделирање.

Мора да нагласиме дека при самото спроведување на анкетниот лист како и во самиот разговор со наставниците, се доби впечаток дека и оние наставници кои мислат дека знаат што е тоа математичко моделирање, всушност често го мешаат традиционалното решавање проблемски задачи со математичкото моделирање. Ова јасно ја истакнува потребата од разграничување на овие два начина на решавање задачи.

1.2. РАЗЛИКА МЕЃУ ТРАДИЦИОНАЛНОТО РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМСКИ ЗАДАЧИ И МАТЕМАТИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ

Во Табелата 3, кратко, но прецизно е објасната споредбата меѓу традиционалното решавање проблемски задачи и математичкото моделирање, ([3]).

Табела 3. Споредба меѓу традиционалното решавање на проблемски задачи и математичкото моделирање ([3]).

Традиционално решавање на проблемски задачи	**Математичко моделирање**
Донесување заклучоци врз основа на податоци.	Повеќе циклуси, различни толкувања.
Задачата е идеализирана ситуција од секојдневниот живот.	Задача со автентична содржина од секојдневниот живот.
Од учениците се очекува да користат научени структури како што се формули, алгоритми, стратегии, математички идеи.	Учениците поминуваат низ фазите на развивање, проверување и поправање на важни математички идеи и структури.
Нагласена е индивидуалната работа.	Нагласена е групната работа (социјална интеракција, размена на математички идеи).
Одделено од реалниот живот.	Интердисциплинарност.
Од учениците се очекува да им дадат значење на математичките симболи и структури.	Учениците се обидуваат математички да ги опишат ситуациите од секојдневниот живот кои имаат значење.
Подучување специфични стратегии за решавање на задачи (на пр. развивање единствен пристап) кои потоа можат да се пренесуваат на слични задачи.	Отворени и бројни стратегии за решавање на задачи, свесно развиени од страна на учениците во согласност со спецификациите на задачата.
Единствен точен одговор.	Возможен е повеќе од еден одговор (повеќе математички модели).

2. ЗАДАЧИ НА ФЕРМИ

Математичкото моделирање може да се практикува и на поинаков вид задачи од реалните проблемски задачи, а тоа се задачите во кои се бара да се направат проценки – познати како задачи на Ферми. Постојат мал број истражувања во областа на математичко моделирање со задачи на Ферми, и овие истражувања се главно предводени од Јонас Бергман Арлебек (Jonas Bergman Ärlebäck) ([1]). Да видиме за каков тип задачи станува збор.

Задачите на Ферми, името го добиле во чест на нобеловецот Енрико Ферми (1901 – 1954). Тој бил италијански физичар кој направил многу откритија во нуклеарната физика и квантната механика. Како еден од најголемите научници на XX век бил познат по тоа што бил необичен во својата работа, одличен експерименталист, извонреден теоретичар и бил многу добар во наоѓање едноставни решенија за тешки проблеми.

Во 1938 година, тој ја добил Нобеловата награда за физика за откритието на нуклеарните реакции предизвикани од бавни неутрони. Овој механизам доведе директно до развој на атомските бомби и нуклеарната фисија. По добивањето на Нобеловата награда, Ферми емигрирал со своето семејство во САД за да побегне од фашистичкиот режим на Бенито Мусолини, каде што почнал да работи за проектот „Менхетен“ – проект за време на Втората светска војна за производство на нуклеарно оружје. Ферми бил познат по правењето добри оценки засновани на малку информации. Тој ја покажал оваа своја вештина во времето на првата експлозија на нуклеарна бомба, северно од Аламогордо, во 1945 година. Пред да детонира бомбата, Ферми искинал лист хартија на мали парченца. Како што бранот од експлозијата се наближувал, тој ги фрлил парченцата хартија над својата глава. Тие паѓале надолу и слетале околу два и пол јарди ($2{,}286\ m$) зад него, подалеку од растечкиот облак во форма на печурка. Врз основа на ова, тој брзо пресметал дека енергијата на бомбата била еквивалентна на онаа произведена од десет килотони ТНТ. Подоцнежните анализи на податоци собрани од софистицирани инструменти на самото место, ја потврдиле неговата проценка. Иако биле сугерирани и други можни методи за вакво предвидување, никој не знае за сигурно како Ферми го направил тоа.

