МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 7 (2020), 155 – 169
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-7.html

ФЕНОМЕНОТ „ПРОПАСТ НА КОЦКАРОТ“ И СЛУЧАЈНОТО ТАЛКАЊЕ

Стефан Мирчевски [1]
Марко Димовски [2]

1. ВОВЕД

Во последната деценија, коцкањето стана една од најпосакуваните „занимации“ ширум светот. Дел од луѓето кои се искусни во практикување на таа активност, вложуваат пари со надеж дека ќе добијат многу повеќе. Постојат и такви кои „пробуваат само еднаш“, а со самото тоа, свесно или несвесно, се доведуваат до работ да изгубат сѐ, т.е. до таканаречената пропаст на коцкарот.

Овој феномен датира од многу одамна, практично веднаш по самото појавување на коцкарниците и, главно, карактеристичен е за игрите како што се рулетот (*Roulette*) и VLT апаратите (*Video Lottery Terminal*). Благодарение на случајноста во игрите, поим за кој ќе зборуваме малку подоцна, математичарите многу брзо ја препознале проблематиката која може лесно да се опише со помош на модели од теоријата на веројатност. Така, уште во далечната 1656 година Пјер де Ферма и Блез Паскал први го поставиле таканаречениот феномен „*Пропаст на коцкарот*“ (*Gambler's Ruin*) [6]. Подоцна во 1657 година, Хајгенс дал ново толкување на истиот проблем. Како резултат на досегашните истражувања, математичарите успеале да дадат одговор на три клучни прашања во врска со овој феномен:

1. Колкава е веројатноста да се победи во коцкарските игри?

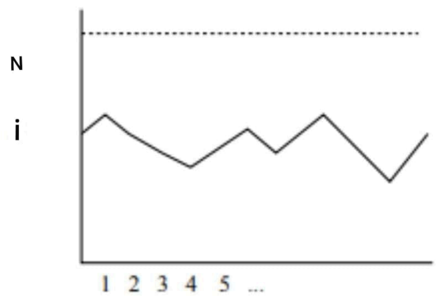
2. Колкава е веројатноста да се случи „пропаст на коцкарот“?

3. Колку долго ќе трае играта?

2. СЛУЧАЈНО КОЦКАЊЕ И ИСТО ШТО И СЛУЧАЈНО ТАЛКАЊЕ...

Треба да се запрашаме што значи случајноста во една коцкарска игра? Случајноста на играта се појавува заради непредвидливоста во одредени фази од играта. Главно, исходот од играта кој е случаен, претставува основна карактеристика на една коцкарска игра. Поради тоа, одлуката за обложување во рундата зависи од исходот на претходната рунда. Но, постојат уште неколку карактеристики на коцкарските игри, кои се однесуваат на пристап во играта кој не е случаен. Така, на пример, во секоја наредна рунда играчот може да се обложува по сопствено убедување. Ова значи дека играчот може да пристапи со претходно дефинирана стратегија со која ќе игра.

Токму заради можноста случајноста на игрите да се толкува како случаен процес, оваа проблематика ги допира најсуптилните математички теории и идеи и со нивна помош гради реална слика за „задницата“ на коцкарниците. На Слика 1 е прикажано придвижување на точка на реалната права, која има особина да се движи горе, долу или да остане во место, со одредена веројатност. Па, така, доколку во една коцкарска игра, играта се реализира по правилото за придвижување на влогот за една парична единица, тогаш интепретацијата за придвижување на влогот во текот на играта е следната: влогот може да се придвижи за една единица нагоре (победа) со веројатност p, или за една единица надолу (загуба) со веројатност $1-p$. Ваквото придвижување со помош на „талкање“ на точка по релна права е познато како *случајно талкање*. Овој модел (случаен процес) ќе го користиме во понатамошното излагање при опишување на коцкарските игри.



Слика 1. Графичка интерпретација на случајно талкање.

