Математички Билтен
13 (XXXIX)
1989 (45-51)
Скопје, Југославија

ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ТРЕТ И ЧЕТВРТИ РЕД ЧИИ ИНТЕГРАЛИ СЕ ПРОИЗВОДИ ОД ИНТЕГРАЛИТЕ И НИВНИТЕ ИЗВОДИ НА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД

Елена С. Атанасова

Во овој труд се формирани четири функции и е определен услов за нивна линеарна независност. Кога функциите се линеарно независни, тие претставуваат партикуларни интеграли на диференцијална равенка од четврт ред, а кога условот не е задоволен, тогаш три од нив се линеарно независни партикуларни интеграли на диференцијална равенка од трет ред.

Во [1] се наоѓаат линеарни диференцијални равенки од трет и четврт ред, чии интеграли се втори односно трети степени од интегралите на линеарна диференцијална равенка од втор ред.

Митриновиќ и Ѓоковиќ [2] имаат добиено диференцијална равенка од петти ред, чии интеграли се четврти степени од интегралите на линеарна диференцијална равенка од втор ред.

Илија А. Шапкарев [3] има добиено постапка за добивање линеарна диференцијална равенка од (к+1)-ви ред, чии интеграли се к-ти степени од интегралите на линеарна диференцијална равенка од втор ред; во [4] има добиено линеарни диференцијални равенки чии интеграли се втори и трети степени од интегралите на линеарни диференцијални равенки од трет ред и квадрати од интегралите на линеарни диференцијални равенки од четврти ред; во [5] има конструирано линеарни диференцијални равенки од трет ред, чии интеграли се производи од интегралите и нивните изводи на линеарни диференцијални равенки од втор ред.

Во овој труд ние добиваме линеарни диференцијални равенки од трет и четврти ред, чии интеграли се производи од квадратите на интегралите и изводи на интегралите на диференцијална равенка од втор ред.

1. Нека $y_1(x)$ и $y_2(x)$ се две ненулти линеарно независни партикуларни решенија на диференцијалната равенка

$$y'' = h(x)y \quad (h(x)\neq 0), \tag{1.1}$$

т.е. нека

$$y_1y_2' - y_2y_1' \neq 0. \tag{1.2}$$

Со $y(x)$ да означиме кое било ненулто решение на диференцијалната равенка (1.1) и со негова помош да ја формираме функцијата

$$z = y^2y'. \tag{1.3}$$

Да видиме сега кои се условите за функцијата (1.3) да ја задоволува бараната равенка. За таа цел, ако во (1.3) ставиме

$$y = Ay_1 + By_2,$$

каде што A и B се произволни константи, се добива

$$z = A^3y_1^2y_1'+A^2B(2y_1y_2y_1'+y_1^2y_2')+AB^2(2y_1y_2y_2'+y_2^2y_1')+B^3y_2^2y_2'.$$

Оттука се гледа дека четирите функции

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= y_1^2y_1', & A_{12} &= 2y_1y_2y_1' + y_1^2y_2', \\ A_{13} &= 2y_1y_2y_2' + y_2^2y_1', & A_{14} &= y_2^2y_2', \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

се партикуларни интеграли на бараната диференцијална равенка.

Изводите на функциите (1.4) се:

$$A_{11}' = 2y_1y_1'^2 + hy_1^3,$$

$$A_{12}' = 2y_2y_1'^2 + 4y_1y_1'y_2' + 3hy_1^2y_2,$$

$$A_{13}' = 2y_1y_2'^2 + 4y_2y_1'y_2' + 3hy_1y_2^2,$$

$$A_{14}' = 2y_2y_1'^2 + hy_2^3,$$

$$A_{11}'' = 2y_1'^3 + 7hy_1^2y_1' + h'y_1^3,$$

$$A_{12}'' = 6y_1'^2y_2' + 14hy_1y_2y_1' + 7hy_1^2y_2' + 3h'y_1^2y_2,$$

$$A_{13}'' = 6y_1'y_2'^2 + 14hy_1y_2y_2' + 7hy_2^2y_1' + 3h'y_1y_2^2,$$

$$A_{14}'' = 2y_2'^3 + 7hy_2^2y_2' + h'y_2^3,$$

$$A_{11}''' = 20hy_1y_1'^2 + 10h'y_1^2y_1' + (7h^2+h'')y_1^3,$$

$$A_{12}''' = 40hy_1y_1'y_2' + 20hy_2y_1'^2 + 20h'y_1y_2y_1' + $$
$$+ 3(7h^2+h'')y_1^2y_2 + 10h'y_1^2y_2',$$

