ЗА ДИСТРИБУТИВНИТЕ СИСТЕМИ

Ѓ. Чупона

Увод. Поимот за *полни дистрибутивни системи* е воведен од Белоусов во работата [1], каде што тој даде и потполна карактеристика на системите од тој вид. Овде даваме едно природно обопштуваме на тој поим и, користејќи ги основните резултати од работата [1], даваме карактеристика на тие обопштени системи.

Нека M е некое множество. Велиме дека е дадена една n-арна *операција* A над M, ако секоја n-орка елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$, земени во дадениот распоред, со A се пресликува во еден елемент $y \in M$; при тоа пишуваме $y = A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Нека множеството M има барем три различни елементи. За системот финитарни операции Π велиме дека е *полн дистрибутивен систем* (пишуваме пдс) над M ако: 1° сите операции од Π се *десно инверзибилни* во M; 2° за секоја двојка операции $A, B \in \Pi$ е $A\,d\,B$; 3° за секоја тројка, два по два различни, елементи $a, b, c \in M$ постои операција $A \in \Pi$ таква да $A(a, a, \ldots, a, b) = c$.

При тоа, велиме дека A е *десно инверзибилна* во M ако равенката $A(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) = a_n$ е *еднозначно решлива* по x во M за секоја n-орка елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$; A е *дистрибутивна од лево* спрема B (пишуваме AdB) ако е точно равенството

$$A(x_1, \ldots, x_{n-1}, B(y_1, \ldots, y_m)) = B(A(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1), \ldots, A(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_m))$$

за било кои $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_m \in M$.

Ќе дадеме прво два примера за пдс-и, а потоа ќе го изнесеме основниот резултат на оваа работа, од кој се гледа дека со тие примери се исцрпени сите можни пдс-и.

Пример 1. Нека $P = (M; \cdot, +)$ е едно комутативно поле. Со $\Pi_n(P)$ го означуваме системот n-арни операции определен на следниот начин:

а) $\Pi_1(P)$ се состои само од идентичната унарна операција E којашто е определена со $E(x) = x$.

б) Нека $n > 1$, $a \in M$ и $B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, C_2, C_3, \ldots, C_{n-1}$ нека е една низа операции над M, при што B_i и C_i се $n-i-1$ -арни; спрема тоа, за $n = 2$ таа низа е празна, а во секој случај B_{n-1} и C_{n-1} се константи, т. е. фиксни елементи од M. Ја определуваме n-арната операција A со:

(1) $A\ (x, x, \ldots, x, y) = (1-a)\,x + ay,$

(2) $A\ (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_n + (x_i - x_n)\, B_i\left(\frac{x_{i+1}-x_1}{x_i-x_1}, \frac{x_{i+2}-x_1}{x_i-x_1}, \ldots, \frac{x_{n-1}-x_1}{x_i-x_1}\right)$

$$+ (x_1 - x_n)\, C_i\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{x_1-x_i}, \frac{x_{i+2}-x_i}{x_1-x_i}, \ldots, \frac{x_{n-1}-x_i}{x_1-x_i}\right),$$

каде x_i е првиот член од низата $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ различен од x_1. Со $\Pi_n(P)$ го означуваме множеството од сите n-арни операции што можат да се добијат на тој начин. Спрема тоа, $\Pi_2(P)$ ги содржи сите операции A од облик $A(x, y) = (1-a)\,x + ay$.

Со малу пообимна работа, може да се провери дека е AdA' за било кои $A \in \Pi_n(P)$, $A' \in \Pi_m(P)$. Ако е $a = 0$ или пак ако за некое i и некоја низа $y_1, y_2, \ldots, y_{n-i-1}$ е точно равенството

$$B_i\ (y_1, y_2, \ldots, y_{n-i-1}) + C_i\ (1-y_1, 1-y_2, \ldots, 1-y_{n-i-1}) = 1,$$

операцијата A определена со (1) и (2) нема да биде десно инверзибилна, бидејќи равенката $A\ (b, b, \ldots, b, x) = c$ за $c \neq b$, во првиот случај, а $A(0, \ldots, 0, 1, y_1, y_2, \ldots, y_{n-i-1}, x) = c$ за $c \neq B_i\,(y_1, y_2, \ldots, y_{n-i-1})$, во вториот случај, нема решение по x во M. Системот $\Pi^*_n(P)$*) за $n > 1$, ако M има барем три различни елементи, е пдс. Системот $\Pi^*(P) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi^*_n(P)$, а и секој негов подсистем што го задоволува условот 3°, е пдс.

