ЗА НЕЗАВИСНОСТА НА НЕКОИ РЕЛАЦИИ

Б. Трпеновски

1. Нека M е множество од υ елементи ($\upsilon \geqslant 2$ не е неопходно конечен). Системот од множеството M и бинарната операција „·“ определена во M ќе го викаме групоид и обележуваме со $(M,\cdot)$. Операцијата од групоидот ќе ја викаме производ, а наместо $a.\,b$ ќе пишуваме само ab. Ако за $x, y, z \in M$ $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ се елементи од M добиени со примена на операцијата од групоидот над x, y и z, земени секој по еднаш и во било каков ред, за равенството $R: P(x, y, z) = Q(x, y, z)$, ако е точно во $(M,\cdot)$ ќе речеме дека е релација која во $(M,\cdot)$ ја задоволува тројката (x, y, z), во кој случај, за пократко обележување, ќе пишуваме $R(x, y, z)$; ако за дадени $x, y, z \in M$ релацијата R не е точна во $(M,\cdot)$, ќе пишуваме $\overline{R}(x, y, z)$.

Ако од сите υ^3 тројки елементи од M се отфрлат оние за кои R е тривијално задоволена, природно се наметнуваат следните прашања:

а) При какви услови и од кој минимален број тројки (a_i, b_i, c_i) за кои во $(M,\cdot)$ е $R(a_i, b_i, c_i)$ следува дека за секоја тројка (x, y, z) е $R(x, y, z)$,

b) Дали постојат, и при какви услови такви групоиди $(M,\cdot)$ во кои за некои тројки (a_i, b_i, c_i) е $R(a_i, b_i, c_i)$, а за секоја друга тројка (x, y, z) е $\overline{R}(x, y, z)$?

Во последно време и двете прашања се разгледувани во повеќе трудови. Така на пример G. Szàsz во работата „Die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen“ (Acta Sci. Math., Szeged, 15 (1953), 20 — 28) го има разгледано второто од овие прашања кога R означува асоцијативност. Во оваа работа ние на сличен начин ќе го разгледаме истото прашање за следните релации:

A:
1. $(xy)z = (xz)y$, 2. $(xy)z = (yx)z$, 3. $(xy)z = (zy)x$, 4. $(xy)z = (yz)x$,
5. $x(yz) = x(zy)$, 6. $x(yz) = y(xz)$, 7. $x(yz) = z(yx)$, 8. $x(yz) = y(zx)$,

B:
1. $(xy)z = x(zy)$, 2. $(xy)z = y(xz)$, 3. $(xy)z = z(xy)$,
4. $(xy)z = z(yx)$, 5. $(xy)z = y(zx)$.

Лесно може да се покаже дека секоја друга релација од ист тип како горните релации може со обична замена ни симболите да се сведе на една од нив. На пример, релацијата $x(yz) = (zx)y$ со замената $x \to y$, $y \to z$, $z \to x$ преминува во B_3.

Пред да го формулираме проблемот ќе направиме неколку забелешки.

Елементите од множенството M ќе ги означуваме со малите латински букви, притоа, посебните елементи со првите букви $a, b, c, \ldots$, а произволните со последните $x, y, z, \ldots$ Ако υ е конечен, различните елементи од M ќе ги означуваме со првите υ букви (на пример за $\nu = 4$ различните елементи од M ќе бидат a, b, c, d).

Тројката (a, b, c) ќе ја викаме тривијална за R ако $R(a, b, c)$ е тривијално равенство. Ако $R(a, b, c)$ и $R(a', b', c')$ преставуваат исто равенство, тројките (a, b, c) и (a', b', c') ќе ги викаме слични за R и означуваме со $(a, b, c) \overset{R}{=} (a', b', c')$. Тројките (a, b, c) и (a', b', c') ќе ги сметаме за исти ако, и само ако $a = a'$, $b = b'$ и $c = c'$.

За тројката (a, b, c) ќе речеме дека може да се изолира за R во M, ќе пишуваме „тројката (a, b, c) е iRM", ако може да се определи групоид $(M, \cdot)$ во кој е $R(x, y, z)$ за секоја, и само таква тројка (x, y, z) што не е слична за R со (a, b, c). На сличен начин може да се определи iRM за пар, тројка, и т. н. тројки елементи од M. Системот од ваквите групоиди ќе го означуваме со $\overline{R}(M)$.

Тргнувајќи од едно множество M можеме да добиеме различни групоиди ако на разни начини во него ја определиме бинарната операција. Меѓутоа, во секој од тие групоиди ние ќе употребуваме иста ознака за таа операција, а ако сакаме да ја покажеме разликата меѓу нив, ќе ги употребуваме ознаките како $(M, \cdot)_1$, $(M, \cdot)_{1,3}$ и сл. Нас посебно ќе не интересираат следните групдиди:

$$(*) \quad \begin{array}{ll} (M,\cdot)_1 & \text{во кој една од тројките } (x, x, x) \text{ е } iRM, \\ (M,\cdot)_{1,2} & \text{во кој една од тројките } (x, x, z) \text{ е } iRM, \\ (M,\cdot)_{1,3} & \text{во кој една од тројките } (x, y, x) \text{ е } iRM, \\ (M,\cdot)_{2,3} & \text{во кој една од тројките } (x, y, y) \text{ е } iRM, \\ (M,\cdot)_{1,2,3} & \text{во кој една од тројките } (x, y, z) \text{ е } iRM, \end{array}$$

каде x, y и z се взаимно различни.