$$A_{13}''' = 40hy_2y_1'y_2' + 20hy_1y_2'^2 + 20h'y_1y_2y_2' +$$
$$+ 3(7h^2+h'')y_1y_2^2 + 10h'y_2^2y_1',$$

$$A_{14}''' = 20hy_2y_2'^2 + 10h'y_2^2y_2' + (7h^2+h'')y_2^3.$$

Со директно пресметување наоѓаме

$$A_{13}A_{14}' - A_{14}A_{13}' = (y_1y_2'-y_2y_1')y_2^2(2y_2'^2-hy_2^2),$$

$$A_{11}A_{12}' - A_{12}A_{11}' = (y_1y_2'-y_2y_1')y_1^2(2y_1'^2-hy_1^2),$$

$$A_{12}A_{14}' - A_{14}A_{12}' = 2(y_1y_2'-y_2y_1')y_2(y_1y_2'^2+y_2y_1'y_2'-hy_1y_2^2),$$

$$A_{11}A_{13}' - A_{13}A_{11}' = 2(y_1y_2'-y_2y_1')y_1(y_2y_1'^2+y_1y_1'y_2'-hy_1^2y_2),$$

$$A_{12}A_{13}' - A_{13}A_{12}' = (y_1y_2'-y_2y_1')\left[2(y_1^2y_2'^2+y_1y_2y_1'y_2'+y_2^2y_1'^2) -\right.$$
$$\left.- 3hy_1^2y_2^2\right],$$

$$A_{11}A_{14}' - A_{14}A_{11}' = (y_1y_2'-y_2y_1')(2y_1y_2y_1'y_2'-hy_1^2y_2^2).$$

Ако ставиме

$$\Delta_1 = A_{12}''(A_{13}A_{14}'-A_{14}A_{13}')-A_{13}''(A_{12}A_{14}'-A_{14}A_{12}')+A_{14}''(A_{12}A_{13}'-A_{13}A_{12}'),$$

$$\Delta_2 = A_{11}''(A_{13}A_{14}'-A_{14}A_{13}')-A_{13}''(A_{11}A_{14}'-A_{14}A_{11}')+A_{14}''(A_{11}A_{13}'-A_{13}A_{11}'),$$

$$\Delta_3 = A_{11}''(A_{12}A_{14}'-A_{14}A_{12}')-A_{12}''(A_{11}A_{14}'-A_{14}A_{11}')+A_{14}''(A_{11}A_{12}'-A_{12}A_{11}'),$$

$$\Delta_4 = A_{11}''(A_{12}A_{13}'-A_{13}A_{12}')-A_{12}''(A_{11}A_{13}'-A_{13}A_{11}')+A_{13}''(A_{11}A_{12}'-A_{12}A_{11}'),$$

добиваме

$$\Delta_1 = 2(y_1y_2'-y_2y_1')^3(2y_2'^3-3hy_2^2y_2'+h'y_2^3), \tag{1.5}$$

$$\Delta_2 = 2(y_1y_2'-y_2y_1')^3\left[2y_1'y_2'^2-hy_2(2y_1y_2'+y_2y_1')+h'y_1y_2^2\right], \tag{1.6}$$

$$\Delta_3 = 2(y_1y_2'-y_2y_1')^3\left[2y_1'^2y_2'-hy_1(2y_2y_1'+y_1y_2')+h'y_1^2y_2\right], \tag{1.7}$$

