

ако сакаме да направиме обратен постапок, наместо со „ \circ “ и „ $+$ “ ќе работиме со нивните дуални операции.

До крајот на овој дел, ќе претпоставуваме дека (M, \cdot) е полугрупа.

Лема 2.8 Нека операцијата „ \circ “ ја задоволува релацијата

$$(14) (\forall u, v, x, y) ux \circ y = x \circ yv = xy.$$

Операцијата „ $+$ “ определена со

$$(15) (\forall x, y) x + y = x(x \circ y)y$$

е лево и десно асоцијативна сирема „ \cdot “.

Теорема 2.9 Нека полугрупата (M, \cdot) е лево и десно редуцибилна. На секоја операција „ $+$ “ којашто е лево и десно асоцијативна сирема „ \cdot “ ѝ кореспондира една операција „ \circ “ такава да се исполнеат релациите (14) и (15).

Точноста на 2.8 и 2.9 може лесно да се докаже и директно, а сирема 2.6 и 2.7, тие следуваат од 2.3 и 2.4. Исто така, лесно се докажува и точноста на следната

Теорема 2.10 Нека „ \circ_1 “ и „ \circ_2 “ се две операции со особината (14), а „ $+_1$ “ и „ $+_2$ “ соодветните им операции определени со (15). Операцијата „ $+_1$ “ е лево и десно асоцијативна сирема „ $+_2$ “; специјално значи, $(M, +_1)$ се полугрупа.

Специјален вид операции со особината (14) се константите, т. е. (за) $(\forall x, y) x \circ y = a$; во тој случај, (15) добива облик $(\forall x, y) x + y = xay$, а операцијата „ $+$ “ определена на тој начин ќе ја означуваме со „ \dot{a} “.

Обратно, ако полугрупата (M, \cdot) има неутрален елемент, сите операции со особината (14) се константи. Навистина, ако e е неутралниот елемент на полугрупата, стававајќи $e \circ e = a$, добиваме

$$(\forall x, y) x \circ y = xe \circ y = e \circ y = e \circ ey = e \circ e = a,$$

т. е. дека „ \circ “ е константа. Поради $e \dot{a} e = a$, ако $a \neq b$, операциите „ \dot{a} “ и „ \dot{b} “ не можат да бидат еднакви. Значи, точна е следната

Теорема 2.11 Нека (M, \cdot) е полугрупа со неутрален елемент. Множеството операции од облик „ \dot{a} “ го исцрпува множеството од сите операции што се лево и десно асоцијативни сирема „ \cdot “; при тоа, $a \neq b \rightarrow \dot{a} \neq \dot{b}$. Секој триголд (M, \dot{a}) е полугрупа и „ \dot{a} “ е лево и десно асоцијативна сирема „ \dot{b} “, за секој пар a, b .

Наредната теорема дава одговор на прашањето кои полугрупи (M, \dot{a}) се изоморфни со (M, \cdot) .

Теорема 2.12 Нека (M, \cdot) е полугрупа со неутрален елемент e ; наредните три пропозиции се еквивалентни.