Во обид да ја пренесе оваа вештина на своите студенти, Ферми развил еден вид на прашања, кои биле именувани како „Фермиеви прашања“ или „задачи на Ферми“. Овој тип задачи има карактеристична природа. При самото слушање, никој нема идеја каков може да биде одговорот и има чувство дека постојат многу малку информации за да се дојде до решението. Сепак, кога задачата ќе се подели на помали делчиња (помали подзадачи), може да се очекува да се направи проценка која забележително се доближува до точното решение. Со следниот пример ќе илустрираме решавање на едно такво Фермиево прашање.

Пример 2. *Колку изнесува обемот на земјата, ако се знае дека растојанието помеѓу Њујорк и Лос Анџелес е околу три илјади милји (4828 km), и дека временската разлика помеѓу двата брега е околу три часа?*

При решавањето на овој пример, може да се размислува вака: три часа одговара на една осмина од еден ден, а еден ден е времето потребно за една целосна земјина ротација. Па, тоа нè наведува да процениме дека обемот на земјата е осум пати поголем од растојанието помеѓу Њујорк и Лос Анџелес, или околу дваесет и четири илјади милји, што е многу блиску до точниот одговор. Имено, на екваторот обемот на Земјата е 24 902 милји = $40\ 074\ km$.

Најчесто Фермиевите прашања се задаваат без скоро ниедна дополнителна информација, или како во случајот со Пример 2, прашањето да биде само „Колку изнесува обемот на земјата?“ Понекогаш прашањата може да изгледаат чудно. На пример, „Колку пијано штимери има во Ново Мексико/Ел Пасо?“ За вака зададено прашање, не постои стандардно решение, секој може да направи претпоставки кои брзо доведуваат до приближно точен одговор. На пример, може да се земе вкупното население, да се претпостави дека просечно семејство се состои од четири лица, а една петтина од сите семејства поседуваат пијано. Ако пијаното се штима на секои пет години, ќе се процени колку има штимања во една година. Ако секој штимер може да сервисира четири пијана на ден, 250 работни дена во годината, тоа значи 1000 штимања годишно. Од ова може да се процени бројот на пијано штимери. Потоа, за проверка може да се погледне под „пијано штимери“ во „жолтите страници“.

Некој би можел да ги оспорува заклучоците направени на овој начин, но крајните проценки не може многу да отстапуваат од точната вредност, да бидат премали или преголеми. Направените отстапувања при приближувањата во меѓучекорите подлежат на рамномерна распределба, па на крајот се урамнотежуваат и затоа добиените крајни проценки се приближно точни.

Во продолжение ви предлагаме неколку Фермиеви прашања (повеќе вакви прашања може да се најдат на интернет страницата [6]):

- Колку атоми железо има во една шпенадла?
- За колку ќе се намали отпадот по депониите, ако се забрани фрлање на пластичните кеси?
- Колку луѓе умираат секој ден во целиот свет?
- Ако се возите од Скопје до Охрид, колку метри возите со затворени очи поради трепкање?
- Колку кади можат да се наполнат со вкупната количина течност која човекот ја внесува во текот на целиот живот?

а. ИСТРАЖУВАЊЕ: МОДЕЛИРАЊЕ НА ЗАДАЧА НА ФЕРМИ „ТЕЛЕФОНСКИ РАЗГОВОРИ“

Водени од идејата на Арлебек дека задачите на Ферми можат да се искористат за практикување на математичкото моделирање во наставата по математика ([1]), во текот на март 2016 година, спроведовме неколку истражувања со групи ученици кои решаваа задачи на Ферми. Во продолжение ќе ги презентираме резултатите од едно од истражувањата ([5]).

За ова истражување, беа формирани две групи од по три ученици од трета година од гимназијата „Св. Климент Охридски“ во Охрид. Учениците и во двете групи беа со одличен успех по предметот математика. Истражувањето беше спроведено во Едукативниот центар „Абакус Ниб - Охрид“ во Охрид.