Ако од горноте тројки ги отфрлиме оние што се тривијални за релацијата R, тогаш групоидите од системот $(*)$, што соответствуваат на преостанатите тројки, ќе речеме дека образуваат база на системот $\overline{R}(M)$. Ако може да се определи базата на системот $\overline{R}(M)$, ќе речеме дека релацијата R е независна во M.

Целта на оваа работа е да ја докажеме следната

ТЕОРЕМА. За $\upsilon \geqslant 2$ *независни во* M *се релациите* A_2, A_3, A_5 *и* A_7, *додека* A_1, *и* A_6 *ќе бидат независни во* M *ако, и само ако* $\upsilon > 2$. *Релациите* B_1 *и* B_2 *се независни во* M *ако, и само ако* $\upsilon > 3$, *а* B_3, B_4 *и* B_5 *— ако, и само ако* $\upsilon > 5$. *Според погоре дадената дефиниција за независност, релациите* A_4 *и* A_8 *неможат да бидат независни, али секој пар тројки* (x, y, z) *и* (y, z, x) *е* iA_4M, *односно* (x, y, z) *и* (z, x, y) *е* iA_8M *ако, и само ако* $\upsilon > 2$.

Оваа теорема следува од теоремите што ќе бидат докажани во наредните точки, при чие докажување ќе ги користиме и следните ознаки:

Ако A и B се два искази, наместо „од точноста на A следува точноста на B“ ќе пишуваме $A \Rightarrow B$, а наместо $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, ќе пишуваме $A \Leftrightarrow B$. Со $[R,.]$ ќе ја означуваме релацијата R во оние случаи кога сакаме да ја истакнеме улогата на бинарната операција „·“. Ако $u \neq v$, и ако со примената на R над тројките (x, y, z) за кои е $R(x, y, z)$ добиеме во $(M,\cdot)$ дека $u = v$, ќе речеме дека сме добиле директна противуречност.

2. Најпрво ќе ги разгледаме релациите од групата A.

2. 1. ТЕОРЕМА. Релацијата A_1 е независна во M ако, и само ако $\upsilon > 2$. За $\upsilon = 2$ ниедна тројка елементи од M не е iA_1M.

Доказ. Бидејќи (x, x, x) и (x, y, y) се тривијални тројки за релацијата A_1, а $(x, y, z) \overset{A_1}{=} (x, z, y)$, доказот на теоремата за $\upsilon > 2$ следува од примерите,

$(M,\cdot)_{1\,2}$: $aa=a$, $ab=b$ и $xy=c$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{1\,2,3}$: $aa=ab=a$, $ac=ca=cc=c$, $ba=bb=bc=cb=b$ и $xy=d$ за сите други случаи,

од кои се состои базата на системот $\overline{A_1}(M)$.

Нека е сега $\upsilon = 2$. Земајќи ја во предвид сличноста и тривијалноста на погоре обележените тројки, за разгледување остануваат само тројките (a, a, b) и (b, b, a). Доказот на теоремата ќе биде завршен ако покажеме дека неможе да се определи групоид во кој $(aa)\,b \neq (ab)\,a$ и $(bb)\,a = (ba)\,b$. Ако се разгледаат сите можни вредности за производите aa и ab се добива: a) $aa = a$ и $ab = a \Rightarrow (aa)\,b = (ab)\,a$, што преставува противуречност; b) $aa = a$ и $ab = b$, поради $(aa)\,b \neq (ab)\,a$, $\Rightarrow ba = a$, па во двата можни случаи за производот bb се добива директна противуречност; c) $aa = b$, $ab = a$ и $(aa)\,b \neq (ab)\,a \Rightarrow bb = a$, а во двата можни случаи за производот ba се добива директна противуречност; d) $aa = b$, $ab = b$ и $(aa)\,b \neq (ab)\,a \Rightarrow$ за производите bb и ba се можни само случаите $bb = a$, $ba = b$ и $bb = b$, $ba = a$, во секој од кои се добива директна противуречност.

2. 2. ТЕОРЕМА. Ако $\upsilon \geqslant 2$, релацијата A_2 е независна во M.

Доказ. Земајќи во предвид дека (x, x, x) и (x, x, z) се тривијални тројки за A_2, а $(x, y, z) \overset{A_2}{=} (y, x, z)$, базата на системот $\overline{A_2}(M)$ се состои од групоидите,

$(M,\cdot)_{1,3}$: $ba = b$, $xy=a$ кога x и y ги примаат значењата a и b, а $xy=c$ во сите други случаи,

$(M,\cdot)_{1,2\cdot3}$: $ac=a$, $xy=y$, кога x и y ги примаат значењата a, b и c, а $xy=d$ за сите други случаи,

од каде и следува доказот на теоремата.

2. 3. ТЕОРЕМА. Ако $\upsilon \geqslant 2$, релацијата A_3 е независна во M.

Доказ. Бидејќи (x, x, x) и (x, y, x) се тривијални тројки за A_3, а $(x, y, z) \overset{A_3}{=} (z, y, x)$, доказот на теоремата следува од примерите,

$(M,\cdot)_{1,2}$: $ba=b$, $xy=a$ кога x и y ги примаат значењата a и b, а $xy=c$ во сите други случаи,

$(M,\cdot)_{1,2,3}$: $ba=c$, $cb=b$, $xy=a$ за другите случаи кога x и y ги примаат значењата a, b и c, и $xy=d$ за сите други случаи,

кои ја сочинуваат базата на системот $\overline{A}_3$ (M).

