

INVERSIBLES DANS LES $[n]$ -CATEGORIES

Vladimir V. Topentcharov, Ketty G. Peeva

Il a été indiqué (voir [6], [7]) que le problème des inversibles dans la théorie des $[n]$ -catégories, ainsi que dans la théorie des n -groupes, n demi groupes et n -quasi-groupes [1] reste ouvert. Le cas des inversibles dans les $\langle n \rangle$ - et (n) -catégories est traité dans quelques exemples, qui n'indiquent pas une richesse de résultats pouvant justifier l'étude en détails

Quelques définitions et une étude du système d'axiomes pour les $[n]$ -catégorie aux éléments inversibles sont exposés dans [8], mais sans en tirer des conséquences sur les inversibles eux-mêmes.

Nous nous proposons d'étudier le problème des inversibles dans les $[n]$ -catégories, la structure n -aire la plus proche des catégories [6]. Les $[n]$ -groupoïdes, i. e. $[n]$ -catégories à éléments inversibles, sont définis et leurs propriétés sont esquissées. Des liens entre l'inversibilité dans une $[n]$ -catégorie et celle dans la catégorie de recouvrement correspondante sont explicités. Un rappel sur les $[n]$ -catégorie est fait au début d'article.

La terminologie et les notations sont celles de [2] pour les catégories de [4], [5] pour les $[n]$ -catégories, de [3] pour l'algèbre générale.

1. Rappel sur les $[n]$ -catégories

Soit C un ensemble. On dit [2] que $[C] = (C, b, a)$ est un *graphe orienté* si $b, a: C \rightarrow C_0$ sont des rétractions de C sur $C_0 \subset C$, i. e. si

$$b \cdot b = b, b \cdot a = a, a \cdot b = b, a \cdot a = a.$$

On dira que (C, k'_n) est une *n -classe* si $k'_n: C^n \rightarrow C$ est une loi de composition n -aire; on note ${}^{[n]}C \subset C^n$ l'ensemble des n -uplets composables pour k'_n .

A tout graphe orienté $[C] = (C, \mathbf{b}, \mathbf{a})$ est canoniquement associée une suite de rétractions $V_{[n]} = \{u_i^j; ij \leq n\}$, où $u_i^j = \mathbf{b}$ si $j < i$ et $u_i^j = \mathbf{a}$ si $j > i$. On dit alors [4], [5] que $[C]_{[n]} = (C, V_{[n]})$ est un $[n]$ -graphe

DEFINITION 1. On dira que l'algèbre $(C, k; V_{[n]}) = C_{[n]}$ est une $[n]$ -catégorie si les conditions suivantes sont vérifiées:

(K. 1) (C, k'_n) est une n -classe; $(C, V_{[n]})$ est un $[n]$ -graphe.

(K. 2) Si $v_i = pr_i / {}^*_{[n]} C$ est la restriction de $pr_i: C^n \rightarrow C$ sur ${}^*_{[n]} C$ on a

$$b(k'_n(x^i; i \leq n)) = \mathbf{b}(x^1) \text{ et } a(k'_n(x^i; i \leq n)) = \mathbf{a}(x^n).$$

(K. 3) ${}^*_{[n]} C = \{(x^i; i \leq n); \mathbf{a}(x^i) = \mathbf{b}(x^{i+1}), i \leq n-1\}$.

(K. 4) Si $(V_{[n]}(x), x)_i \in {}^*_{[n]} C$, alors $[(V_{[n]}(x), x)_i] = x$, où l'on a posé

$$(V_{[n]}(x), x)_i = (\mathbf{a}(x), \dots, \mathbf{a}(x), x, \mathbf{b}(x), \dots, \mathbf{b}(x)),$$

l'élément $X \in C$ étant en i -ème position.