Двете групи работеа независно во два различни временски континуирани периоди од еден час и решаваа иста задача на Ферми. Притоа, имаа 5 до 15 минути за подготовтка (читање на упатството) и 20 минути до 1 час за решавање на задачата. Материјали кои можеа да ги користат беа: хартија, молив или пенкало, прирачници (по потреба), соодветни инструменти за мерење (по потреба), соодветна опрема за собирање на експерименталните докази (по потреба), пристап до интернет (по потреба). Работата на групите беше надгледувана од претходно обучени наставници кои имаа улога на олеснувачи, кои требааа да ги мотивираат, охрабрат учениците да ги споделат своите идеи, да бидат креативни при решавањето, слободно да дискутираат меѓу себе и сето тоа под надзор на наставникот одговорен за соодветната група.

На даден празен лист, учениците го запишуваа името на групата и неговите членови. Потоа, ги запишуваа заеднички донесените одговори на прашањата од листот хартија, даден во прилог на задачата. Прашањата ги насочуваа учениците во процесот на моделирање на дадената задача на Ферми. Упатствата беа:

Чекор 1. Прочитајте го проблемот, размислете што точно се бара, дискутирајте како го разбирате проблемот и запишете го вашето толкување на проблемот. (Разбирање на задачата)

Чекор 2. Запишете одговор на прашањето без математички пресметки. (Нематематичко погодување)

Чекор 3. Наведете ги информациите кои сметате дека ви се потребни за да дадете попрецизен одговор на поставеното прашање. Дадете проценка на секоја величина која сметате дека ви е потребна при решавањето на задачата. Врз основа на тие проценки, кој е вашиот одговор на прашањето? Запишете ги сите чекори при решавањето, запишете објаснување за секој чекор зошто сте го користеле. (Математички пресметки)

Чекор 4. Одберете имиња на променливи за секоја добиена вредност што сметате дека ви се потребни за решавање на задачата. Запишете низа од формули или постапка со која се објаснува како сте ги искористиле величините за да дојдете до решението. (Променливи и формули - математички модел)

Чекор 5. Ако увидите дека е потребно, може да реализирате експерименти, кратки истражувања, мерења или пребарувања информации, за да добиете попрецизна проценка. За секоја величина, претпоставете најмала и најголема вредност и вредност која сметате дека е најверојатна. Потоа со помош на формулата која сте ја формирале во Чекор 4, пресметајте ја најмалата, најголемата и најверојатната вредност како одговор на задачата на Ферми. (Собирање повеќе податоци.)

Чекор 6. Запишете го конечниот одговор на поставената задача. Забележете некои можни грешки во текот на вашата постапка. Наведете некои интересни факти кои ги научивте додека го баравте одговорот на прашањето. Дадете понатамошни насоки како би моделе да го проширите вашето истражување во однос на поставената задача на Ферми. (Заклучоци)

На двете групи им беше зададена иста задача на Ферми:

Задача. *„Колку луѓе во светот разговараат на мобилен телефон во исто време?“*

Работата на групите ќе ја анализираме разгледувајќи ги четирите фази на решавање на задачата: опис, проценки, пресметувања и валидизација, при што ќе укажеме кои чекори од упатството во која од фазите беа присутни. Иако не беше напоменато дека шесте чекори наведени во упатството не е задолжително да се реализираат последователно, т.е. линеарно, како што ќе видиме, учениците неколку пати се навраќаа на веќе поминат чекор, со што се потврдува цикличната природа на процесот на математичко моделирање и при моделирање на задачи на Ферми. Првата група е означена со Г1, а втората група со Г2. Учениците во првата група се означени со А1, А2, А3, а учениците од втората група се означени со Б1, Б2, Б3. Подетална анализа на фазите при решавање на задачата може да најдете во [5].

Фаза 1: Опис

Присутни чекори: *разбирање, нематематичко погодување и математички пресметки.*

Учениците во двете групи го читаа прашањето, разговараа и без никакви пресметки групата Г1 даде погодување дека 70 милиони луѓе разговараат во исто време на мобилен телефон, додека групата Г2 даде погодување дека тоа се 500 милиони луѓе.