2. 4. ТЕОРЕМА. Релацијата A_4 не е независна во M (спрема деф. за независност од т. 1), меѓутоа, ако $\upsilon>2$, секој пар тројки (x, y, z) и (y, z, x) е iA_4M; за $\upsilon=2$, iA_4M е само парот (x, y, x), (y, x, x).

Доказ. Доказот на првиот дел од теоремата следува од тоа што од било кои две од трите равенства $(xy)\,z=(yz)\,x$, $(yz)\,x=(zx)\,y$ и $(zx)\,y=(xy)\,z$ следува и третото од нив.

Нека го докажеме вториот дел од теоремата. Тројките (x, x, x) се тривијални, заради што не ги разгледуваме, а секој друг пар тројки (x, y, z) и (y, z, x), спрема тоа какво е υ, ќе го разгледаме поодделно:

1. $\upsilon=2$,

a) дека парот (a, b, a), (b, a, a) е iA_4M следува од примерот: $ba=b$, $xy=a$ за сите други случаи,

b) парот (a, a, b), (a, b, a) би бил iA_4M само во случајот $ba=a$, $xy=b$ за сите други случаи, но тогаш A_4 не е задоволена од (b, b, a),

c) парот (b, a, a), (a, a, b) би бил iA_4M само во случаите, (i) $aa=ba=a$, $ab=bb=b$; (ii) $aa=ba=bb=a$, $ab=b$; (iii) $aa=b$, $ab=ba=bb=a$; (iv) $aa=ba=b$, $ab=bb=a$ и (v) $aa=ab=ba=b$, $bb=a$, но во секој од тие случаи A_4 не е задоволена од тројката (b, b, a).

2. $\upsilon>2$, доказот на теоремата следува од примерите:

a) за парот (a, b, a), (b, a, a) таблицата од горниот пример ја прошириме со $xy=c$ за случаите што не се таму опфатени,

b) за парот (a, a, b), (a, b, a): $ab=b$, $ba=a$, $xy=c$ за сите други случаи,

c) за парот (b, a, a), (a, a, b): $aa=a$, $ab=b$, $xy=c$ за сите други случаи,

d) за парот (a, b, c), (b, c, a): $aa=bc=a$, $xy=c$ во другите случаи кога x и y ги примаат значењата a, b и c, и $xy=d$ во останатите случаи.

Бидејќи секој друг пар тројки (x, y, z), (y, z, x) со обична замена на симболите може да се доведе на еден од разгледаните, теоремата е докажана.

2. 5. ТЕОРЕМА. Ако $\upsilon\geqslant 2$, релацијата A_5 е независна во M.

Доказ. Ако определиме нова операција „o" во M со $xoy=y\cdot x$, доказот следува од теоремата 2.2, бидејќи $[A_5, o] \Longleftrightarrow [A_2,\cdot]$.

2. 6. ТЕОРЕМА. Релацијата A_6 е независна во M ако и само ако $\upsilon>2$. За $\upsilon=2$, ниедна тројка елементи од M не е iA_6M.

Доказ. Од теоремата 2. 1. и $[A_6, o] \Longleftrightarrow [A_1,\cdot]$.

2. 7. ТЕОРЕМА. Ако $\upsilon\geqslant 2$, релацијата A_7 е независно во M.

Доказ. Од теоремата 2. 3. и $[A_7, o] \Longleftrightarrow [A_3,\cdot]$.

2, 8. ТЕОРЕМА. Релацијата A_8 не е независна во M (според деф. од т. 1), меѓутоа, ако $\upsilon > 2$, секој пар тројки (x, y, z), (z, x, y) е iA_8M; за $\upsilon = 2$, iA_8M е само паротт (x, y, x), (x, x, y).

Доказ. Од теоремата 2. 3. и $[A_8, o] \Longleftrightarrow [A_4, \cdot]$.

3. Преминуваме на разгледување на релациите од групата B.

3. 1. ТЕОРЕМА. Релацијата B_1 е независна во M ако и само ако $\upsilon > 3$. За $\upsilon = 2$, ниедна тројка елементи од M не е iB_1M, а за $\upsilon = 3$, единствена тројка која не е iB_1M е тројката (x, x, x).

Доказ. Нека $\upsilon > 3$. Базата на системот $\overline{B}_1(M)$ ја сочинуваат групоидите:

$(M,\cdot)_1$: $aa = b$, $ba = c$, $xy = d$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{1,2}$: $aa = ab = a$, $bb = b$, $xy = c$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{1,3}$: $ab = b$, $xy = c$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{2,3}$: $ba = b$, $xy = c$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{1,2,3}$: $ab = b$, $xy = x$ кога x и y ги примаат значењата a, b и c, и $xy = d$ за сите други случаи.

Нека е сега $\upsilon \leqslant 3$. Секоја од тројките ќе ја разгледаме поодделно.