(K. 5) Etant donnée une $(2n-1)$ -suite, si pour tout $p \leq n$ on a $(x^{k+p}; 0 < k \leq n \in {}^*_{[n]} C$ et $(x^1, \dots, x^{p-1}, [(x^{p+k}; 0 < k \leq n-1)], x^{p+k-1}, \dots, x^{2n-1}) \in {}^*_{[n]} C$, alors pour tout $p, q \leq n$ on a

$$\begin{aligned} & [(x^1, \dots, x^{q-1}, [(x^q, \dots, x^{q+n-1}], x^{q+n}, \dots, x^{2n-1})] = \\ & = [(x^1, \dots, x^{p-1}, [(x^p, \dots, x^{p+n-1}], x^{p+n}, \dots, x^{2n-1})]. \end{aligned}$$

La notion de $[n]$ -foncteur s'obtient par les méthodes classiques [2], [3] On dit [4], [5] que $F: C_{[n]} \rightarrow H_{[n]}$ est un $[n]$ -foncteur de la $[n]$ -catégorie $C_{[n]}$ vers la $[n]$ -catégorie $H_{[n]}$ si $F: C \rightarrow H$ est une application telle que

$$F([(x^i; i \leq n)]) = [(F x^i; i \leq n)], V_{[n]}^H \cdot F(x) = F^n V_{[n]}^C(x), x \in C.$$

Ayant en vue la définition classique d'inversible dans une structure algébrique [3] et en particulier dans les catégories [2], on a:

DEFINITION 2. On dira que x' (resp. x'') est un inverse à droite (res à gauche) de $x \in C$ dans $C_{[n]}$ relativement à la $(n-2)$ -suite (y^2, \dots, y^{n-1}) (res $(\bar{y}^2, \dots, \bar{y}^{n-1})$) d'éléments de C si les relations suivantes sont vérifiées:

$$\begin{aligned} & (x, y^2, \dots, y^{n-1}, x') \in {}^*_{[n]} C \text{ et } [(x, y^2, \dots, y^{n-1}, x')] = \mathbf{a}(x) \\ & \text{(resp. } (x, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^{n-1}, x'') \in {}^*_{[n]} C \text{ et } [(x, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^{n-1}, x'')] = \mathbf{b}(x)). \end{aligned}$$

En particulier on dit que $x' \in C$ (resp. $x'' \in C$) est un *inverse à droite* (resp. à gauche) *canonique* de $x \in C$ dans $C_{[n]}$ s'il est inversible à droite (resp. à gauche) de $s \in C$ pour la $(n-2)$ -suite (e, \dots, e) formée d'unités $e = b(x)$ (resp. $e = a(x)$). Si $x \in C$ admet un inverse à droite et un inverse à gauche (canonique) on dira qu'il est (*canoniquement*) *inversible* dans $C_{[n]}$

Si $n=2$ les notions d'inversible et de canoniquement inversible coïncident et on obtient l'inversibilité classique. Plus loin, sauf mention explicite, on dira inversible pour un élément canoniquement inversible, la notion générale d'inversibilité dépendant d'une $(n-2)$ -suite assez arbitraire.

DEFINITION 3. On dira que la $[n]$ -catégorie $C_{[n]}$ est un $[n]$ -*groupoïde* si tout élément de C est inversible dans $C_{[n]}$.

2. Quelques propriétés des inversibles

Pour les éléments décrits par la DEF. 3 une suite de résultats donnent une caractérisation assez complète comme pour les structures usuelles [3].

PROPOSITION 1. Pour que $x \in C$ soit inversible dans $C_{[n]}$ il faut et il suffit que $x \in C$ admette d'inversibles à gauche et à droite dans $C_{[n]}$.

Démonstration. Si $x \in C$ est inversible, alors des inversibles à droite et à gauche existent suivant la DEF. 3. — Si des inversibles à gauche et à droite existent pour un élément $X \in C$, il est par définition (voir DEF. 3) un élément inversible dans $C_{[n]}$.

PROPOSITION 2. Si $x' \in C$ est inverse à gauche pour $x \in C$ dans $C_{[n]}$, alors $x \in C$ est inverse à droite pour $x' \in C$ dans $C_{[n]}$.