И двете групи имаа сличен пристап при разбирањето на задачата на Ферми. Тие размислуваа заедно за целите кои треба да ги постигнат и дискутираа за тоа што го знаат (или не го знаат) за величините за кои заклучија дека им се потребни при решавање на проблемот. Потоа почнаа да дефинираат неопходни помали подзадачи. И двете групи прво заклучија дека треба да знаат колку луѓе има во светот. Но, во дискусијата која следеше, Г1 се потпираше повеќе на лични искуства, додека Г2 го анализираа проблемот пообјективно, земајќи предвид различни часовни зони и временски период во кој претпоставуваа дека луѓето се најактивни. Да забележиме дека, во ова почетна фаза и двете групи почнаа со користење на поимот веројатност.

Фаза 2: Проценки

Присутни чекори: *математички пресметки и собирање повеќе податоци.*

Учениците откако ги забележаа помалите задачи кои треба да ги решат за да одговорат на прашањето, преминаа на поставување проценки за вредностите на величините кои сметаа дека им се неопходни и кои во следната фаза на пресметки ќе ги доведе до одговори на прашањето на дадената задача.

Забележавме дека и двете групи имаа добри проценки кои им се поклопуваа што се однесува на првиот помал проблем на задачата, вкупниот број на жители во светот, додека кога станува збор за проценување на величините, како дел од денот поминат во разговор на мобилен телефон, или колку луѓе во светот користат мобилен телефон, нивните размислувања беа потполно различни. Првата група поаѓаше од личното искуство, додека втората група воопшто не се потпираше на искуството туку на објективни причини зошто луѓето во даден момент би биле активни на мобилен телефон. Ова е дел од дискусијата:

Г1

А2: *Јас мислам дека дневно разговарам на мобилен телефон околу 45 минути.*

А3: *Што значи тоа?*

А2: *За 24 часа, тоа се 24*60 = 1440 минути. Значи шансата во еден момент да разговарам на мобилен е околу 45/1440.*

Г2

Б3: *Луѓето кои се на работа најмногу користат телефон, односно 8 часа, тоа е скоро пола ден. Значи корисиници на телефон се половина од тие кои би имале можност да се на телефон.*

Б1: *Јас мислам дека само 20% до 30% од овие корисници на телефон во ист момент разговараат.*

Б2: *Можеби подобро би било да разгледуваме дека во просек минуваме 12 минути во разговор дневно и оттаму би заклучиле* *колкава е веројатноста од сите активни корисници на телефон да разговараат во ист момент.*

Повторно можеме да забележиме дека и во оваа фаза учениците го користат терминот веројатност (првата група го спомнуваше како шанса).

Фаза 3: Пресметувања

Присутни чекори: *математички пресметки и променливи и формули*.

Во оваа фаза, и двете групи применуваа математички пресметувања, а потоа воведуваа променливи и изведуваа формули со што формираа математичко модел за зададената задача на Ферми. Врз основа на математичките пресметки првата група Г1 доби дека приближно 151 909 луѓе разговараат истовремено на мобилен телефон, додека втората група Г2 доби дека тој број е приближно еднаков на 14 166 166 луѓе. Двете групи добија резултати кои многу отстапуваат, но да видиме зошто.

Г1

Ова се променливите и формулите кои ги забележаа во својот работен лист учениците од првата група:

p – просек на времетраење на телефонски разговори во еден ден

md – минути во денот

z – луѓе кои имат мобилен телефон

l – луѓе кои во една минута разговараат

o - однос

B - решение

Па, математичкиот модел кој го формираа е:

$$o=\frac{p}{md},\ l=o\cdot z,\ B=\frac{l}{md}. \qquad (1)$$

За да го добијат одговорот дека приближно 151 909 луѓе разговараат истовремено на мобилен телефон, тие претходно ги имаа искористено следните вредности за величините кои подоцна ги воведоа: $p=45$ минути, $md=1440$ минути и $z=7000000000$ луѓе.

Г2

Променливите и формулите кои ги забележаа во работниот лист учениците од втората група се:

L – вкупен број луѓе
L_k – корисници на телефон
L_A – активни во моментот согласно временските зони
D – активни согласно работно време
P_V – просечно време на разговарање на ден
V_m – веројатноста да се зборува во даден момент
V_R – разговори на ден
V_t – времетраење на разговор
R – решение
Математичкиот модел кој го формира оваа група е:

$$P_V = V_R \cdot V_t, \quad V_m = \frac{P_V}{24 \cdot 60}, \quad L_A = 60\% L_K,$$

$$D = \frac{L_A}{2}, \qquad R = D \cdot V_m. \tag{2}$$

За да добијат одговор дека приближно 14 166 166 луѓе разговараат истовремено на мобилен телефон, тие ги имаа искористено следните вредности за променливите кои подоцна ги воведоа: $L_K = 6000000000$ луѓе и $P_V = 12$ минути.