(a, a, a): од $(aa)a \neq a(aa) \Rightarrow aa \neq a$. Нека $aa = b$. Притоа, за $\upsilon = 2$ и $\upsilon = 3$, за производите ba и ab можни се само следните случаи: а) $ba = a$, $ab = b$; b) $ba = b$, $ab = a$; c) $ba = a$, $ab = c$; d) $ba = b$, $ab = c$; e) $ba = c$, $ab = a$ и f) $ba = c$, $ab = b$, во секој од кои се добива директна противуречност. На пример, во случајот e) е $c = ba = b(ab) = (bb)a = ((aa)b)a = (a(ba))a = a(a(ba)) = a((aa)b) = a(bb) = (ab)b = ab = a$. Ако $aa = c$, при замена на симболите b и c се добиваат истите случаи, па во овој случај доказот би се добил аналогно.

(a, a, b): $(aa)b \neq a(ba)$ $(*)$, $\upsilon = 2 \Rightarrow$ за производите aa и ba можни се само случаите: а) $aa = a$, $ba = a$; b) $aa = b$, $ba = a$; c) $aa = b$, $ba = b$. Но, во случајот а), поради $(*)$ е $ab = b$, а во случајот b) $bb = a$, после што лесно се добива директна противуречност. Во случајот c) се добива $bb = b(aa) = (ba)a = ba = (aa)a = a(aa) = ab$, што противуречи на $(*)$.

(a, b, a): $(ab)a \neq a(ab) \Rightarrow ab \neq a$, па за $\upsilon = 2$ е можен само случајот $ab = b$, $ba = a$ во кој се добива противуречноста $b = ab = (ba)b = b(ba) = ba = a$.

(a, b, b): $(ab)b \neq a(bb)$, $\upsilon = 2 \Rightarrow$ за производите ab и bb се можни само случаите: а) $ab = a$, $bb = a$; b) $ab = b$, $bb = a$, во секој од кои се добива $aa = b$, после што во секој од нив се добива и директна противуречност.

3. 2. ТЕОРЕМА. Релацијата B_2 е независна во M ако и само ако $\upsilon > 3$. За $\upsilon = 2$ ниедна тројка елементи од M не е iB_2M; за $\upsilon = 3$ единствена тројка што не е iB_2M е тројката (x, x, x).

Доказ. Од теоремата 3. 1. и $[B_2, o] \Longleftrightarrow [B_1, \cdot]$.

3. 3. ТЕОРЕМА. Релацијата B_3 е независна во M ако и сама ако $\upsilon > 5$. За $\upsilon = 2$ ниедна тројка елементи од M не е iB_3M; за $\upsilon = 3$ iB_3M се само тројките (x, y, z) за кои е $x = z \neq y$ и $x \neq y = z$, а за $\upsilon = 4,5$ единствена тројка што не е iB_3M е тројката (x,y,z) при која x, y и z се взаимно различни.

Доказ. Ако $\upsilon > 5$, базата на системот $\bar{B}_3(M)$ ја сочинуваат групоидите:

$(M,\cdot)_1$: $aa=b$, $ba=c$, $xy=d$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{1,2}$: $aa=a$, $ab=c$, $xy=d$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{1,3}$: $ab=b$, $xy=c$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{2,3}$: $ab=a$, $xy=c$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{1,2,3}$: $ab=d$, $dc=e$, $xy=f$ за сите други случаи.

Нека е сега $\upsilon \leqslant 5$.

(a, a, a): $(aa)a \neq a(aa) \Rightarrow aa \neq a$. При $\upsilon = 2,3$, ако $aa = b$, во секој од шесте можни случаи за производите ab и ba се добива директна противуречност. Ист е случајот и за $aa = c$.

(a, a, b): $(aa)b \neq b(aa) \Rightarrow aa \neq b$. За $aa = a$, спрема тоа е $ab \neq ba$. За $\upsilon = 2,3$, во секој од шесте можни случаи за производите ab и ba се добива директна противуречност. При $\upsilon = 2,3$, при $aa = c$, поради $cb \neq bc$, за овие производи се можни само шест случаи, во секој од кои се добива директна противуречност.

(a, b, a): $(a\ )\,a \neq a\,(ab) \Rightarrow ab \neq a$, поради што, за $\upsilon = 2$ е можен само случајот $ab=b$, $ba=a$, во кој се добива противуречноста $b = ab = (ba)b = b(ba) = ba = a$.

(a, b, b): $(ab)\,b \neq b\,(ab) \Rightarrow ab \neq b$, поради што, за $\upsilon = 2$ е можен само случајот $ab=a$, $ba=b$, од каде се добива противуречноста $b = ba = (ba)a = a(ba) = ab = a$.

(a, b, c): $(ab)c \neq c(ab)$ $(*)$ $\Rightarrow$ при $\upsilon \leqslant 5$, за проивводот ab се можни само следните случаи: a) $ab = a$; b) $ab = b$; c) $ab = d$; d) $ab = e$. Во првите два случаи се добива наеднаш директна противуречност. Во случајот c), поради $(*)$ е $dc \neq cd$, па ако за производот dc се избере едно од значењата a, b, c и d, се добива директна противуречност; на пример, за $dc = a$ е $cd = c(ab) = c((dc)b) = c(b(dc)) = (b(dc))c = ((dc)b)c = (ab)c = dc$, а за $dc = c$, $cd = (dc)d = d(dc) = dc$. Во случајот c) за $dc = e$, за производот cd може да се избере само едно од значењата a, b, c и d, за секое од кои се добива директна противуречност. Случајот d) се сведува на c) ако d и e си ги разменат местата, па доказот во тој случај се добива аналогно на претходниот.