Démonstration. Puisque $x \in C$ est un inverse à gauche de $x' \in C$ dans $C_{[n]}$, on a $[(x', a(x), \dots, a(x), x)] = b(x)$; appliquant (K. 1), (K. 2), (K. 3) au composé ainsi construit, on a $a(x) = b(x')$ et $a(x') = b(x)$; alors

$$[(x', a(x), \dots, a(x), x)] = b(x) = a(x'),$$

ce qui montre, que $x \in C$ est l'inverse à droite de $x' \in C$ dans $C_{[n]}$ suivant la

DEF. 3.

PROPOSITION 3. Si un élément $x \in C$ possède un inverse dans $C_{[n]}$, celui-ci est unique.

Démonstration. Supposons que $x \in C$ est inversible dans $C_{[n]}$ et soit $x', x'' \in C$ ses deux inverse; alors par définition on a

$$[(x, e, \dots, e, x')] = a(x) = [(x, e, \dots, e, x'')];$$

considérons la $(n-1)$ -suite $(x', \bar{e}, \dots, \bar{e})$; l'égalité obtenue ci-dessus entraîne

$$(x, \bar{e}, \dots, \bar{e}, [(x, e, \dots, x')]), (x, \bar{e}, \dots, \bar{e}, [(x, e, \dots, e, x'')]) \in {}_{\bar{e}}^{[n]}C;$$

on en déduit l'égalité des compositions, soit

$$[(x, \bar{e}, \dots, \bar{e}, [x, e, \dots, e, x'])] = [(x, \bar{e}, \dots, \bar{e}, [(x, e, \dots, e, x'')])];$$

l'axiome (K.5) de l'associativité n -aire permet d'écrire

$$[[[(x', \bar{e}, \dots, \bar{e}, x)], e, \dots, e, x']] = [[[(x', \bar{e}, \dots, \bar{e}, x)], e, \dots, e, x'']].$$

D'autre part, $\bar{e} = b(x') = a(x)$, on a $a[(x', \bar{e}, \dots, \bar{e}, x)] = a(x') = b(x)$ suivant la PROP. 2 et puisque $b(x) = e$ on obtient les égalités

$$[(e, \dots, e, x')] = [(e, \dots, e, x'')];$$

puisque $e \in C_0$, c'est une unité dans $C_{[n]}$, d'où $x' = x''$.

PROPOSITION 4. Si l'inverse à droite et l'inverse à gauche de $x \in C$ par rapport aux $(n-2)$ -suites (y^2, \dots, y^{n-1}) et $(\bar{y}^2, \dots, \bar{y}^{n-1})$ dans $C_{[n]}$ sont égaux et identiques à $x \in C$, alors les deux suites sont identiques. Si de plus $x \in C$ est canoniquement inversible dans $C_{[n]}$ et son inverse est identique à $x \in C$, alors $y^i = \bar{y}^i$ pour tout $i \leq n$.

Démonstration. De la DEF. 3 et de (K.2) on obtient

$$[(x, y^2, \dots, y^{n-1}, x)] = a(x) \text{ et } b([(x, y^2, \dots, x^{n-1}, x)]) = b(x);$$

mais on a aussi $b([(x, y^2, \dots, y^{n-1}, x)]) = b(x)$, $b((a(x))) = a(x)$ et $b(x) = a(x)$; avec les propriétés des inverses on a alors

$$[(x, y^2, \dots, y^{n-1}, x)] = [(x, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^{n-1}, x)];$$

on compose de gauche et de droite cette égalité par les $(n-2)$ -suites $(x, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^{n-1})$ et (y^2, \dots, y^{n-1}, x) , les composition étant manifestement définie. Appliquant plusieurs fois l'axiome (K.5) de l'associativité n -aire, on obtient en définitive $(y^2, \dots, y^{n-1}) = (\bar{y}^2, \dots, \bar{y}^{n-1})$.—Le cas de l'inverse canonique est manifestement trivial. Notons qu'il n'est pas possible d'obtenir à partir de l'égalité des suite l'égalité de leurs composante, car on fait l'application de l'axiome (K.5) donne $[(e, y^2, \dots, y^{n-1}, e)] = [(e, \bar{y}^2, \dots, \dots, \bar{y}^{n-1}, e)]$, $e = a(x) = b(x)$; $y^i = \bar{y}^i = e$, $i \leq n$, n'est vrai que pour le cas canonique.

