Доказ. Нека e е лев неутрален елемент на полугрупата (M,·), а „+“ операција комутативна со „·“; ако ставиме $(\forall x)\varphi(x)=e+x$, добиваме

$$(\forall x, y)\ x+y=ex+ey=(e+x)(e+y)=\varphi(x)\varphi(y);$$

понатака, од тоа следува

$$(\forall x\ )\ \varphi(e)\varphi(x)=(e+e)(e+x)=ee+ex=e+x=\varphi(x),$$

а конечно и

$$\begin{aligned}(\forall x, y)\ \varphi(xy) &= e+xy=ee+xy\\ &=(e+e)(x+y)=\varphi(e)\varphi(x)\varphi(y)\\ &=\varphi(x)\varphi(y)\quad ,\end{aligned}$$

т. е. дека φ е ендоморфизам. Очигледно е дека φ е еднозначно определено со „+“, а и обратно. При претпоставка дека постои десен неутрален елемент, доказот се изведува на дуален начин.

Од некои слични особини на операциите кои се поврзани со некоја од трите спомнати релации за комутативност, следува и нивната еднаквост. Тоа се гледа на пример од следната

Теорема 2.21 Ако „+“ и „·“ се поврзани со некоја од релациите за комутативност, тогаш

$$[(\forall x)(\exists y, z)\ x=yz=y+z]\ \rightarrow\ (\forall u, v)\ uv=u+v.$$

Да ја покажеме точноста, на пример, за случајот кога „+“ и „·“ се взаемно комутативни.

Нека $u=y_1+z_1=y_1z_1,\ v=y_2+z_2=y_2z_2$; имаме

$$uv=(y_1+z_1)(y_2+z_2)=y_1z_1+y_2z_2=u+v.$$

И во другите два случаи, на ист начин се доаѓа до тој резултат.

Забелешка 1.22 . Поради симетричноста на разгледаните релации, фактот што операцијата „+“ ја изразуваме со „·“, а не обратно, не е битен.

§ 2. Меѓусебно асоцијативни операции

Лема 2.1 Нека $(\forall x)\varphi(x)$ е десно асоцијативен елемент на групоидот $(M,\cdot)$. *Операцијата „+“ определена со*

(11) $(\forall x, y)\ \ x+y=x\varphi(y)$,

е десно асоцијативна спрема „·“ .

Доказот е очигледен.

Теорема 2.2 Нека $(M,\cdot)$ е групоид со неутрален елемент. *Постои реципрочно еднозначна коресподенција меѓу операциите десно асоцијативни со „·“ и пресликувањата на M во множеството од десно асоцијативните елементи на групоидот.*