2. ФЕНОМЕНОТ „ПРОПАСТ НА КОЦКАРОТ“

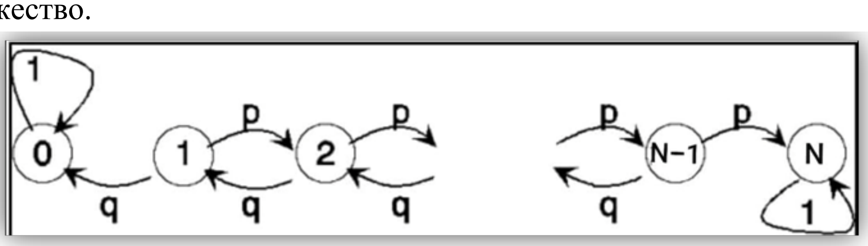
Во продолжение ќе бидат презентирани генералните заклучоци добиени за коцкарот кој се обидел со постојано вложување (обложување) да освои максимални €N без да доживее коцкарска пропаст. Дали успеал? Колкава е веројатноста да успее? Одговорите на сите прашања ќе ги објасниме со математичка терминологија.

Имено, коцкар решил да вложи почетен влог од €1 во казино, притоа ако потегот е успешен, ќе добие €1, во спротивно, ќе изгуби €1 независно од минатото и тоа со веројатност p, односно $q=1-p$, соодветно. Нека со T_n ја означиме вкупната добивка по n рунди. За коцкарот е важно да достигне добивка од €N, без да се случи коцкарска пропаст. Во тој случај, се вели дека коцкарот победил. Практично, коцкарот ја завршува играта веднаш по победата или по губењето на сите пари, без разлика што ќе се случи прво, [4].

Без губење на општоста, претпоставуваме дека коцкарот започнал со почетен влог од €i, $0<i<N$. Од претходно напишаното, може да формираме случаен процес $\{T_n,\, n\geq 0\}$, дефиниран на следниот начин:

$$T_n=\sum_{k=1}^{n} X_k,\ T_0=i \tag{1}$$

каде што X_k се независни еднакво распределени случајни променливи коишто го означуваат придвижувањето на добивката во k-от временски момент. Притоа, во секоја наредна рунда, коцкарот учествува со целокупните дотогашни средства. Вака дефинираниот процес е случајно талкање, а $P\{X_k=1\}=p$ и $P\{X_k=-1\}=q=1-p$ се веројатностите за добивка при последователно обложување во играта. Придвижувањето на добивката се поистоветува со општиот модел на случајно талкање на точка по реална права, [8]. Заради тоа, преминот од една во друга состојба може да се прикаже со *конечна Маркова верига*. Во теоријата на случајни процеси, конечна Маркова верига се дефинира како Марков процес со конечно множество состојби и дискретно параметарско множество.



Слика 2. Конечна Маркова верига со состојбите добиени во феноменот „Пропаст на коцкарот“, [2].

Неколку карактеристики на состојбите во феноменот „Пропаст на коцкарот“.

Состојбите прикажани на Слика 2 може да се класифицираат во три класи состојби и тоа: $C_1 = \{0\}$ е *затворена класа* која ја содржи состојбата 0, за која велиме дека е *апсорбирачка состојба*, бидејќи комуницира само сама со себе. $C_2 = \{1,...,N-1\}$ е посебна класа состојби коишто *заемно комуницираат*. Третата класа состојби $C_3 = \{N\}$ ја има истата карактеристика како класата C_1. Уште повеќе, состојбите од двете затворени класи C_1 и C_3 може да се класифицираат како *преодни состојби*, додека состојбите од класата C_2 се *повратни состојби*, [7].

Сега, ако се вратиме на случајниот процес (1) лесно може да заклучиме дека играта завршува кога $T_n = 0$ или $T_n = N$, при што ако

$$t_i = \min_{n\geq 0,\, T_n \in \{0,N\}} \{n \mid T_0 = i\},$$

тогаш $T_{t_i} = 0$, што значи дека коцкарот загубил, или $T_{t_i} = N$, што значи дека коцкарот победил. Со t_i се означува времето во кое играта завршува, при услов $T_0 = i$.