3. 4. ТЕОРЕМА. Релацијата B_4 е независна во M ако и само ако $\upsilon > 5$. За $\upsilon = 2$ ниедна тројка елементи од M не е iB_4M; за $\upsilon = 3$ единствена iB_4M тројка е тројката (x, y, z) за која $x \neq y = z$; за $\upsilon = 4$ не се iB_4M само тројките (x, y, z) при кои е $x = z \neq y$ и $x \neq y \neq z \neq x$, а за $\upsilon = 5$ единствена не iB_4M тројка е (x, y, z) при која x, y и z се взаемно различни.

Доказ. За $\upsilon > 5$, доказот следува од примерите:

$(M,\cdot)_1$: $aa=b$, $ba=c$, $xy=d$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{1,2}$: $aa=a$, $ab=c$, $xy=d$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{1,3}$: $ab=c$, $ca=d$, $xy=e$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{2,3}$: $ab=a$, $xy=c$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{1,2,3}$: $ab=d$, $dc=e$, $xy=f$ за сите други случаи,

од кои се состои базата на системот $\bar{B}_4(M)$.

За $\upsilon\leqslant 5$, разгледуваме пооделно секоја тројка.

(a, a, a): $(aa)a\neq a(aa)$ $=>$ $aa\neq a$. За $\upsilon=2,3$, при $aa=b$, за производите ab и ba се можни случаите: а) $ba=a$, $ab=b$; b) $ba=b$, $ab=a$; c) $ba=a$, $ab=c$; d) $ba=b$, $ab=c$; e) $ba=c$, $ab=a$; f) $ba=c$, $ab=b$. Во секој од случаите а), b) с) и е) се добива наеднаш директна противуречност. Во случаите d) и f) треба да се земат сите можности за производот bb ($bb=a, b, c$), после што пак се добива директна противуречност. Ако $aa=c$, доказот се добива аналогно.

(a, a, b): $(aa)\,b\neq b\,(aa)$ $=>$ $aa\neq b$. За $\upsilon=2,3$, при $aa=a$, поради $ab\neq ba$, за овие производи се можни случаите: а) $ab=a$. $ba=b$; b) $ab=b$, $ba=a$; c) $ab=a$, $ba=c$; d) $ab=b$, $ba=c$; e) $ab=c$, $ba=a$; f) $ab=c$, $ba=b$. Во првите два случаја лесно се добива директна противуречност. Ако за производот bb се земаат во предвид сите значења a, b и c, и во последните четири случаи се добива директна противуречност. За $aa=c$, во случаите $cb=a$, $bc=c$ и $cb=c$, $bc=a$ треба да се земат во предвид трите можности (a, b и c) за производот bb, после што ќе се добие директна противуречност, а во останатите четири можни случаи за производите cb и bc се добива наеднаш директна противуречност.

(a, b, a): $(ab)a\neq a(ba)$ $(*)$ $=>$ при $\upsilon=2,3,4$, за производите ab и ba се можни само следните случаи: а) $ab=a$, $ba=b$; b) $ab=b$, $ba=a$; c) $ab=a$, $ba=c$; d) $ab=b$, $ba=c$; e) $ab=c$, $ba=a$; f) $ab=c$, $ba=b$; g) $ab=c$, $ba=c$; h) $ab=a$, $ba=d$; i) $ab=b$, $ba=d$; j) $ab=c$, $ba=d$; k) $ab=d$, $ba=a$; l) $ab=d$, $ba=b$; m) $ab=d$, $ba=c$ и n) $ab=d$, $ba=d$. Во случаите а), b), c), e), f), g), h), к) и n) се добива наеднаш директна противуречност. На пример во случајот f) е $(ab)\,a=(a\,(ba))\,a=(a\,((ba)\,a))\,a=(a\,(a\,(ab)))\,a=(a\,(ac))\,a=((ca)\,a)\,a=a\,((ac)\,a)=a\,(ba)$, што противуречи на $(*)$. Во скучајот d) $(*)$ $=>$ $ac\neq c$, а при $ac=a$ и $ac=b$ се добива пак директна противуречност, при $ac=d$ се добива $ca=b$, после што пак имаме противуречност. Во случајот i) $(*)$ $=>$ $ad\neq d$; $ad=a$ и $ad=b$ $=>$ директна противуречност, а $ad=c$ $=>$ $da=b$, после што се побива директна противуречност. Во случајот j) $(*)$ $=>$ $ca\neq ad$; за $ca=a$ и $ca=b$ се добива директна противуречност, за $ca=c$, ако $ad=a$ и $ad=b$ пак се добива директна противуречност, а за $ad=d$ се добив $ac=d$, а после тоа и директна противуречност; за $ca=d$ ги разгледуваме можностите за производот ad, притоа, $ad=a$ $=>$ $da=d$; $ad=b$ $=>$ $da=d$ и $ad=c$ $=>$ $da=d$, после кое во секој од тие случии се добива директна противуречност. Во случајот l) $(*)$ $=>$ $da\neq d$; $da=a$ и $da=b$ $=>$ директна противуречност, а $da=c$ $=>$ $ac=b$, после што се добива пак директна противуречност. На крајот, во случајот m) $(*)$ $=>$ $da\neq ac$; $ac=a$ и $ac=b$ $=>$ директна противуречност, при $ac=c$, ако за da се земат сите можни значења (a, b и d) се добива директна противуречност; истоот се добива и при $ac=d$, ако за da се земат сите можни значења.

