Лема 1. 7. Ако $(M,\cdot)$ има некој десен неутрален елемент, *секоја негова десна транслација е од облик* (8). Поспецијално, ако групоидот има некој лево скратив елемент, *постои реципрочно еднозначна коресподенција меѓу неговите десно асоцијативни елементи и десните транслации.*

Доказ. Нека e е еден десен неутрален елемент, а φ десна транслација на групоидот; ако ставиме $a=\varphi(e)$, добиваме

$(\forall x)\,\varphi(x)=\varphi(xe)=x\varphi(e)=xa,$

а од тоа, спрема 1.6, следува дека a е десно асоцијативен елемент.

Нека b е некој лево скратив елемент; ако два елементи a_1 и a_2 одредуваат со (8) една иста транслација φ, ќе имаме

$ba_1=\varphi(b)=ba_2\to a_1=a_2$. Со тоа точноста на 1.7 е покажана.

Забелешка 1.8 Очигледно е дека секој групоид со неутрален елемент e е лево и десно редуцибилен па, од лемите 1.1, 1.3 и 1.7, се добива дека во тој случај на секоја операција „$+$" лево комутативна со „$\cdot$" ѝ кореспондира, реципрочно еднозначно еден десно асоцијативен елемент a; таа кореспонденција е предадена со

(9) $(\forall x,y)\,x+y=xy\cdot a.$

Операцијата „$+$" определена со (9) ќе ја означуваме со „$\cdot_a$" и ќе пишуваме $x_a y$, наместо $x\cdot_a y$. Претпоставувајќи дека $(M,\cdot)$ е полугрупа, ќе ги проучиме особините на операциите „$\cdot_a$", во зависност од елементот a.

Лема 1,9. Нека $(M,\cdot)$ е полугрупа со неутрален елемент и a елемент скратив од лево. Групоидот $(M,\cdot_a)$ *е полугрупа, ако и само ако a припаѓа на центарот на полугрупата* $(M,\cdot)$.

Доказ. Нека e е неутралниот елемент на $(M,\cdot)$. Ако претпоставиме дека $(M,\cdot_a)$ е полугрупа, ќе добиеме

$$(\forall x)\ xaa=eexaa=e_a(e_a x)=(e_a e)_a x$$
$$=eeaxa=axa\to$$
$$\to xa=ax,$$

од каде следува дека a е елемент од центарот на полугрупата $(M,\cdot)$.

Обратно, нека a припаѓа на центарот од $(M,\cdot)$; имаме

$(\forall x,y,z)\ x_a(y_a z)=xyzaa=xyaza=(x_a y)_a z,$

т. е. добиваме дека $(M,\cdot_a)$ е полугрупа, а со тоа точноста на 1.9 е покажана.

Лема 1.10 Нека a е десно скратив елемент од центарот на полугрупата $(M,\cdot)$. *Полугрупите* $(M,\cdot_a)$ и $(Ma,\cdot)$[1]) *се изоморфни.*

Доказ. Ако ставиме $(\forall x)\,\theta(x)=xa$, добиваме еднозначно пресликување од M на Ma; при тоа поради скративоста на a, имаме

$\theta(x)=\theta(y)\to xa=ya\to x=y,$

т. е. добиваме дека θ е реципрочно еднозначно. Понатака, добиваме

$(\forall x,y)\,\theta(x_a y)=x_a y\,a=xyaa=xa\cdot ya=\theta(x)\,\theta(y),$

а од тоа следува дека $(M,\cdot_a)$ и $(Ma,\cdot)$ се изоморфни полугрупи.

---

[1]) со Ma е означено множеството што ги содржи сите елементи од облик xa каде x се менува во M.