Нека $P_i = P\{T_{t_i} = N \mid T_0 = i\}$ е веројатноста дека коцкарот победил и освоил €N при услов да започнал со €i. Сега треба да ги разгледаме сите можности коишто произлегуваат од вака дефинираната веројатност. Следното тврдење ни дава рекурзивна врска на веројатностите за победа на коцкарот во зависност од висината на почетниот влог.

Тврдење 1. *Нека P_i е веројатноста дека коцкарот победил и освоил €N, при почетен влог од €i и нека со p ја означиме веројатноста за добивка при последователно обложување во играта. Тогаш*

$$P_i = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ 1, & i = N \\ pP_{i+1} + (1-p)P_{i-1}, & 0 < i < N. \end{cases} \qquad (2)$$

Доказ. За да го докажеме ова тврдење ќе ги користиме дефинициите и основните својства за условна и тотална веројатност.

Јасно, $P_0 = P\left\{T_{t_0} = N \mid T_0 = 0\right\} = 0$, па играчот сигурно ќе загуби. Аналогно, $P_N = P\left\{T_{t_N} = N \mid T_0 = N\right\} = 1$, значи дека играчот сигурно ќе победи. Сега, нека $0 < i < N$. Ги воведуваме следните настани:

E : *Првиот влог е победа* и F : *Првиот влог е загуба*.

Тогаш:

$$
\begin{aligned}
P_i &= P\left\{T_{t_i} = N \mid T_0 = i\right\} = \\
&= P\left\{\left(T_{t_i} = N\right) \cap E \mid T_0 = i\right\} + P\left\{\left(T_{t_i} = N\right) \cap F \mid T_0 = i\right\} = \\
&= P\left\{E \mid T_0 = i\right\} P\left\{T_{t_i} = N \mid E \cap \left(T_0 = i\right)\right\} + \\
&+ P\left\{F \mid T_0 = i\right\} P\left\{T_{t_i} = N \mid F \cap \left(T_0 = i\right)\right\} = \\
&= pP\left\{T_{t_i} = N \mid T_1 = i+1\right\} + \left(1-p\right) P\left\{T_{t_i} = N \mid T_1 = i-1\right\} = \\
&= pP\left\{T_{t_{i+1}} = N \mid T_0 = i+1\right\} + \left(1-p\right) P\left\{T_{t_{i-1}} = N \mid T_0 = i-1\right\} = \\
&= pP_{i+1} + \left(1-p\right) P_{i-1}. \ \square
\end{aligned}
$$

Бидејќи $P_0 = 0$ и $P_N = 1$, од последната рекурзивна формула во Тврдењето 1 може да стигнеме до следните заклучоци:

(i) ако $X_1 = 1$, тогаш вкупната заработка на коцкарот нараснува до $T_1 = i+1$, што значи дека ќе победи со веројатност P_{i+1} (поради својството за отсуство на меморија во Марковите вериги (*Markov memoryless property*)).

(ii) ако $X_1 = -1$, тогаш вкупната заработка на коцкарот се намалува до $T_1 = i-1$, што значи дека ќе победи со веројатност P_{i-1}.

Исто така, бидејќи $p + q = 1$, може да ја направиме следната трансформација во последната рекурзивна формула

$$P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}\left(P_i - P_{i-1}\right).$$

Заради, $P_2 - P_1 = \frac{q}{p}\left(P_1 - P_0\right) = \frac{q}{p} P_1$, со последователна замена се добива следниот запис:

$$P_{i+1}-P_i=\left(\frac{q}{p}\right)^i P_1,\ 0<i<N .$$

Оттука, $P_{i+1}-P_1=\sum_{k=1}^{i}\left(P_{k+1}-P_k\right)=P_1\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^k$, па

$$P_{i+1}=P_1+P_1\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^k=P_1\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^k=\begin{cases}P_1\dfrac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{i+1}}{1-\dfrac{q}{p}}, & p\neq q\\[2ex] P_1\left(i+1\right), & p=q=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Ако искористиме дека $P_N=1$ и $i=N-1$, тогаш добиваме

$$P_1=\begin{cases}\dfrac{1-\dfrac{q}{p}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^N}, & p\neq q\\[2ex] \dfrac{1}{N}, & p=q=\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