Може да се забележи дека и во двата понудени модела клучна улога имаат бројот на корисници на мобилни телефони и времето поминато во разговор на еден корисник во текот на еден ден. Разликата е во начинот на кој овие величини се проценети или и за нив е предложена формула, како што направи втората група Г2. Големото отстапување во резултатите на двете групи се должи на логичката грешката во моделот на првата група Г1, повторното делење со минутите во денот (md). Впрочем, во нивниот модел, l е величината која се однесува на бројот на луѓе кои истовремено разговараат на мобилен телефон.

Зошто учениците при решавањето на задачата го користеа терминот веројатност? Одговорот на ова прашање би бил дека токму во тој период кога ја решаваа оваа задача, на училиште ја изучуваа таа наставна единица. Веројатноста во нивното размислување, може да се замени со дел од цело, што и во случајот на класична дефиниција на веројатниост може да се поистовети.

Фаза 4: Валидизација

Присутни чекори: *собирање повеќе податоци и заклучоци*.

И двете групи во оваа фаза со пребарување информации на интернет пронајдоа попрецизни вредности за вкупниот број на претплатници на мобилни телефони во светот и просечното време кое луѓето го поминуваат во разговор на мобилен телефон во текот на еден ден. По одредувањето на најдобриот одговор на прашањето согласно моделот кој го добија и податоците кои ги пронајдоа на интернет (првата група Г1 доби 295 139 луѓе, а втората група Г2 доби дека 114 750 000 луѓе разговараат истовремено на мобилен телефон), учениците направија проценки за најмалата и најголемата вредност на одговорот на дадената задача.

Г1

А1: *Ако претпоставиме дека сите луѓе во светот, а тоа согласно податоцибе од интернет се 7 125 000 000 се корисници на мобилни телефони, тогаш најмногу 309 245 луѓе истовремено разговараат на мобилни телефони.*

А2*: Ако претпоставиме дека само 6 милијарди луѓе се корисници на мобилни телефони, тогаш најмалку 260 416 луѓе истовремено разговараат на мобилни телефони.*

Г2

Б2: *Најмала вредност е кога вредноста за просечното време за разговор е минимум, пример 5 минути, па тогаш најмалку 7 083 333 луѓе истовремено разговараат на мобилни телефони. А најголема вредност е кога вредноста за просечнотот време за разговор е максимум, пример 180 минути, па тогаш најмногу 255 000 000 луѓе истовремено разговараат на мобилни телефони.*

Повторно, големото отстапување меѓу одговорите на двете групи, се должи на моделот (1) на првата група Г1, односно непотребното делење по втор пат со минутите во денот (md).

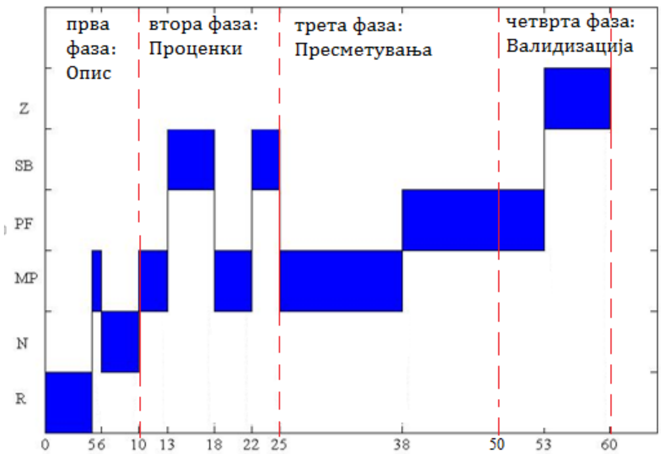
Во оваа фаза на решавање на задачата. учениците ги посочија како корисни следниве заклучоци (добиени како резултат на собирањето дополнителни податоци):

– првата група наведе дека повеќе луѓе во светот имаат телефони, во однос на шпорети во своите домови, и тоа 6,8 милијарди наспроти 4,5 милијарди;

– втората група наведе дека во една минута се кажуваат 150 збора на телефон, па просечен разговор има 450 збора, го наведоа и тоа дека жените кажуваат 13 000 збора повеќе на телефон, на ден, во однос на мажите.