$$\Delta_4 = 2(y_1y_2'-y_2y_1')^3(2y_1'^3-3hy_1^2y_1'+h'y_1^3). \tag{1.8}$$

Во врска со овие релации, со непосредно пресметување, наоѓаме дека

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} & A'_{14} \\ A''_{11} & A''_{12} & A''_{13} & A''_{14} \\ A'''_{11} & A'''_{12} & A'''_{13} & A'''_{14} \end{vmatrix} = -A'''_{11}\Delta_1 + A'''_{12}\Delta_2 - A'''_{13}\Delta_3 + A'''_{14}\Delta_4 =$$

$$= (y_1y'_2 - y_1y'_2)^6(3h^2 - h''). \qquad (1.9)$$

Оттука, поради (1.2), заклучуваме дека четирите функции (1.4) ќе бидат линеарно независни ако е исполнета релацијата

$$3h^2 - h'' \neq 0. \qquad (1.10)$$

Функциите (1.4) ќе бидат линеарно зависни ако не е исполнета релацијата (1.10), т.е. ако $3h^2-h''=0$.

Исто така ќе покажеме дека три од функциите (1.4) се секогаш линеарно независни. За таа цел да претпоставиме дека

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0.$$

Ако ставиме $\dfrac{y'_1}{y_1} = u$, $\dfrac{y'_2}{y_2} = v$, ќе имаме

$$2v^3-3hv+h' = 0, \quad 2uv^2-h(2v+u)+h' = 0,$$

$$2u^2v-h(2u+v)+h' = 0, \quad 2u^3-3hu+h' = 0.$$

Од првата и четвртата равенка следува дека

$$(u-v)(2u^2+2uv+2v^2-3h) = 0,$$

а од втората и третата

$$(u-v)(2uv-3h) = 0.$$

Бидејќи $u-v = \dfrac{y'_1}{y_1} - \dfrac{y'_2}{y_2} \neq 0$, од добиените равенки следува равенката

$$u^2 + v^2 = 0,$$

којашто е задоволена кога $u=v=0$, а тоа е спротивно на условот (1.2).

Според тоа, релациите (1.5), (1.6), (1.7) и (1.8) не може да бидат сите истовремено рамни на нула, а тоа значи дека три од функциите (1.4) се секогаш линеарно независни.

Да ја конструираме сега диференцијалната равенка чии интеграли се производи од квадратите на интегралите и изводи на интегралите на дадената равенка (1.1).

Да ставиме

$$A_0 = z, \quad A_1 = z',$$
$$A_2 = z'' - 7hz, \quad A_3 = z''' - 10hz' - 10h'z,$$
$$A_4 = z^{iv} - 10hz'' - 20h'z' - (13h''-9h^2)z.$$

Ќе покажеме дека равенките $A_3=0$ за $h''-3h^2=0$ и $(h''-3h^2)A_4-$ $-(h''-3h^2)'A_3 = 0$ за $h''-3h^2\neq 0$, т.е. равенките

$$z''' - 10hz' - 10h'z = 0, \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}(3z^2-h'')z^{iv}-(3h^2-h'')'z'''+10h(h''-3h^2)z''-10(hh'''-2h'h'')z'+\\ +(27h^4-48h^2h''+60hh'^2-10h'h'''+13h''^2)z = 0\end{aligned} \tag{1.12}$$

имаат интеграли кои се производи од квадратите на интегралите и изводи на интегралите на равенката (1.1).

За таа цел земаме $z=y^2y'$, каде што y е кое било ненулто решение на равенката (1.1).

Со диференцирање добиваме

$$A_0 = y^2y'; \quad A_1 = 2yy'^2+hy^3, \quad A_2 = 2y'^3+h'y^3,$$
$$A_3 = (h''-3h^2)y^3, \quad A_4 = (h''-3h^2)y^3.$$

Ако не е исполнет условот (1.10), тогаш $A_3=0$, т.е. се добива равенката (1.11). Ако условот (1.10) е исполнет, тогаш со елиминација на y^3 од последните две равенки се добива равенката (2.12).

Од начинот на кој ги добивме равенките (1.11) и (1.12) е јасно дека двете имаат интеграли кои се производи од квадратите на интегралите и изводи на интегралите на равенката (1.1).