PROPOSITION 5. L'ensemble C_γ des éléments inversibles de $C_{[n]}$ définit un sous-[n]-groupoïde $C_{\gamma[n]}$ de $C_{[n]}$.

Démonstration. Soit $(x^i; i \leq n)$ une n -suite d'inversibles de $C_{[n]}$ et soit $(\bar{x}^i; i \leq n)$ la n -suite correspondente formée des inverses; supposons encore que $(x^i; i \leq n) \in {}^{[n]}C$; il s'en suit (voir (K. 3)), due $a(x^{i+1}) = b(x^i)$, $i \leq n-1$; l'inversibilité de $x^i \in C$ dans $C_{[n]}$ implique $b(x^i) = \bar{a}(\bar{x}^i)$ et $a(x^i) = b(\bar{x}^i)$, $i \leq n$; alors on a $(\bar{x}^i; i \leq n) \in {}^{[n]}C$, l'ordre dans cette dernière n -suite étant l'ordre inverse, i. e. $(\bar{x}^n, \dots, \bar{x}^1)$; il nous reste à montrer que

$$[[(x^1, \dots, x^n), e, \dots, e, [(\bar{x}^n, \dots, \bar{x}^1)]]] = e;$$

à cet effet on applique plusieurs fois (K. 4) et (K. 5) comme suit:

$$\begin{aligned} & [[(x^1, \dots, x^n), e, \dots, e, [(\bar{x}^n, \dots, \bar{x}^1)]]] = [[(x^1, \dots, x^{n-1}), [(x^n, \\ & e, \dots, e, \bar{x}^n)], \bar{x}^{n-1}, \dots, \bar{x}^1]] = [[(x^1, \dots, x^{n-1}, e), \bar{x}^{n-1}, \dots, \bar{x}^1]] = \\ & = [(x^1, \dots, x^{n-2}, [(e, e, x^{n-1}, e, \dots, e)], [(e, \bar{x}^{n-2}, \dots, x^1)])] = [[(x^1, \dots, \\ & x^{n-2}, e, e)], [(x^{n-1}, e, \dots, e, \bar{x}^{n-1})], \bar{x}^{n-2}, \dots, \bar{x}^1]] = [[(x^1, \dots, x^{n-2}, e, \\ & e)], e, \bar{x}^{n-2}, \dots, \bar{x}^n]] = \dots = [(x^1, e, \dots, e, \bar{x}^1)]] = e \end{aligned}$$

on a utilisé ci-dessus l'égalité suivante

$$[(e, \dots, e, [(x, e, \dots, e)])] = [(e, \dots, e, [(e, x, e, \dots, e)], e)] = x,$$

qui n'est vérifiée pour les catégories polyadiques que si $a(x) = b(x) = e$ (pour les [n]-catégories elle est vérifiée pour $a(x) \neq b(x)$ également). Il s'en suit que $[(x^i; i \leq n)] \in C$ est inversible et que $[(\bar{x}^n, \dots, \bar{x}^1)] \in C$ est son inverse.

PROPOSITION 6. Pour qu'une sous-n-classe \bar{C} de $C_{[n]}$ soit un sous-[n]-groupoïde $\bar{C}_{[n]}$ de $C_{\gamma[n]}$ il faut et il suffit que l'on ait

$$x \in \bar{C} \rightarrow x^{-1} \in \bar{C},$$

x^{-1} étant l'inverse de $x \in \bar{C}$ dans $C_{[n]}$.

