

Доказ. Нека e е неутралниот елемент на групоидот (M, \cdot) .

Ако „+“ е десно асоцијативна со „ \circ “, од $(\forall x) \varphi(x) = e + x$, следува

$$(\forall x, y) x + y = xe + y = x(e + y) = x\varphi(y),$$

а од тоа се добива и

$$(\forall x, y, z) x \cdot y\varphi(z) = x(y + z) = xy + z = xy \cdot \varphi(z),$$

т. е. дека $\varphi(z)$ е десно асоцијативен елемент. Ако φ и ψ ја задоволуваат релацијата (11), тогаш

$$(\forall x) \varphi(x) = e\varphi(x) = e\psi(x) = \psi(x) \rightarrow \varphi = \psi.$$

Обратно, спрема 2.1, на секое пресликување φ од спомнатиот облик му кореспондира една операција која е десно асоцијативна спрема „ \circ “. Со тоа е докажана точноста на 2.2.

Лемата 2.1 е специјален случај од следната

Лема 2.3 Нека $(\forall x, y) x \circ y$ е десно асоцијативен елемент на групоидот (M, \cdot) и нека

$$(12) (\forall u, x, y) ux \circ y = x \circ y.$$

Операцијата „+“ оѓределена со

$$(13) (\forall x, y) x + y = x(x \circ y)$$

е десно асоцијативна спрема „ \circ “.

Доказот и на ова лема е очигледен.

Ќе го разгледаме сега случајот кога групоидот (M, \cdot) е десно редуцибилен.

Лема 2.4 Ако (M, \cdot) е десно редуцибилен групоид, на секоја операција „+“ десно асоцијативна спрема „ \circ “ и кореспондира една операција „ \circ “, иако да се точни релациите (12) и (13).

Доказ. Нека „+“ е десно асоцијативна спрема „ \circ “. Ако ставиме $(\forall x, y) x \circ y = x'' + y$, поради $(ux)'' = x''$, ќе добиеме дека е точна релацијата (12); понатака, добиваме

$$(\forall x, y) x + y = xx'' + y = x(x'' + y) = x(x \circ y),$$

т. е. точноста на (13).

Забелешка 2.5 Нека M'' е едно десно редуцирано множество од групоидот (M, \cdot) , а θ едно пресликување од $M'' \times M$ во M . Ако ставиме $(\forall x, y) x \circ y = \theta(x'', y)$, добиваме операција со особината (12).

Лесно се покажува точноста и на следната

Лема 2.6. „ \circ “ е лево асоцијативна спрема „+“ ако и само ако „ \circ “ е десно асоцијативна спрема „+“.

Забелешка 2.7 Спрема последната лема, ни во овој случај, не е битен фактот што „+“ се изразува со помош на „ \circ “, а не обратно. Имено,