Пример 2. Нека $G = (M; \cdot)$ е една група. Со $\Pi_n\ (G)$ го означуваме системот од n-арни операции определени на следниот начин:

а) $\Pi_1\ (G)$ се состои од сите транслации со елементи од центарот на групата, т. е. за секоја операција $A \in \Pi_1(G)$ постои $a \in M$, така да $A\ (x) = ax = xa$.

б) Нека е $n > 1$, а B било која n-2 -арна операција над M; при тоа, за $n = 2$ B е константа т. е. фиксен елемент од M. $\Pi_n\ (G)$ се состои од сите n-арни операции A со облик:

(3) $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n\ x_1^{-1}\ B(x_2\ x_1^{-1}, x_3\ x_1^{-1}, \ldots, x_{n-1}\ x_1^{-1})\ x_1.$

Спрема тоа, за $n = 2$ имаме $A\ (x, y) = yx^{-1}\ ax$, каде a е фиксен елемент од M.

Очигледно е дека сите операции од $\Pi_n(G)$ се десно инверзибилни и дека, ако M има повеќе од два елемента и $n > 1$, за секоја тројка $a, b, c \in M$ постои операција $A \in \Pi_n(G)$ таква да $A\,(a, a, \ldots, a, b) = c$. Лесно се покажува и дека е AdA' за било кои $A \in \Pi_n(G)$ и $A' \in \Pi_m(G)$. Значи, за $n > 1$, ако M има барем три елементи, $\Pi_n(G)$ е пдс. Системот $\Pi\,(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n(G)$, а и секој негов подсистем што го задоволува условот 3°, е пдс над M.

---

*) Што ги содржи сите десно инверзибилни операции од $\Pi_n\ (P)$.

Главен резултат на оваа работа е следната

Теорема. *Нека* Π *е пдс над* M. *Ако* $A(x, x, \ldots, x) = x$, *за секое* $x \in M$ *и* $A \in \Pi$, *постои комутативно поле* $P = (M; \cdot, +)$ *такво да* $\Pi \subseteq \Pi^*(P)$; *при тоа,* $\Pi^*(P)$ *е максималниот пдс над* M, *во кој се содржи* Π, *т. е. секој пдс во кој се содржи* Π *е подсистем на* $\Pi^*(P)$; *полето* P *е еднозначно, до изоморфизам, определено од системот* Π. *Обратно, ако е* $A(a, a, \ldots, a) \neq a$ *за некое* $a \in M$ *и* $A \in \Pi$, *постои група* $G = (M; \cdot)$ *таква да е* $\Pi \subseteq \Pi(G)$; $\Pi(G)$ *е максималниот пдс над* M *во кој се содржи* Π; *и во овој случај, групата* G *е еднозначно до изоморфизам определена од* Π.

При докажувањето на таа теорема се користат главните резултати од спомнатата работа на Белоусов.

1. Овде, во една лема, ќе ги формулираме основните резултати од работата [1], кои што се користат при докажувањето на изнесената теорема.

Лема 1. 1. *Бинарните пдс -и се делат на две класи: идемпотентни и неидемпотентни; во првиот случај е* $A(x, x) = x$ *за секое* $x \in M$ *и* $A \in \Pi$, *а во вториот* $A(x, x) \neq x$ *за секое* $x \in M$ *и* $A \in \Pi$ *ако* $A \neq E_2$ *(каде* E_2 *е определена со* $E_2(x, y) = y$). *Ако* Π *е идемпотентен пдс над* M, *постои поле* $P = (M; \cdot, +)$, *еднозначно определено од* Π *до изоморфизам, такво да е* $\Pi = \Pi^*_2(P)$. *Обратно, ако* Π *е неидемпотентен пдс над* M, *постои група* $G = (M; \cdot)$, *исто така еднозначно до изоморфизам определена од* Π, *таква да* $\Pi = \Pi_2(G)$ ([1], *стр.* 494, 495, 498, 499).