па според тоа $P_i=\begin{cases}\dfrac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^N}, & p\neq q\\[2ex] \dfrac{i}{N}, & p=q=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

На овој начин сме одговориле колкава е веројатноста коцкарот да победи пред да доживее коцкарска пропаст. Потребата од разгледување на двата случаи за p и q се воведува од причина што во зависност од играта, коцкарот нема еднакви шанси за победа при секоја рунда кога игра против машината, додека пак постојат реално еднакви можности за успех и неуспех кога се обложуваат двајца играчи во коцкарските игри. Заради тие расудувања, во пракса, постојат игри кои се „фер“, односно игри во кои играчите имаат еднакви шанси за успех во секоја рунда, а и такви кои се „нефер“, во кои играчите немаат еднакви шанси за успех во секоја рунда, [1].

Од последниот резултат, следува дека веројатноста коцкарот да загуби е

$$1-P_i=\begin{cases}\left(\dfrac{q}{p}\right)^i \dfrac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{N-i}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^N}, & p\neq q\\[2ex] \dfrac{N-i}{N}, & p=q=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

3. ВРЕМЕТРАЕЊЕ НА ЕДНА КОЦКАРСКА ИГРА

Практиката покажала дека многу мали се шансите да се победи во коцкарските игри, особено кога тие се пристрасни (нефер) игри. Според тоа, логична последица е фактот дека голема е веројатноста играчот да ја заврши играта без да освои ниту една парична единица. За таа цел, исто така, многу важен сегмент е времето кое е потребно да се заврши една игра.

Математичките модели се изградени на претпоставка дека, во веројатносна смисла, не постои можност играта да трае засекогаш, дури и во оние случаи кога станува збор за непристрасни (фер) игри. Веродостојноста на оваа претпоставка ја дава следното тврдење.

Тврдење 2. *За секое $p\in(0,1)$, веројатноста дека играта нема никогаш да заврши е* 0.

Доказ. Нека $0<p<1$. Случаите кога $p=0$ и $p=1$ се јасни, бидејќи тогаш настанува пропаст на коцкарот, односно сигурна победа, соодветно.

Дефинираме $Q_i=P\{G \mid T_0=i\}$, каде што G е настанот дека играта ќе трае засекогаш. Лесно се заклучува дека

$$Q_i=\begin{cases}0, & i=0\\ 0, & i=N\\ pQ_{i+1}+(1-p)Q_{i-1}, & 0<i<N.\end{cases}$$

Со последната рекурзивна формула е определена линеарна диференцна равенка од втор ред

$$pQ_{i+1} - Q_i + (1-p)Q_{i-1} = 0$$

чија карактеристична равенка е од облик $pr^2 - r + (1-p) = 0$. Нејзините решенија како квадратна равенка по променлива r се $r_1 = \frac{1-p}{p}$, $r_2 = 1$. Оттука, $Q_i = A\left(\frac{1-p}{p}\right)^i + B,\ \ p \neq \frac{1}{2}$, па еден начин да се определат A и B е да се искористи условот $A + B = 0$, [3]. Бидејќи $Q_i = 0$ за $i = N$, од последното равенство добиваме дека

$$A\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - A = 0\,.$$

Бидејќи $p \neq \frac{1}{2}$, следува $A = B = 0$, па $Q_i = 0$ што значи веројатноста дека играта ќе трае засекогаш е 0. Инаку, ако $p = \frac{1}{2}$, тогаш $Q_i = Ai + B$. Ако искористиме дека $Q_0 = 0 = B$, тогаш следува дека $B = 0$. Слично, $Q_N = AN + B = 0$, па и $A = 0$, што значи дека следува истиот заклучок. □