(a, b, b): $(ab)b \neq b(ba)$, $\upsilon = 2$ $\Rightarrow$ за производите ab и ba се можни само значењата: $ab=a$, $ba=b$ и $ab=b$, $ba=a$, за секое од кои се добива директна противуречност.

(a, b, c): $(ab)c \neq c(ba)$ $(*)$. Ќе ги разгледаме сите можности за производите ab и ba, земајќи $\upsilon \leqslant 5$. За $ab=d$, $ba=e$, $(*)$ $\Rightarrow$ $dc=ce$. За $dc=a$, $dc=b$ и $dc=c$ се добива наеднаш директна противуречност. За $dc=d$, во секој од случаите $ce=a$, $ce=b$ и $ce=c$ се добива дирекна противуречност, а при $ce=e$ се добива доректна противуречност ако $cd=e$, што лесно се добива: $cd = c(dc) = (cd)c = (c(ab))c = ((ba)c)c = (ec)c = c(ce) = ce = e$. За $dc=e$ имаме потполна аналогија со претходниот случај. При $ab=e$, $ba=d$, разгледувањето и резултатите се исти со случајот $ab=d$, $ba=e$. Во сите останали случаи за производите ab и ba се добива наеднаш директна противуречност.

3. 5. *ТЕОРЕМА. Релацијата B_5 е независна во M ако и само ако $\upsilon > 5$. За $\upsilon=2$ ниедна тројка елементи од M не е iB_5M, за $\upsilon=3$ единствена тројка iB_5M е тројката (x, y, z) за која $y = z \neq x$, а за $\upsilon=4,5$ единствена не iB_5M тројка е (x, y, z) за која x, y и z се взаемно различни.*

Доказ. За $\upsilon > 5$ доказот следува од групоидите:

$(M,\cdot)_1$: $aa=b$, $ba=c$, $xy=d$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{1,2}$: $aa=a$, $ab=c$, $xy=d$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{1,3}$: $aa=a$, $ba=c$, $xy=d$ за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{2,3}$: $ab=a$, $xy=c$, за сите други случаи,

$(M,\cdot)_{1,2,3}$: $ab=d$, $dc\neq e$, $xy=f$ за сите други случаи.

Кога $\upsilon \leqslant 5$, доказот следува од наредните разгледувања:

(a, a, a): $(aa)a \neq a(aa)$ $\Rightarrow$ $aa \neq a$. Нека $aa = b$ и $\upsilon=3$. Во случаите $ba=b$, $ab=c$ и $ba=c$, $ab=b$ $\Rightarrow$ $bb=c$ после што се добива директна противуречност; во случајот $ba=c$, $ab=a$ $\Rightarrow$ $cb=a$, $ac=b$, од каде се добива пак директна противуречност, а во останалите три можни случаи за производите ba и ab се добива наеднаш директна противуречност. За $aa=c$ разгледувањето е аналогно на претходното.

(a, a, b): $(aa)b \neq a(ba)$ $(*)$. Ќе ги разгледаме производите aa и ba: a) $aa=a$, $ba=a$ $\Rightarrow$ $ab=a$, што противуречи на $(*)$; b) $aa=a$, $ba=b$ не е можно поради $(*)$; c) $aa=a$, $ba=c$ $\Rightarrow$ за $ab=a$ и $ab=c$ директна противуречност, а за $ab=b$, за секоја од трите можности за производот ac се добива директна противуречност; d) $aa=b$, $ba=a$ $\Rightarrow$ $ab=a$, после што и $bb=b$ што противуречи на $(*)$; e) $aa=b$, $ba=b$ $\Rightarrow$ $ab=b$, после што $\Rightarrow$ противуречноста $bb=b$; f) $aa=b$, $ba=c$ $\Rightarrow$ $ab=c$, после кое се добива директна противуречност; g) $aa=c$, $ba=a$ $\Rightarrow$ $cb \neq c$, но при $cb=a$ во секој од случаите $bb=a$, $bb=b$, $bb=c$ се добива директна противуречност, а за $cb=b$ се добива $ab=ac=ca=a$ и $bc=bb=c$, после кое лесно се добива и противуречност; h) $aa=c$, $ba=b$ $\Rightarrow$ $cb \neq ab$; при $ab=a$ и $ab=b$ се добива и $cb=a$, односно $cb=b$, а за $ab=c$ и во двата можни случаи $cb=a$, $cb=b$ се добива противуречност; i) $aa=c$, $ba=c$, ги разгледуваме трите можности за производот cb; $cb=a$ $\Rightarrow$ $ca=ac=a$ $\Rightarrow$ противуречност, $cb=b$ и $bb=a$, односно $bb=b \Rightarrow$ противуречноста $b=c$, а $cb=b$ и $bb=c \Rightarrow ac=b$ што противуречи на $(*)$; $cb=c \Rightarrow ac \neq c$, но и во двата можни случаи $ac=a$ и $ac=b$ се добива противуречност.