2. Сега ќе поминеме на доказот од изнесената теорема; тоа ќе го направиме со помош на неколку леми.

Нека $i_{11}\ i_{12} \cdots i_{1r_1}\ i_{21}\ i_{22} \cdots i_{2r_2} \cdots\cdots, i_{s1}, i_{s2} \cdots i_{sr_s}$

е една пермутација на низата 1, 2, 3, . . . , n-1, и нека ставиме

$$x_{i_{11}} = x_{i_{12}} = \cdots = x_{i_{1r_1}} = y_1, \cdots, x_{i_{s1}} = \cdots = x_{i_{sr_s}} = y_s,\ x_n = y_{s+1}.$$

На секоја n-арна операција A и пермутација од тој облик, можеме да ѝ придружиме една операција A' определена со

$$A'(y_1, y_2, \ldots, y_s, y_{s+1}) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Лема 2. 1. *Нека* A' *е операција добиена од* A *на горниот начин. Од* AdB, CdA *следува* $A'dB$, CdA', $A'dB'$, $C'dA'$; *во специјален случај значи, од* AdA *следува* $A'dA'$. *Ако* A *е десно инверзибилна операција над* M *таква е и* A'.

Доказот е очевиден.

Нека Π е пдс над M. Спрема дефиницијата на пдс-и, Π содржи n-арни операции за $n \geqslant 2$. Затоа на Π можеме да му придружиме еден бинарен систем Π' кој се состои од операциите A' определени со $A'(x, y) = A(x, x, \ldots, x, y)$ каде $A \in \Pi$. Точна е следната:

Лема 2. 2. *Ако* Π *е пдс над* M, *тогаш* Π' *и* $\Pi \cup \Pi'$ *се исто така пдс-и над* M.

Навистина, од лемата 2. 1 следува дека ако Π ги задоволува условите 1° у 2°, нив ги задоволуваат Π' и $\Pi \cup \Pi'$, а очевидно е дека Π го задоволува условот 3° ако и само ако го задоволува и Π'.

За пдс Π ќе велиме дека е идемпотентен ако е идемпотентен соодветниот бинарен систем Π', а неидемпотентен — во спротивниот случај. Од лемите 1. 1, 2. 1 и 2. 2, непосредно, следуваат следните две леми:

Лема 2. 3. *Ако Π е идемпотентен пдс над M, постои поле $P=(M;\cdot,+)$, еднозначно до изоморфизам определено од Π, такво да е $\Pi'=\Pi_2^*(P)$; при тоа, $\tilde{\Pi}=\Pi\cup\Pi'$ е исто така идемпотентен пдс над M.*

Лема 2. 4. *Ако Π е неидемпотентен пдс над M, постои група $G=(M;\cdot)$, еднозначно до изоморфизам определена од Π, таква да $\Pi'=\Pi_2(G)$; при тоа $\Pi^*=\Pi\cup\Pi'$ е исто така неидемпотентен пдс над M.*

Ќе ги разгледаме сега идемпотентните пдс -и.

Лема 2. 5. *Нека Π е идемпотентен пдс над M, а P соодветното поле. Секоја операција A ги задоволува следните идентитети:*

(4) $A(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, (1-u)x+uy)=(1-u)A(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x)+$
$+uA(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y)$;

(5) $A(ux_1, ux_2, \ldots, ux_n)=uA(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

