1°; $(\exists a^{-1})\, aa^{-1} = a^{-1}a = e$; 2°: $(\forall b)(\exists c)\, b = aca$;
3°: *полугрупите* $(M, \cdot)$ *и* $(M, \dot{a})$ *се изоморфни.*

Доказ. Лесно се добива дека $1° \rightleftarrows 2°$. **Навистина,**

$1° \to (\forall b)\, b = aa^{-1}\, ba^{-1}a \to 2°$;
$2° \to (\exists c)\, e = aca \to ac = acaca = ca \to$
$\to ac \cdot a = a \cdot ca = e \to 1°$.

Ќе покажеме сега дека $1° \to 3°$.

Нека е точна пропозицијата 1°. Ако ставиме $(\forall x)\, \theta(x) = ax$, од 1° следува $(\forall y)\, y = a\, a^{-1}\, y$, т. е. $(\forall y)\,(\exists x)\; y = \theta(x)$; исто така,

$$\theta(x) = \theta(y) \to ax = ay \to x = a^{-1}ax = a^{-1}ay = y;$$

значи добивме дека θ е реципрочно еднозначно пресликување од M на M. Од асоцијативноста на операцијата „$\cdot$" следува и $(\forall x, y)\, \theta(x \dot{a} y) = \theta(x)\, \theta(y)$, а од тоа следува дека полугрупите $(M, \dot{a})$ и $(M, \cdot)$ се изоморфни, т. е. ја добиваме пропозицијата 3°.

Обратно од 3° следува дека во полугрупата $(M, \dot{a})$ постои неутрален елемент e' па значи $e = e' \dot{a} e = e \dot{a} e'$, т. е. $e'a = ae' = e$, а од тоа ако се стави $e' = a$, се добива 1°.

Со тоа ја покажавме точноста на теоремата.

Забелешка 2·13 од 3° следува дека секоја операција што е лево и десно асоцијативна спрема „$\cdot$", ги има истите особини и во однос на операцијата „$\dot{a}$".

Забелешка 2·14. Во овој дел на работава имплицитно се содржани и резултатите од работите [1] и [4].

§ 3. Меѓусебно симетрични операции

Лема 3·1 Нека φ_1 и φ_2 се два ендоморфизми на групоидот $(M, \cdot)$, а операцијата „$\cdot$" е симетрична спрема себе, т. е. $(\forall u, v, x, y)\; uv \cdot xy = ux \cdot vy \cdot$ *Операцијата „+" определена со*

(17) $(\forall x\, y)\; x + y = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)$

е симетрична со „$\cdot$".

Доказ. Од (17) и симетричноста на „$\cdot$" спрема себе, следува

$$(\forall u, v, x, y)\;(u+v)\;(x+y) = \varphi_1(u)\,\varphi_2(v) \cdot \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$$
$$= \varphi_1(u)\,\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(v)\,\varphi_2(y)$$

– бидејќи φ_i се ендоморф. — $= \varphi_1(yx)\,\varphi_2(vy)$

$$= \; ux + vy,$$

т. е. дека „+" е симетрична спрема „$\cdot$".