(a, b, a): $(ab)a \neq b(aa)$ $(*)$. Ако ги разгледаме сите можности за производите ab и aa, добиваме: a) $ab=a$, $aa=a \Rightarrow ba=a$, што противуречи на $(*)$; b) $ab=a$, $aa=b \Rightarrow bb=b$, што противуречи на $(*)$; c) $ab=a$, $aa=c \Rightarrow bc \neq c$, но и во двата елучаи $bc=a$ и $bc=b$ се добива противуречност; d) $ab=b$, $aa=a$ директно противуречи на $(*)$; e) $ab=b$, $aa=b \Rightarrow ba=b$, а после и $bb=b$, што преставува противуречност со оглед на $(*)$; f) $ab=b$, $aa=c \Rightarrow ba \neq bc$; при $ba=a$, односно $ba=c$ се добива противуречноста $b=c$, а при $ba=b$ се добива $bc=b$ што исто така преставува противуречност; g) $ab=c$, $aa=a \Rightarrow ca \neq ba$, но за секоја од можностите за ba се добива $ba=ca$; h) $ab=c$, $aa=b \Rightarrow bb=ca$ што противуречи на $(*)$; i) $ab=c$, $aa=c \Rightarrow ca \neq bc$, но за секоја можност за производот ca се добива $bc=ca$.

(a, b, b): $(ab)b \neq b(ba)$ $(*)$. За $\upsilon=2$, за производите ab и ba се можни само случаите a) $ab=a$, $ba=a$ кое директно противуречи на $(*)$; b) $ab=a$, $ba=b \Rightarrow bb \neq a$, но при $bb=b$ се добива противуречноста $a=b$; c) $ab=b$, $ba=a \Rightarrow bb \neq a$, али при $bb=b$ пак добиваме како во претходниот случај $a=b$; d) $ab=b$, $ba=b$ директно противуречи на $(*)$.

(a, b, c): $(ab)c \neq b(ca)$ $(*)$. Нека $\upsilon \leqslant 5$ и нека ги разгледаме производите ab и ca.

1. $ab=a$, $ca=d$, За $bc \neq c$ се добива $bd=b(ca)=b(c(ab))=b((bc)a)=$ $=(ab)(bc)=(c(ab))b=((bc)a)b=a(b(bc))=a((cb)b)=(ba)(cb)=(b(ba))c=((ab)b)c=$ $=(ab)c=ac$, што противуречи на $(*)$. При $bc=c \Rightarrow ac=db$. Нека ги разгледаме сите можности за овие производи: $ac=db=a \Rightarrow bd=a$, $ac=db=b$ $\Rightarrow bd=b$, $ac=db=c \Rightarrow d=c$, $ac=db=d \Rightarrow bd=d$, $ac=db=e \Rightarrow e=a$, во секој од кои е добиена противуречност.

2. $ab=d$, $ca=a$. За $bc \neq b$ се добива $dc=ba$, што противуречи на $(*)$. При $bc=b$, ако се разгледаат сите можности за производот ba, се добива пак противуречност, земајќи во предвид $(*)$, како што следува: $ba=a$ и $bb \neq b$ $\Rightarrow dc=a$; $ba=a$ и $bb=b \Rightarrow cb=b$, а после тоа и $dc=a$; $ba=b \Rightarrow cb=b$, а потоа и $dc=b$; $ba=c \Rightarrow cd=c$, од каде и $dc=c$; $ba=d \Rightarrow dc=d$; $ba=e$ $\Rightarrow cd=e$, од каде, замајќи ги во предвид сите можности за производот dc, добиваме: $dc=a \Rightarrow ac=a \Rightarrow d=a$, $dc=b \Rightarrow ad=d \Rightarrow e=b$, $dc=c$ $\Rightarrow db=b \Rightarrow e=d$ и $dc=d \Rightarrow e=d$.

3. $ab=a$, $ca=a$. За $bc \neq c$ добиваме: $ba=b(ca)=b(c(ab))=b((bc)a)=$ $(ab)(bc)=a(bc)=(ca)b=ab=a$, $ac=(ba)c=a(cb)=(ba)(cb)=a((cb)b)=a(b(bc))=$ $=((bc)a)b=(c(ab))b=(ca)b=ab=a$, што со оглед на $(*)$ преставува противуречност. На сличен начин се добива противуречност и за $bc=c$.

4. $ab=d$, $ca=d$. Ги разгледуваме сите можности за производот dc: $dc=a \Rightarrow ba=d$, а потоа и $cd=a$, односно $bd=a$; $dc=b \Rightarrow bd=cd$, а после тоа и $db=b$, $bd=b$; $dc=c$ и $ad \neq a \Rightarrow bd=c$, а $dc=c$ и $ad=a \Rightarrow$ $cd=db$, после што и $ba=d$ и $bd=c$; $dc=d \Rightarrow bd=db$, а потоа и $cd=d$, $bd=d$; при $dc=e$ ги разгледуваме сите можности за производот bd, за секоја од кои се добива противуречност: $bd=a \Rightarrow eb=d$ и $bd=e$; $bd=b$ и $da \neq a$ $\Rightarrow e=b$, а $bd=b$ и $da=a \Rightarrow ad=a$, после што и $e=b$; $bd=c \Rightarrow e=c$; $bd=d \Rightarrow be=d$, $db=d$ и $e=d$.