(6) $A(u+x_1, u+x_2, \ldots, u+x_n)=u+A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Доказ. Идентитетите (4) и (5) следуваат од тоа што $\Pi\cup\Pi_2(P)$ е пдс; имено, ако ставиме $B(x, y)=(1-u)x+uy$ ќе имаме $B\in\Pi_2(P)$, па значи и AdB, BdA. Од AdB следува (4), а од BdA, ако ставиме $x=0$, $y=A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ се добива (5). Нека сега претпоставиме дека $a \neq 0, 1$; ставајќи $B(x, y)=$ $=(1-a)x+ay$, поради BdA, добиваме

$$\begin{aligned} u+A(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (1-a)\frac{u}{1-a}+a\,A\left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, \ldots, \frac{x_n}{a}\right) \\ &= A\left((1-a)\frac{u}{1-a}+a\frac{x_1}{a}, (1-a)\frac{u}{1-a}+a\frac{x_2}{a},\right. \\ &\qquad \left. \ldots, (1-a)\frac{u}{1-a}+a\frac{x_n}{a}\right) \\ &= A(u+x_1, u+x_2, \ldots, u+x_n), \end{aligned}$$

т. е. точноста на (6). Со тоа е покажавме точноста на лемата.

Лема 2. 6. *Нека $P=(M;\cdot,+)$ е комутативно поле. Системот операции $\Pi(P)$ е општо решение на системот фукционални равенки (4), (5), (6), т. е. n-арната операција A ги задоволува тие идентитети ако и само ако $A\in\Pi_n(P)$.*

Доказ. Ако $A\in\Pi_n(P)$, непосредно е јасно дека се точни идентитетите (5) и (6), а лесно се покажува дека е точен и (4).

Обратно, нека A е n-арна операција над M со особините (4), (5) и (6). Од (5) следува $A(0, 0, .., 0) = 0$, па спрема (6), од тоа добиваме $A(x, x, .., x) = x$ за секое $x \in M$; за $n = 1$ значи, имаме $A \in \Pi_1(P)$. За $n = 2$, ако ставиме $a = A(0, 1)$, од (5) и (6) добиваме $A(x, y) = (1 - a)x + ay$, т. е. дека $A \in \Pi_2(P)$.

Нека $n \geqslant 2$. Ако ставиме $A'(x, y) = A(x, x, .., x, y)$ добиваме бинарна операција која што, очевидно, ги задоволува релацииго (4), (5) и (6) па значи имаме $A(x, x, .., x, y) = (1 - a)x + ay$, при што е $A(0, 0, .., 0, 1) = a$. Ако во низата $x_1, x_2, .., x_{n-1}$ има барем еден член различен од x_1 (нека x_i е првиот член со таа особина), од (4), (5) и (6) добиваме

$$A(x_1, .., x_i, .., x_n) = A\left(x_1, .., x_i, .., x_{n-1}, \frac{x_n - x_1}{x_i - x_1} x_i + \frac{x_i - x_n}{x_i - x_1} x_1\right)$$

$$\text{– спрема (4) –} \quad = \frac{x_n - x_1}{x_i - x_1} A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_i) + \frac{x_i - x_n}{x_i - x_1} A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_1)$$

$$\text{– спрема (6) –} \quad = \frac{x_n - x_1}{x_i - x_1}\{x_i + A(x_1 - x_i, \ldots, 0, x_{i+1} - x_i, \ldots, x_{n-1} - x_i, 0)\} + \frac{x_i - x_n}{x_i - x_1}\{x_1 + A(0, \ldots 0, x_i - x_1, x_{i+1} - x_1, \ldots, x_{n-1} - x_1, 0)\}$$

$$\text{– спрема (5) –} \quad = \frac{x_n - x_1}{x_i - x_1}\left\{x_i + (x_1 - x_i) A\left(1, \ldots, 1, 0, \frac{x_{i+1} - x_i}{x_1 - x_i}, \ldots, \frac{x_{n-1} - x_i}{x_1 - x_i}, 0\right)\right\} + \frac{x_i - x_n}{x_i - x_1}\left\{x_1 + (x_i - x_1) A\left(0, .., 0, 1 \frac{x_{i+1} - x_1}{x_i - x_1}, \ldots, \frac{x_{n-1} - x_1}{x_i - x_1}, 0\right)\right\}$$

$$= x_n + (x_i - x_n) B_i\left(\frac{x_{i+1} - x_1}{x_i - x_1}, \frac{x_{i+2} - x_1}{x_i - x_1}, \ldots, \frac{x_{n-1} - x_1}{x_i - x_1}\right) + (x_1 - x_n) C_i\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{x_1 - x_i}, \frac{x_{i+2} - x_1}{x_1 - x_i}, \ldots, \frac{x_{n-1} - x_i}{x_1 - x_i}\right),$$