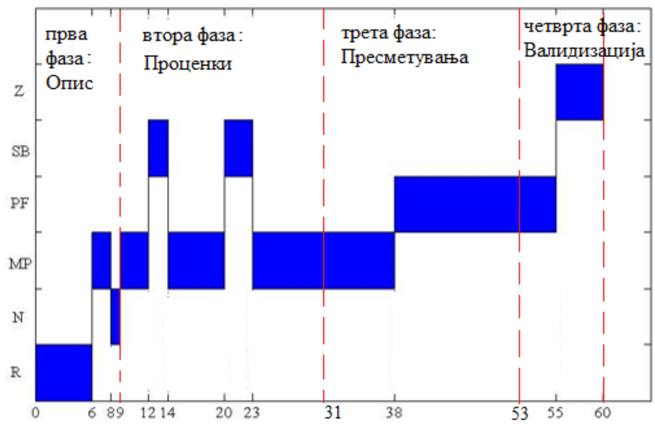
Ваквите заклучоци и слични на нив имаат големо значење, бидејќи доколку би ја работеле истата задача повторно, согласно нивните крајни заклучоци секако би имале пореални решенија.

При анализа на фазите за решавање на задачата, наведовме и кои чекори беа користени во секоја од нив. Но, која е нивната временска распределба? На Слика 2 и Слика 3 графички е претставена распределбата на времето за работа на шесте чекори: разбирање, нематематичко погодување, математички пресметки, променливи и формули, собирање повеќе податоци и заклучоци, на првата група Г1 и втората група Г2, соодветно.

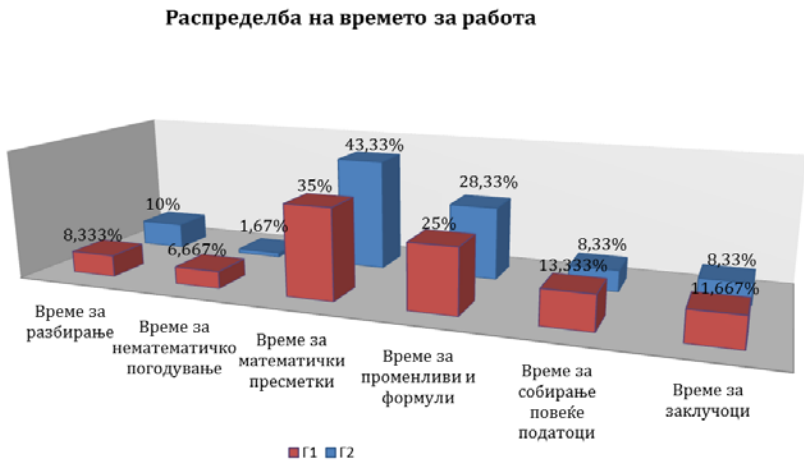


Слика 2. Дијаграм на распределбата на времето за работа на чекорите: разбирање (R), нематематичко погодување (N), математички пресметки (MP), променливи и формули (PF), собирање повеќе податоци (SB) и заклучоци (Z) на првата група Г1.

Согласно дијаграмите на Слика 2 погоре и на Слика 3 подолу може да заклучиме дека и двете групи применија циклично менување на чекорите при решавањето на дадената задача на Ферми, што одговара на една од главните карактеристики на процесот на математичко моделирање, со што се потврдува дека задачите на Ферми може да се користат во наставата по математика за вежбање на математичкото моделирање.



Слика 3. Дијаграм на распределбата на времето за работа на чекорите: разбирање (R), нематематичко погодување (N), математички пресметки (MP), променливи и формули (PF), собирање повеќе податоци (SB) и заклучоци (Z) на втората група Г2.