Ако дадеме толкување во смисла на случајно талкање, тоа значи дека не постојат случајни талкања на една точка кои никогаш не запираат. Знаејќи го овој резултат, може да определиме колку долго ќе трае една коцкарска игра. Нека со D го означиме бројот на рунди потребни за да се победи, односно загуби во една коцкарска игра. Тогаш

$$E_i = E\{D \mid T_0 = i\}$$

е очекуваното време на траење на една коцкарска игра, при услов да сме започнале со €i. Со E го означуваме математичкото очекување. Последното може да се сумира во следното тврдење:

Тврдење 3. ([5]) *Нека E_i е очекуваното времетраење на една коцкарска игра, при услов да сме започнале со €i и нека p ја означува добивката при последователно обложување во играта. Тогаш*

$$E_i = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ 0, & i = N \\ 1 + pE_{i+1} + (1-p)E_{i-1}, & 0 < i < N. \end{cases}$$

По низа трансформации во рекурзивната формула од Тврдењето 3, се добива дека должината на една игра, во случај кога $p \neq q$, може да се пресмета со формулата

$$E_i = \frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p} \cdot \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}.$$

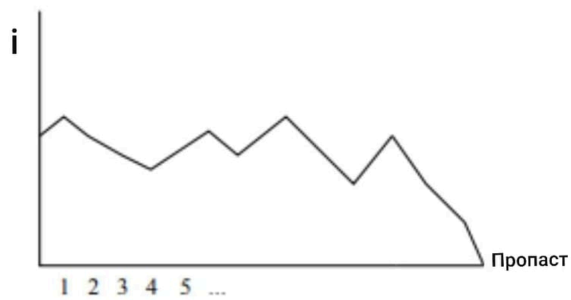
Аналогно, во случај кога $p = q = \frac{1}{2}$, ја добиваме формулата

$$E_i = i(N-i).$$

Она што е јасно за секој играч-коцкар, а поврзано со неговата сигурна загуба, е следното тврдење.

Тврдење 4. ([5]) *Ако играчот започне со влог од €i при $p = \frac{1}{2}$ и продолжи да игра сè додека не загуби сè , тогаш за сите i, коцкарот скоро сигурно ќе доживее коцкарска пропаст.*

Тврдењето покажува дека дури и ако играчот започне да игра со еден милион евра и игра непристрасна (фер) игра, тогаш со веројатност 1 ќе ги загуби сите пари.



Слика 3. Графички приказ на сигурен пропаст на коцкарот при услови од Тврдењето 4.

Од посебна важност за математичарите е и прашањето: **Дали може коцкарот да биде „бесконечно богат“?** Теориските модели дозволуваат да се разгледа случајот кога коцкарот ја продолжува играта и се стреми да достигне сума пари за која важи $N \to \infty$.

Ако во формулата за пресметување веројатност за добивка на коцкарот побараме гранична вредност кога $N \to \infty$, треба да ги разгледаме следните можности:

(i) Ако $p > \frac{1}{2}$, тогаш $\frac{q}{p} < 1$, па добиваме $\lim_{N\to\infty} P_i = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i > 0$.

(ii) Ако $p \le \frac{1}{2}$, тогаш $\frac{q}{p} \ge 1$, па добиваме $\lim_{N\to\infty} P_i = 0$.

Последното може да се протолкува на следниот начин: Ако коцкарот со секоја рунда се стреми да освои што повеќе пари додека не доживее пропаст, тогаш практично не постои сума пари N која може да се нарече „победа“, туку едноставно, тој ќе запре само ако доживее коцкарска пропаст. Во првиот случај (i), коцкарот има поголеми шанси за добивка во секоја рунда, што значи постои позитивна веројатност којашто покажува дека тој никогаш нема да доживее коцкарска пропаст. Во вториот случај (ii), со веројатност 1, коцкарот ќе доживее коцкарска пропаст.