каде B_i и C_i се определени со

$$B_i(y_1, y_2 \ldots y_{n-i-1}) = A(0, \ldots, 0, 1, y_1, y_2, \ldots y_{n-i-1}, 0),$$

$$C_i(y_1, y_2 \ldots y_{n-i-1}) = A(1, \ldots 1, 0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-i-1}, 0).$$

Значи добиваме дека $A \in \Pi(P)$ и за $n > 2$, а со тоа точноста на лемата е докажана.

Од лемите 2. 3, 2. 5 и 2. 6 следува точноста на делот од теоремата што се однесува за идемпотентните пдс -и.

Ќе ги разгледаме сега неидемпотентните пдс -и.

Лема 2.7. *Нека* Π *е неидемпотентен пдс над* M, *а* G *соодветната група. Секоја операција* $A \in \Pi$ *ги задоволува идентитетите*:

(7) $A(x_1 u, x_2 u, \ldots, x_n u) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n) u$;

(8) $A(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u x_n) = u A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Доказ. Нека e е идентичниот елемент на групата, а $B \in \Pi'$, т. е. постои елемент $u \in M$ таков да $B(x, y) = y x^{-1} u x$ (бидејќи, спрема лемата 2.4 $\Pi' = \Pi_2(G)$). Нека $A \in \Pi$; имаме

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) u = B(e, A(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

– поради BdA –
$$= A(B(e, x_1), B(e, x_2), \ldots, B(e, x_n))$$
$$= A(x_1 u, x_2 u, \ldots, x_n u),$$

т. е. точноста на (7).

Исто така, поради AdB, следува идентитетот (8). Навистина,

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u x_n) = A(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, B(x_n, x_n))$$
$$= B(A(x_1, x_2, \ldots, x_n), A(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$
$$= u A(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Со тоа точноста на лемата 2.7 е покажана.

Лема 2.8. *Нека* $G = (M; \cdot)$ *е една група.* $\Pi(G)$ *е општото решение на системот функционални равенки* (7) *и* (8).

Доказ. Непосредно е јасно дека секоја операција $A \in \Pi$ ги задоволува идентитетите (7) и (8).

Обратно, нека n-арната операција A ги задоволува тие идентитети. За $n = 1$, ако ставиме $A(e) = a$ од (7) и (8) добиваме $A(x) = xa = ax$, т. е. дека $A \in \Pi_1(G)$. За $n \geqslant 2$ имаме исто така

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A(e, x_2 x_1^{-1}, x_3 x_1^{-1}, \ldots, x_n x_1^{-1}) x_1$$
$$= x_n x_1^{-1} A(e, x_2 x_1^{-1}, x_3 x_1^{-1}, \ldots, x_{n-1} x_1^{-1}, e) x_1$$
$$= x_n x_1^{-1} B(x_2 x_1^{-1}, x_3 x_1^{-1}, \ldots, x_{n-1} x_1^{-1}) x_1,$$

каде

$$B(y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}) = A(e, y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, e).$$

Значи, добивме дека $A \in \Pi_n(G)$, а со тоа точноста на лемата 2.8 е докажана.

Од лемите 2.4, 2.7 и 2.8 следува дека теоремата е точна и за неидемпотентните пдс-и.

3. Во досегашната работа претпоставувавме дека M нема помалку од три елементи. Ако тоа не е исполнето, M може да има само еден или два елементи. Првиот случај, од добро познати причини, не е од интерес, но не е иста работата ако M се состои од точно два елементи 0, 1. Сметајќи дека во тој тој случај условот 3° е секогаш задоволен, можеме да речеме дека П е пдс над M ако ги задоволува условите 1° и 2°.