Démonstration. Supposons que \bar{C} est un sous-[n]-groupoïde de $C_{[n]}$, noté $\bar{C}_{[n]}$ et supposons que $x \in \bar{C}$ est inversible dans $C_{[n]}$; en vertu de la PROP. 3 l'inverse de $x \in \bar{C}$ est unique, soit x^{-1} et suivant la DEF. 3 on a $x^{-1} \in \bar{C}$. — La suffisance découle de la PROP. 5.

3. Inversible et $[n]$ -foncteur, recouvrement, dérivée

Soit $F: C_{[n]} \rightarrow H_{[n]}$ un $[n]$ -foncteur. On se propose d'étudier le comportement des inversible, transformés par F .

PROPOSITION 7. Soit $x' \in C$ un inverse de $x \in C$ dans $C_{[n]}$ et soit $F(x')$ et $F(x)$ les images respectives de $x, x' \in C$ dans H par F . Alors $F(x')$ est un inverse de $F(x)$ dans $H_{[n]}$.

Démonstration. Suivant la DEF. 3 on a $[(x, e, \dots, e, x')] = a(x)$ supposant que $x' \in C$ est l'inverse à droite de $x \in C$ (le cas de l'inverse à gauche est traité de la même manière). Alors on obtient

$$F([(x, e, \dots, e, x')]) = [(F(x), F(e), \dots, F(e), F(x'))] = F(a(x)) = a(F(x)),$$

ce qui prouve, que $F(x')$ est l'inverse à droite de $F(x)$ dans $H_{[n]}$.

PROPOSITION 8. Si $C_{[n]}$ est un $[n]$ -groupoïde de support C et si $F(C) = H$ étant le support de $H_{[n]}$, alors $H_{[n]}$ est un $[n]$ -groupoïde.

Démonstration. Puisque $F(C) = H$, pour tout $y \in H$ il existe au moins un $x \in C$, tel que $y = F(x)$; suivant la PROP. 7 l'élément $F(x')$ est l'inverse de $F(x)$ dans $H_{[n]}$, $x \in C$ étant l'inverse de $x \in C$ dans $C_{[n]}$; puisque $F(x') \in H$, $H_{[n]}$ est un $[n]$ -groupoïde en vertu de la PROP. 6.

PROPOSITION 9. Soit C un groupoïde et soit $(C)_{[n]}$ la $[n]$ -catégorie dérivée qui lui est canoniquement associée (voir [4], [5]). Alors $(C)_{[n]}$ est un $[n]$ -groupoïde.

Démonstration. Soit la n -suite composable dans $(C)_{[n]}$, i. e. $(x^i; i \leq n) \in {}_{[n]}C$; notons $\bar{x}^i \in C$ l'inverse à droite de $x^i \in C$ dans le groupoïde de base C ; la n -suite $(\bar{x}^n, \bar{x}^{n-1}, \dots, \bar{x}^1)$, formée des inverses aux éléments $x^i \in C$ et dans l'ordre inverse, est manifestement composable dans $(C)_{[n]}$, puisque si $(a(x^i), b(x^i))$ est le couple d'unités pour $x^i \in C$ dans C , le couple $(a(\bar{x}^i), b(\bar{x}^i))$ d'unités de $\bar{x}^i \in C$ dans C est tel que $a(\bar{x}^i) = b(x^i)$ et $b(\bar{x}^i) = a(x^i)$, $i \leq n$; donc si $b(x^i) = a(x^{i+1})$, la n -suite en question étant composable par hypothèse, on a aussi $a(\bar{x}^i) = b(\bar{x}^{i+1})$, d'où $(\bar{x}^n, \bar{x}^{n-1}, \dots, \bar{x}^1) \in ({}_{[n]}C)$. Reste à démontrer, que l'élément $[(\bar{x}^n, \bar{x}^{n-1}, \dots, \bar{x}^1)] \in C$ est l'inverse à droite de l'élément $[(x^1, \dots, x^n)] \in C$ dans $(C)_{[n]}$. A cet effet il suffit d'appliquer les idées de la démonstration de la PROP. 5. Pour l'inverse à gauche, qui existe et est identique à l'inverse à droite on procède de même. Ceci étant vérifié pour toute suite composable, $(C)_{[n]}$ est manifestement un $[n]$ -groupoïde.