4. МОДЕЛ НА ЕВРОПСКИ РУЛЕТ

Во продолжение ќе бидат презентирани резултати добиени врз основа на претходните теориски изведувања, а поврзани со веројатноста за добивка во коцкарските игри, пред да се случи пропаст на коцкарот. За таа цел ќе го разгледаме моделот на *Европски рулет* (*European Roulette)*, бидејќи резултатите што ќе ги презентираме малку подоцна се добиени како последица на движењето на веројатноста за добивка при играње Европски рулет, во секоја рунда, кога коцкар одлучува да се обложува **само на боја**, и тоа, или црвена или црна, при секоја рунда.

Низ годините наназад, играта рулет доживеала две суштински поделби, и тоа на *Европски рулет* и *Американски рулет*. Основната разлика, која е причина за оваа поделба, се зелените полиња во рулетот. Имено, во моделот на Европски рулет постои само едно зелено поле во кое се наоѓа една „нула“, додека во моделот на Американски рулет, постојат две зелени полиња пополнети со „нула“ (0) и „двојна нула“ (00).

За нас од интерес е само Европскиот рулет, кој во основа се состои од 37 полиња нумерирани со броевите од 1 до 36, и едно поле во кое се наоѓа бројот 0. Како што беше кажано погоре, полето во кое се наоѓа „нулата“ е *зелено* поле, а останатите броеви се распределени во полиња со *црвена* или *црна* боја. Распределбата на броевите од множеството $\{1,\ldots,36\}$ и соодветните бои, е направна на следниот начин:

Множество со броеви	Парни броеви	Непарни броеви
$\{1,\ldots,10\}$ и $\{19,\ldots,28\}$	ЦРНА	ЦРВЕНА
$\{11,\ldots,18\}$ и $\{29,\ldots,36\}$	ЦРВЕНА	ЦРНА

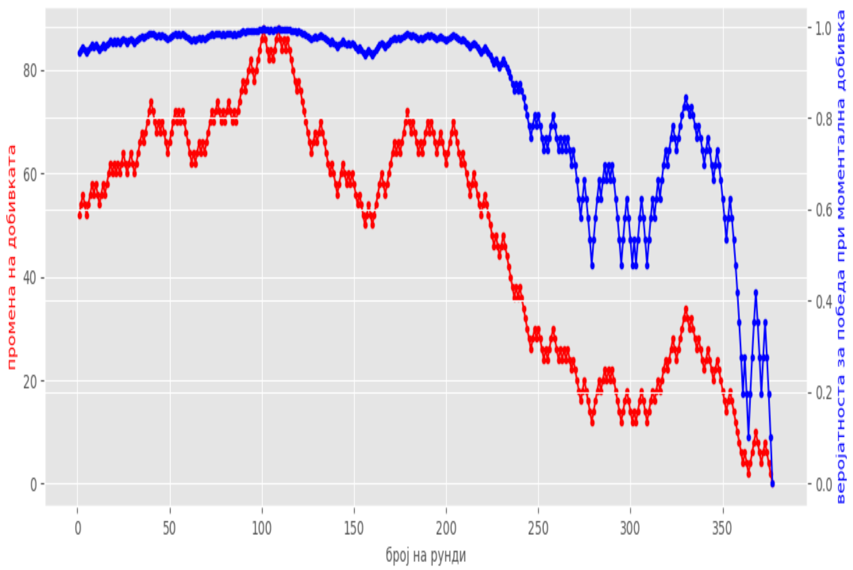
Табела 1. Распределба на броевите $\{1,\ldots,36\}$ и соодветните бои во полињата од Европски рулет.

Знаејќи ги потребните информации за Европскиот рулет, задачата за коцкарот и неговата добивка пред да доживее пропаст, може да ја модифицираме во следниот конкретен проблем.