Ако $P = GF(2)$ е полето, а G групата, со два елементи, примерите 1 и 2 се пдс-и и во овој смисол; во овој случај, такви се и $\Pi_1(P)$, $\Pi_1(G)$.

Во предодниот дел, освен при докажувањето на тоа дека при секој идемпотентет пдс е точна релацијата (6), на друго место не е користен условот M да има повеке од два елементи. Ќе покажеме сега дека тоа е точно и кога M има само два елементи.

Поради тоа што операцијата E_2 определена со $E_2(x, y) = y$ е единствената бинарна идемпотентна операција над множенството $M = \{0, 1\}$, имаме $\Pi' = E$, од каде следува дека $A(x, x, \ldots, x, y) = y$ за било кои $x, y \in M$ и $A \in \Pi$. Нека претпоставиме дека П содржи n-арни операции за $n > 2$ и нека $i_1, i_2, \ldots, i_s, j_{s+1}, j_{s+2}, \ldots, j_{n-1}$ е една пермутација од низата $1, 2, \ldots, n-1$. Ако ставиме $x_{i_\nu} = x$, $x_{j_{s+\nu}} = y$ и $\tilde{A}(x, y, z) = A(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z)$, добиваме тернарна операција $\tilde{A}$, а освен тоа, спрема лемата 2.1, за било кои $A, B \in \Pi$ имаме: $\tilde{A}dA$, $\tilde{A}dB$, $Bd\tilde{A}$, $\tilde{A}d\tilde{B}$, $\tilde{A}$ е десно инверзибилна и $\tilde{A}(x, x, y) = y$. Од тоа следува дека $\Pi \cup \tilde{\Pi}$ е идемпотентен пдс над M, при што со $\tilde{\Pi}$ е означено множеството од сите тернарни операции што можат да се добијат на горниот начин. Лесно се покажува пак дека $\tilde{\Pi}$ може да ги содржува само операциите E_3 и A^* определени со $E_3(x, y, z) = z$, $A^*(x, y, z) = x + y + z$. Имено, десно инверзибилни тернарни операции над множеството $\{0, 1\}$ за кои важи условот $\tilde{A}(x, x, y) = y$ постојат уште две и тоа операциите $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ определени со:

$$\tilde{A}_i(x, x, y) = y,\ \tilde{A}_1(0, 1, 0) = \tilde{A}_1(1, 0, 1) = 0,\ \tilde{A}_1(1, 0, 0) = \tilde{A}_1(0, 1, 1) = 1$$

$$\tilde{A}_2(0, 1, 0) = \tilde{A}_2(1, 0, 1) = 1,\ \tilde{A}_2(1, 0, 0) = \tilde{A}_2(0, 1, 1) = 0,$$

но не е $\tilde{A}_i d\tilde{A}_i$, бидејќи на пример,

$$\tilde{A}_1(1, 0, \tilde{A}_1(0, 1, 0)) = 1 \neq 0 = \tilde{A}_1(\tilde{A}_1(1, 0, 0), \tilde{A}_1(1, 0, 1), \tilde{A}_1(1, 0, 0))$$

$$\tilde{A}_2(0, 1, \tilde{A}_2(1, 0, 1)) = 0 \neq 1 = \tilde{A}_2(\tilde{A}_2(0, 1, 1), \tilde{A}_2(0, 1, 0), \tilde{A}_2(0, 1, 1)).$$

Ако во П се содржи операцијата A^*, поради A^*dA, за секоја операција $A \in \Pi$, имаме

$$\begin{aligned} u + A(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 + u + A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= A(0 + u + x_1, 0 + u + x_2, \ldots, 0 + u + x_n) \\ &= A(u + x_1, u + x_2, \ldots, u + x_n), \end{aligned}$$

т. е. ја добиваме точноста на индентитетот (6).

