Постои реципрочно еднозначна коресподенција меѓу операциите „+", симетрични спрема „·" и паровите ендоморфизми (φ_1, φ_2) од групоидот $(M, \cdot)$, ако тој групоид е, на пример, комутативна група. Некои слични особини на операциите „·" и „+", при услов да се тие поврзани со некоја од спомнатите релации, ја повлекуваат нивната еднаквост; на пример, ако постои некој заеднички неутрален елемент (лев или десен) за групоидите $(M, \cdot)$ и $(M, +)$, или пак ако и двата групоиди се идемпотентни, од било која од релациите за комутативност следува еднаквоста на операциите „·" и „+", т. е. $(\forall\, x, y)\ x\, y = x + y$; исто така, ако групоидите $(M, \cdot)$ и $(M, +)$ имаат по еден неутрален елемент, при претпоставка дека „·" и „+" се взаемно симетрични, се добива еднаквоста на операциите „·" и „+", а и уште повеќе дека групоидот $(M, \cdot)$ е комутативна полугрупа. Тоа се поглавните резултати на ова работа.

§ 1. Меѓусебно комутативни операции

Прво ќе ја разгледаме релацијата за лева комутативост.

Лема 1. 1 *На секоја десна транслација од групоидот* $(M, \cdot)$ *и кореспондира една операција лево комутативна со „·".*

Доказ. Нека φ е една десна транслација од $(M, \cdot)$; ако ставиме

(6) $(\forall\, x, y)\ x + y = \varphi\,(x\, y)$,

добиваме

$$(\forall\, x, y, z)\ x\,(y+z) = x \cdot \varphi\,(y\, z) = \varphi\,(x \cdot y\, z) = x + y\, z,$$

т. е. дека „+" е лево комутативна со „·".

Лема 1. 2 Нека $(M, \cdot)$ е идемпотентен групоид со некој елемент скратив од *лево. На секоја операција „+" лево комутативна со „·" и кореспондира реципрочно еднозначно една десна транслација* φ *таква да е точна релацијата* (6).

Доказ. Нека „+" е лево комутативна со „·"; ако ставиме $(\forall\, x)\ \varphi\,(x) = x + x$, поради идемпотентноста на „·" добиваме

$$(\forall\, x, y)\ x + y = x + y\, y = x\,(y + y) = x\ \varphi\,(y).$$

Ако a е елемент скратив од лево во $(M, \cdot)$ добиваме

$$(\forall\, x, y)\ a\, \varphi\,(x\, y) = a + x\, y = a\,(x + y) = a \cdot x\, \varphi\,(y) \rightarrow$$
$$\rightarrow \varphi\,(x\, y) = x\, \varphi\,(y),$$

т. е. дека φ е десна транслација во $(M, \cdot)$, па значи точна е и релацијата (6). Претпоставувајќи дека постои и друга транслација ψ која ја задоволува релацијата (6) добиваме

$$(\forall\, x)\ a\, \varphi\,(x) = \varphi\,(a\, x) = \psi\,(a\, x) = a\, \psi\,(x) \rightarrow$$
$$\rightarrow \varphi\,(x) = \psi\,(x),$$

т, е дека $\varphi = \psi$. Со тоа точноста на 1. 2 е покажана.