Коцкар решил да се обложува ***само на боја*** *(црвена или црна) во казино, на играта рулет, така што по извесен број рунди, да достигне максимални* €100 *добивка пред да доживее пропаст во играта. Неговиот почетен влог изнесува* €50. *Ако потегот е успешен, тогаш коцкарот добива* €2, *додека во случај кога потегот не е успешен, губи* €2. *Притоа, во секоја следна рунда коцкарот се обложува со парите кои му преостанале од претходната рунда. Колкава е веројатноста коцкарот да ја реализира својата цел?*

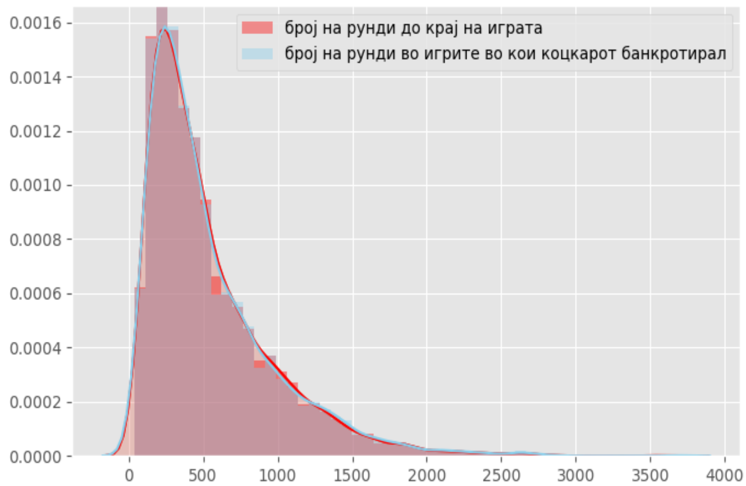
5. РЕЗУЛТАТИ ОД СИМУЛАЦИЈА НА ИГРАТА РУЛЕТ

Во програмскиот софтвер Python, симулиравме 5000 игри во кои коцкар кој почнува со €50, завршува со играта по одреден број на рунди и тоа во моментот кога ќе заработи €100 или ќе ги изгуби сите пари. Во една рунда, тој на случаен начин одбира да игра на црвено или црно поле од рулетот, т.е. со веројатност 0,5 ја одбира секоја од боите, при што може да добие или загуби €2. Од 5000 игри, дури во 4004 се случило коцкарот да банкротира, додека до замислената цел стигнал само 496 пати. Доколку неговата желба беше да дојде до повеќекратно поголема сума од почетната (а, не двојно како во нашиот случај), тогаш разликите во бројките ќе беа уште поголеми, во корист на игрите во кои банкротира. На Слика 4 е прикажано како се менувала сумата со која располагал по k-тата рунда, додека не дошол до крајот на играта, која во дадениот случај бил банкротот. Дополнително, на десната оска е дадено движењето на веројатностите за успешно завршување на играта, пресметани со формулата (2).



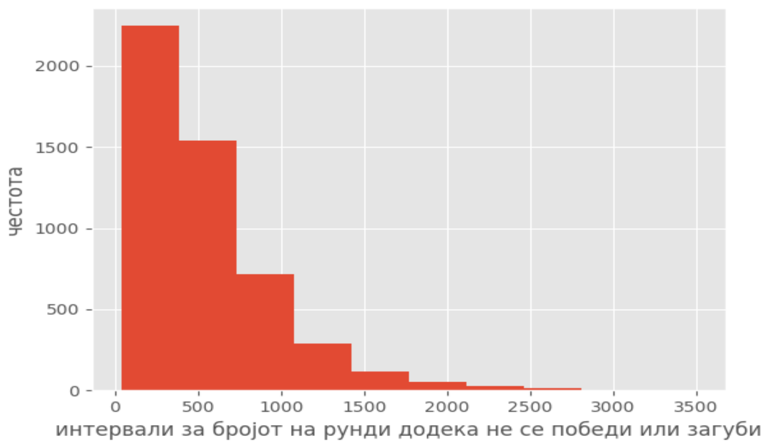
Слика 4. Движењето на добивката (црвена линија) и веројатноста за освојување на двојно поголема сума од почетната (сина линија) во една од симулираните игри, која завршила со пропаст на коцкарот.