Обратно, ако $\tilde{A} = E_3$, за секоја пермутација $i_1, i_2, \ldots, i_s, j_{s+1}, \ldots j_{n-1}$ и секоја операција $A \in \Pi$, поради тоа што M има само два елементи, ќе имаме $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n$ за секоја операција $A \in \Pi$ и n-орка $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$; во тој случај, точноста на (6) е очевидна.

Во врска со сето тоа, може да се постави прашањето дали е точна теоремата што ја докажавме во 2. и за случајот кога M има два елементи.

Одговорот е делумично потврден. Имено, ако $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n$ за секоја $A \in \Pi$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$, имаме еден пдс, а при тоа $\Pi \subseteq \Pi^*(P) \cap \Pi(G)$, па значи постојат пдс-и Π^* во кои се содржи Π, а кои не се подсистеми од $\Pi^*(P)$. Сите други делови на теоремата се точни и во овој случај. Теоремата би била потполно точна и кога M има два елементи, ако се претпостави дека во Π се содржи барем една операција A и n-орка $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ така да $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq x_n$.

4. Добиените резултати можат лесно да се пренесат и на случајот кога наместо *десна инверзибилност* и *лева дистрибутивност* се претпостави *лева инверзибилност* и *десна дистрибутивност*. Уште повеќе, ако се работи само со n-арни операции, при што n е фиксен природен број, можат да се добијат соодветни резултати ако се претпостави дека сите операции од Π се *i-инверзибилни* и дека секоја е *i-дистрибутивна* спрема останатите орерации од Π. При тоа, за n-арната операција A велиме дека е i-инверзибилна над M, ако е решлива еднозначно равенката $A(a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) = a_i$ по x во M за секоја n-орка $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$; A е i-дистрибутивна спрема B, ако е точно равенството

$$A(x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, B(y_1 \ldots y_m) x_i, \ldots x_{n-1}) =$$
$$= B(A(x_1, \ldots x_{i-1}\, y_1, x_i, \ldots x_{n-1}), \ldots, A(x_1, \ldots, x_{i-1}\, y_m\, x_i, \ldots, x_{n-1}))$$

за било кои $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_m \in M$; пишуваме Ad_iB.

Разгледаниот поим за пдс-и, како и сега споменатите негови две варијации, се специјални случаи од една поопшта класа системи.

Нека Π е еден систем финитарни операции над M и нека $A \longrightarrow i_A$ е еднозначно пресликување од Π во множеството на природните броеви при што е $i_A \leqslant n$, ако A е n-арна операција. Ако претпоставиме дека: 1′ *секоја операција A е i_A-инверзибилна во M*; 2′ *за секој пар A, $B \in \Pi$ е $Ad_{i_A}B$*; 3′ *за секоја тројка два по два различни елементи $a, b, c \in M$ постои операција A таква да* $A(\underbrace{a, \ldots, a}_{i_A - 1}, b, a, \ldots, a) = c$, го добиваме тој поопшт поим за пдс-и.

При тоа, ако за секоја n-арна операција $A \in \Pi$ е $i_A = n$, овој поопшт поим се сведува на поимот за пдс-и кои беа предмет на изучување на оваа работа. Лесно може да се покаже дека така, најопшто, дефинираните пдс-и не содржат ништо битно ново. Имено, ако за секоја операција A и соодветниот природен број $i_A = i$ ставиме $A_i(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n) = A(x_1, \ldots x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \ldots x_{n-1}, x_i)$ добиваме еден систем кој ги задоволува условите 1°, 2° и 3°, т. е. еден пдс. И обратно, од секој пдс, на тој начин, може да се добие некој обопштен полн дистрибутивен систем, т. е. систем за кој ќе бидат исполнети условите 1′, 2′ и 3′.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Д. Белоусов, О дистрибутивных системах операций, Матем. сб, т. 36 (1955) 479—500.

[2] Ѓ. Чупона, За финитарните операции, Год. зб. Природно-математички факултет Скопје кн. 12 (1959).