5. $ab = d$, $ca = e$. Ќе ги разгледаме сите можности за производот dc.

a) $dc = a \Rightarrow be = a$, што противуречи на $(*)$.

b) $dc = b \Rightarrow cd = b$, а потоа и $be = b$, што противуречи на $(*)$.

c) $dc = c$ и $ad \neq a \Rightarrow be = c$, што противуречи на $(*)$, а $dc = c$ и $ad = a \Rightarrow da = a$, после што се добива пак противуречност: $be = c$.

d) при $dc = d$ ги разгледуваме сите можности за производот be: $be = a \Rightarrow d = a$; $be = b$ и $ea \neq a \Rightarrow d = b$, а $be = b$ и $ea = a \Rightarrow da = d$, $bc = d$, $cd = d$, $eb = d$, а после тоа и $b = d$; $be = c \Rightarrow ed = e$, $ad = e$, $eb = d$, $cd = d$, а на крајот и $d = c$; $be = e \Rightarrow bd = e$, $ec = d$, $db = ce$, после што се добива $e = d$.

e) за $dc = e$ ги разгледуваме пак сите можности за производот be: $be = a \Rightarrow e = a$; $be = b \Rightarrow ea = d$, $cd = e$, а потоа и $e = b$; $be = c \Rightarrow eb = e$, $ed = e$, $ea = c$, а на крајот и $e = c$; $be = d \Rightarrow ec = e$, $ce = e$, $eb = e$, како и $e = d$.

Така е покажано дека во секој од разгледуваните случаи за производот dc се добива противуречност.

Во сите останати случаи за производите ab и ca, или лесно се добива противуречност, или се сведуваат на веќе разгледаните случаи при замената на симболите e и d. На пример во случајот $ab = a$, $ca = b$ се добива, $bb = (ca)\,b = a\,(bc) = a\,((ca)c) = a\,(a(cc)) = ((cc)a)\,a = (c(ac))\,a = (ac)(ac) = c\,((ac)a) = c\,(c(aa)) = ((aa)c)\,c = (a(ca))\,c = (ab)\,c = ac$, што противуречи на $(*)$.

Со тоа теоремата е докажана.

4. Во една друга работа (Über die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen kommutativer multiplikativer Strukturen, Acta Sci. Math., Szeged, 15 (1953), 130 — 142), G. Szàsz ја разгледува независноста на релацијата за асоцијативност кога определената во M операција е комутативна, т. е. $xy = yx$ за секои $x, y \in M$. Во случај на комутативност на определената во M операција, релациите A_2, A_5, B_3 и B_4 се тривијално задоволени од секоја тројка елементи од M, а останатите релации се сведуваат на релацијата за асоцијативност, па за нив важат резултатите добиени од G. Szàsz во погоре спомената работа. Во овој смисол, овде би биле од интерес испитувањата на независноста на некоја од наведените релации при услов да секоја тројка елементи од M задоволуваат некоја друга од разгледуваните релации.

SUR L'INDEPENDANCE DE SERTAINES RELATIONS

B. Trpenovski

Résumé

On étudie ici la question d'indépendance des relations:

A: 1. $(xy)z = (xz)y$, 2. $(xy)z = (yx)z$, 3. $(xy)z = (zy)x$, 4. $(xy)z = (yz)x$,
5. $x(yz) = x(zy)$, 6. $x(yz) = y(xz)$, 7. $x(yz) = z(yx)$, 8. $x(yz) = y(zx)$ e[t]

B: 1. $(xy)z = x(zy)$, 2. $(xy)z = y(xz)$, 3. $(xy)z = z(xy)$,
4. $(xy)z = z(yx)$, 5. $(xy)z = y(zx)$,

d'une manière pareille à celle-ci que G. Szàsz emploie dans son travail „Die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen" (Acta Sci. Math., Szeged 15 (1953), 20-28) sur la relation d'associativité.

Soit E un ensemble de ν éléments et R une des relations dites plus haut. Les ternes (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) $a_i, b_i, c_i \in E$, sont dits semblables par rapport à R (on l'écrit $(a_1, b_1, c_1) \overset{R}{=} (a_2, b_2, c_2)$), si les $R(a_1, b_1, c_1)$ et $R(a_2, b_2, c_2)$ donnent la même égalité. Par exemple: $(a, b, c) \overset{A_1}{=} (a, c, b)$. Le terne (a, b, c) est dit isolable par rapport à R dans E si on peut trouver un groupoïde $(E, \cdot)$ dans lequel $R(x, y, z)$ est vrai pour, et seulement pour tous les ternest $(x, y, z) \overset{R}{\neq} (a, b, c)$. La relation R est dite indépendante dans E si chacun des ternes (a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (a, b, c), $a \neq b \neq c \neq a$, seuf ceux pour qui le R est trivialement vrai, est isolable par rapport à R dans E; si $\nu = 2$ on ne tient pas compte de (a, b, c).

On y montre que lesdites relations, sauf A_4 et A_8, sont indépendantes dans E si, et seulement si $\nu > k$, où:

$k = 1$ pour A_2, A_3, A_5 et A_7,
$k = 2$ pour A_1 et A_6,
$k = 3$ pour B_1 et B_2 et
$k = 5$ pour B_3, B_4 et B_5.

En ce qui concerne le cas particulier de A_4 et A_8 il vient que: $A_4(x, y, z)$ et $A_4(y, z, x) \Rightarrow A_4(z, x, y)$, $A_8(x, y, z)$ et $A_8(z, x, y) \Rightarrow A_8(y, z, x)$; mais la paire (x, y, z) et (y, z, x) est isolable par rapport à A_4 dans E, et la paire (x, y, z) et (z, y, x) est isolable par rapport à A_8 dans E si, et seulement si $\nu > 2$.