Линеарно независни партикуларни интеграли на равенката (1.12) се четирите функции (1.4), а на равенката (1.11) три функции од (1.4).

2. Нека $y_1(x)$ и $y_2(x)$ се две ненулти линеарно независни решенија на диференцијалната равенка (1.1), т.е. такви што да важи (1.2).

Со $y(x)$ да означиме кое било ненулто решение на диференцијалната равенка (1.1) и со негова помош сега да ја формираме функцијата

$$z = yy'^2. \tag{2.1}$$

Четирите функции

$$\begin{aligned} A_{11} &= y_1y_1'^2, \qquad A_{12} = 2y_1y_1'y_2' + y_2y_1'^2, \\ A_{13} &= 2y_2y_1'y_2' + y_1y_2'^2, \qquad A_{14} = y_2y_2'^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

се линеарно зависни ако не е исполнета релацијата

$$hh'' - 3h'^2 + 3h^3 \neq 0 \tag{2.3}$$

и се линеарно независни ако е исполнета оваа релација.

Исто така, заклучуваме дека кои било три од функциите (2.2) се линеарно независни функции и се линеарно независни партикуларни интеграли на равенката

$$hz''' - 3h'z'' - 7h^2z' + 10hh'z = 0. \tag{2.4}$$

Ако е исполнета релацијата (2.3) функциите (2.2) се линеарно независни партикуларни интеграли на равенката

$$\begin{aligned} &hAz^{iv} - (hA)'z''' - (10h^2A + 4h''A - 3h'A')z'' - (11hh'A - 7h^2A')z' + \\ &+ (20h'^2A + 10hh''A + 3A^2 - 10hh'A')z = 0, \quad (A = hh'' + 3h^3 - 3h'^2). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Од начинот на кој ги добивме равенките (2.4) и (2.5) е јасно дека и двете имаат интеграли кои се производи од интегралите и квадратите на изводите на интегралите на равенката (1.1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Камке: Спровочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, с. 531 и 535 (1961), Москва

[2] Mitrinović. D.S. et Đoković, D.Ž.: Complements au traité de Kamke, Note IX Publikation de la Fakulté d'Electrotechnique de l'Université à Belgrade, serie: Mathematique et phisique N° 108 (1963)

[3] Šapkarev, I.A.: Über lineare Differentialgleichungen mit der Eigenschaft dass k-te Potenzen der Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ihre Integrale sind, Matematički vesnik, kniga 4 (19), sveska 1, str. 67-70, Beograd (1967)

[4] Шапкарев, И.А.: За линеарни диференцијални равенки чии интеграли се втори и трети степени од интегралите на линеарни диференцијални равенки од трет и четврт ред. Годишен зборник на Електромашинскиот факултет на Универзитетот во Скопје, кн. 3 (1969)

[5] Шапкарев, И.А.: Конструкција на линеарни диференцијални равенки од трети ред чии интеграли се производи од интегралите и нивните изводи на линеарни диференцијални равенки од втори ред, Годишен зборник на Електротехничкиот факултет на Универзитетот во Скопје (1989), (во печат)

LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THIRD AND FOURTH ORDER WHOSE SOLUTIONS ARE PRODUCTS OF SOLUTIONS AND THEIR DERIVATIVES OF SECOND ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Elena S. Atanasova

S u m m a r y

Let $y_1(x)$ and $y_2(x)$ be particular solutions of the second order linear differential equation (1.1) such that (1.2) is satisfied.

In this paper we form functions (1.4) and determine a condition (1.10). When condition (1.10) is satisfied the functions (1.4) are linearly independent and they are particular linearly independent solutions of inquired differential equation (1.12). When the condition (1.10) is not satisfied then three functions of (1.4) are linearly independent and they are particular linear independent solutions of the equation (1.11).

Also we form functions (2.2) and establish the condition (2.3). When the condition (2.3) is satisfied, the four functions (2.2) are linearly independent and they are particular linear independent solutions of the differential fourth-order equation (2.5). When the condition (2.3) is not satisfied then three functions of (2.2) are linear independent functions and they are particular linearly independent solutions of the three-order differential equation (2.4).