Слика 4. Распределбата на времето за работа во двете групи

На дијаграмот на Слика 4 е прикажана распределбата на вкупното време за работа на двете групи во секој од шесте чекори на математичкото моделирање. Може да согледаме дека и тука не постои разлика помеѓу двете групи. И двете групи најмногу одвоиле време за математички пресметки и формирање на математичкиот модел, односно време за променливи и формули. Најверојатно ваквата распределба се должи на практикувањето на традиционалниот начин за решавање на проблемските задачи, каде освен разбирањето на задачата и заклучокот, целото останато време се математички пресметки, променливи и формули. Тоа што е различно кај задачите за математичко моделирање е нивната, на почеток, наполно неодредена, непрецизна природа, која бара да времето поминато во разбирање и собирање на дополнителни податоци да биде можеби исто толку долго колку и времето за математичките пресметки или времето за променливите и формулите, со цел најдениот одговор да биде што е можно поточен, поверодостоен. До таа распределба се очекува да се дојде при почесто практикување на математичкото моделирање.

Истражувањето покажа дека при математичкото моделирање многу битен фактор е комуникацијата и конструктивниот пристап при решавање на задачите. Тоа посебно се забележува во работата на втората група Г2 во која учениците се чувствуваа послободни во дискусијата за проблемот што и ги доведе до формирање на модел во кој зедоа во предвид повеќе параметри, со што моделот го направија пореален, а со тоа и поточен. Но, недоволното искуство на работа на автентични ситуации од секојдневниот живот, доведе до правење на не толку добри проценки за вредностите на величините кои ги вметнаа во моделот.

Како што наведовме на почетокот на овој дел, беа направени повеќе истражувања со ученици кои решаваа задачи со математичко моделирање ([5]). За разлика од истражувањето кое тука го презентиравме, во едно друго истражување учествуваа ученици со среден успех по предметот математика кои исто така решаваа задача на Ферми. Не може, а да не напоменеме дека овие ученици беа значително повеќе мотивирани при решавањето на задачата, покомуникативни, полесно разменуваа идеи и доаѓаа до заеднички заклучоци. Ваквата реакција главно се должи на природата на задачите на Ферми, за чие решавање во најголемиот број случаи потребни се елементарни знаења од математиката, што ги охрабрува учениците со послаб успех, а автентичната реална природа на задачите служи за дополнителна мотивација.

3. ЗАКЛУЧОК

Решавањето задачи со математичкото моделирање во наставата по математика може многу да придонесе за зголемување на интересот и мотивацијата за изучување на математиката. Задачите се со автентични содржини од секојдневниот живот, со што ја покажуваат корисноста на математиката; при нивното решавање учениците може да користат дополнителни извори на информации, со што се развива истражувачкиот дух кај учениците; можноста да бидат креирани повеќе модели, секој „подеднакво добар“ за реалната ситуација, е важна карактеристика на овие задачи, што овозможува учениците на најдобар начин да ги искористат своите способности и знаења, но и да стекнат нови.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. B. Ärlebäck, *On the use of Realistic Fermi problems for introducing mathematical modeling in school*, The Montana Mathematics Enthusiast, 6(3) (2009), 331-364.

[2] W. Blum, R. Borromeo Ferri, *Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?*, Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(1) (2009), 45-58.

[3] A. K. Erbas, M. Kertil, B. Cetinkaya, E. Cakiroglu, C. Alacaci, S. Bas, *Mathematical Modeling in Mathematics Education: Basic Concepts and Approaches*, Educational Sciences: Theory and Practice, 14(4) (2014), 1621-1624

[4] H. O. Pollak, *The Interaction between Mathematics and Other School Subjects*, In: UNESCO (Ed.), New Trends in Mathematics Teaching IV. Paris, (1979), 232-248.

[5] Б. Шуминоска, *Математичко моделирање во наставата по математика при решавање на реалистични задачи,* магистерска работа, Институт за математика, Природно-математички факултет, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, 2016.

[6] Riverbend Community Math Center Fermi Questions, http://riverbendmath.org/modules/Fermi_Questions/

[1] Едукативен центар „Абакус Ниб - Охрид“,
Охрид, Р. Македонија

[2] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет,
Институт за математика
ул. Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија

e-mail: abakus.eduakcija@yahoo.com
e-mail: irenatra@pmf.ukim.mk

Примен: 10.07.2017
Поправен: 21.07.2017
Одобрен: 23.07.2017