Интересно е да се види после колку рунди завршувале игрите. Хистограмот со интервалите составени од бројот на рунди, потребни за да дојдеме до крајот на играта (без разлика на исходот) е даден на Слика 5. Од него можеме да забележиме дека најчесто бројот на рунди потребни да се дојде до крајот на играта е помеѓу 0 и 400.



Слика 5. Хистограм на честоти за бројот на рунди, потребен за да се дојде до крајот на играта.

На Слика 6 е прикажан график од густината на распределба (*Density Plot*), за бројот на одиграни рунди во секоја од петте илјади симулирани игри. Дадени се две криви кои ја опишуваат густината на распределба, при што со црвената боја е дадена распределбата за бројот на рунди, потребни да се дојде до крајот на играта, додека со бледо сина боја е дадена кривата која ја опишува распределбата на бројот на рунди, потребни да се дојде до крајот на играта, меѓутоа само во случаите во кои коцкарот банкротирал.



Слика 6. Графички приказ на густината на распределба на бројот на рунди потребни за да се дојде до крајот на играта.

Овие графици со густината на распределба, всушност претставуваат еден поглаток, непрекинат, графички приказ на хистограмот на честоти.

Сите овие резултати од симулациите, претставуваат потврда на теориският дел кој претходно е изложен во трудот.

6. ЗАКЛУЧОК

Од приложениот теориски пристап во овој труд може да заклучиме дека веројатносниот модел основан на случаен процес, во голема мера ја упростува позадината на коцкарските игри, т.е. дава прецизно и јасно толкување за движењето на веројатностите поврзани со играта на коцкарот, во текот на сите рунди. Поточно, со помош на случајно талкање се определуваат најважните веројатности за една коцкарска игра, во зависност од почетниот влог на играчот, а тие, всушност, се одговори на трите поставени прашања на почетокот од трудот. Вториот дел од овој труд беше посветен на изгледот на Европскиот рулет и некои негови карактеристики. Исто така, со помош на програмскиот софтвер Python, беа симулирани 5000 игри во кои јасно се забележува какво е однесувањето на веројатностите врз победата/загубата на коцкарот кој ја игра играта рулет. Дополнително, резултатите беа прикажани и со помош на хистограм на честоти за да се стигне до крајот на играта, како и со дијаграм на кој се забележува густината на распределба за бројот на рунди во една игра.

ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Rey-Bellet, Lecture 15: *Difference equations, Gamblings and Random Walks,* Department of Mathematics and Statistics, University of Massachusetts Amherst.

[2] J. M. Cargal, *Discrete Mathematics for Neophytes: Number Theory, Probability, Algorithms and other stuff* (Chapter 33), 1988.

[3] A. Farahmand, *Solving linear recurrence relations* (Lecture 8.2), University of California, Berkeley, 2019.

[4] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, John Whiley and Sons, New York, 1968

[5] T. Leighton, R. Rubinfeld, *Random Walks* (Lecture notes), Mathematics for Computer Science, 2006

[6] Д. Берцекас, Џ. Цициклис, *Вовед во веројатност*, Превод на 1000 книги (проект на Владата на Р.М.), Арс Ламина, 2012

[7] С. Јанковић, Л. Главаш, *Стохастички модели у операционим истраживањима* (теорија и задаци), Универзитет у Београду, Математички факултет, Београд, 2016

[8] Ј. Малишић, *Случајни процеси* (теорија и примене), Грађевинска књига, Београд, 1989

[1,2] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: stefan_mircevski@outlook.com
e-mail: mdimovski16@gmail.com

Примен: 21.3.2020
Поправен: 6.7.2020
Одобрен: 18.8.2020
Објавен на интернет: 20.8.2020