COROLLAIRE. Si une $[n]$ -catégorie $C_{[n]}$ est dérivée d'une catégorie (binaire) C et si $C_{[n]}$ est à éléments inversibles, i. e. si $C_{[n]}$ est un $[n]$ -groupeïde, alors C est un groupeïde (binaire).

On suppose connues les idées du recouvrement d'une $[n]$ -catégorie par une catégories, dite catégorie de recouvrement $LC_{[n]}$ de la $[n]$ -catégorie $C_{[n]}$ (voir [4], [5], [7]).

PROPOSITION 10. Soit $C_{[n]}$ une $[n]$ -catégorie et soit $LC_{[n]}$ la catégorie de recouvrement qui lui est canoniquement associée. Si $C_{[n]}$ est un $[n]$ -groupeïde, alors $LC_{[n]}$ est un groupeïde.

Démonstration. Soit $x' \in C$ l'inverse à droite de $x \in C$ dans $C_{[n]}$, i. e. $[(x, e, \dots, e, x')] = \mathbf{a}(x)$; soit o la loi de composition dans la catégorie de recouvrement $LC_{[n]} = (C, o)$; la condition de définition d'une catégorie de recouvrement donnemanifestement

$$[(x, e, \dots, e, x')] = \mathbf{a}(x) = xoeo \dots oeo x' = xox';$$

puisque $x \in C$ est un inversible dans $C_{[n]}$, on a aussi la composition

$$[(x', e, \dots, e, x)] = \mathbf{b}(x), \text{ d'où comme ci-dessus, l'égalité suivante}$$

$$[(x', e', \dots, e', x)] = \mathbf{b}(x) = x'oe'o \dots oe'ox = x'ox;$$

mais des deux égalités ainsi obtenues, à savoir

$$xox' = \mathbf{a}(x) \text{ et } x'ox = \mathbf{b}(x)$$

découle (voir la définition de l'inversibilité dans une catégorie [2]) que $x' \in C$ est l'inverse (unique) de $x \in C$ dans $LC_{[n]}$, qui est évidemment inverse à droite et inverse à gauche.

COROLLAIRE 1. Si un élément est inversible dans $C_{[n]}$ il est inversible dans $LC_{[n]}$ également et vice versa.

COROLLAIRE 2. Si $LC_{[n]}$ est un groupeïde, alors la $[n]$ -catégorie recouverte $C_{[n]}$ est un $[n]$ -groupeïde.

BIBLIOGRAPHIE

1. В. Д. Белоусов, n -арные квазигруппы, Изд. Штиинца Кишинев, 1972
2. S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972
3. Mac Lane, G. Birkhoff, Algebra Mac Millan Publ. Co, New York, 1979
4. V. Topentcharov, Elements de la théorie des catégories polyadques, Alg, Univ. 7, (1977), 277-293

5. V. Topentscharov, Sur les $[n]$ -catégories, *Blu. de l'IPi*, t. XXIV, 3-4 (1978), 87—95, Ia, si
6. V. Topentscharov, Les généralisation n -aires des catégories, *Alg. Univ.*, 10 (1980), à paraître
7. V. Topentscharow, *Theorie der $\{n\}$ -Kategorien*, Darmstadt, 1980, à paraître
8. В. Топенчаров, Д. Хинова, Върху аксиомите на $\{n\}$ -категории с обратими елементи, *Год. ВТУЗ, Приложна математика*, т. XV, кн. 4 1979

ИНВЕРЗИБИЛНОСТ ВО $[n]$ -КАТЕГОРИИ

Владимир В. Тојенчаров, Кејли Г. Пеева

(Резиме)

Се проучува проблемот на инверзибилност во $[n]$ -категории. Се дефинира $[n]$ -групоид, т. е. $[n]$ -категорија на инверзибилни елементи и се испитуваат некои негови својства. Се даваат врски меѓу инверзибилноста во една $[n]$ -категорија и во соодветната покривна категорија.