О ДИСТРИБУТИВНЫХ СИСТЕМАХ ФИНИТАРНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Ѓ. Чупона

(Резюме)

Понятие о *полных дистрибутивных системах* бинарных операций определил Белоусов в своей работе [1], где он дал характеристику систем этого типа. Здесь мы постараемся дат обобщение этого понятия и, используя основные результати работи [1], дадим также характеристику данного обобщения.

1. Пусть множество M имеет не менее трех элементов. Совокупность Π финитарных операций в M назовем *полной дистрибутивной системой* в M, если:

1°. Всякая операция $A \in \Pi$ *однозначно обратимая справа* в M.

2°. AdB для любых A, $B \in \Pi$.

3°. Для каждой тройки попарно различных элементов a, b, $c \in M$, существует операция $A \in \Pi$, так что $A(a, a, \ldots, a, b) = c$.

При этом говорим что A *однозначно обратима справа*, если уравнение $A(a_1, \ldots, a_{n-1}, x) = a_n$ имеет единственное решение, при любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$. Операция A называется *дистрибутивной слева* относительно операции B (пишем AdB) если

$$A(x_1, \ldots, x_{n-1}, B(y_1, \ldots y_m)) = B(A(x_1, \ldots x_{n-1}, y_1), \ldots, A(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_m)),$$

для любых $x_1, \ldots x_{n-1}, y_1, \ldots y_m \in M$.

Теперь приведем два примера, а затем покажем, что этими примерами исчерпываются все полные дистрибутивные системы.

Пример 1. Пусть $P(=M(\cdot, +))$ поле, а $\Pi_1(P)$ содержит только операцию E_1: $E_1(x) = x$. Пусть $n > 1$, $a \in M$ и $B_2, \ldots, B_{n-1}$, $C_2, \ldots C_{n-1}$ есть последовательность финитарных операций в M, так что B_i и C_i $(n - i - 1)$ – арны; следовательно для $n = 2$ эта последовательность пуста, но во всяком случае B_{n-1} и C_{n-1} суть константы, т. е. являются фиксированными элементами множества M. Определим n-арную операцию A:

(1) $A(x, \ldots, x, y) = (1 - a)x + ay$,

(2) $$A(x_1, \ldots x_i, \ldots x_n) = x_n + (x_i - x_n) B_i \left(\frac{x_{i+1} - x_1}{x_i - x_1}, \ldots, \frac{x_{n-1} - x_1}{x_i - x_1}\right) + (x_1 - x_n) C_i \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{x_1 - x_i}, \ldots, \frac{x_{n-1} - x_i}{x_1 - x_i}\right),$$

где x_i—первый член последовательности $x_2, \ldots, x_{n-1}$ различной от x_1. $\Pi_n(P)$ есть множество всех n-арных операций, которые получаются этим образом. Следовательно, $\Pi_2(P)$ содержит все операции A типа: $A(x, y) = (1 - a)x + ay$.

Операция $A \in \Pi_n(P)$ необратима справа если, и только если, (i) $a = 0$ или (ii) $B_1(y_1, \ldots, y_{n-i-1}) + C_i(1 - y_1, \ldots, 1 - y_{n-i-1}) = 1$, для некоторых

$i, y_1, y_2, \dots, y_{n-i-1}$. Система $\Pi_n^*(P)$ (для $n>1$), которая состоит из всех обратимых справа операций системы $\Pi_n(P)$, является полной дистрибутивной системой в M. Система $\Pi^*(P)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Pi_n^*(P)$ (и любая се подсистема, которая удовлетворяет условию 3°) также есть полная дистрибутивная система в M.

Пример 2. Пусть $G(=M(\cdot))$ группа. $\Pi_1(G)$ содержить все сдвиги с элементами центра группы, т. е. для каждой операции $A\in\Pi_1(G)$ существует элемент $a\in M$, так что $A(x)=ax=xa$. Для $n>1$, пусть B любая $(n-2-)$ арная операция в M; при этом для $n=2$, B — константа. $\Pi_n(G)$ содержит все n-арные операции A вида:

$$(3)\quad A(x_1,\dots,x_n)=x_n\,x_1^{-1}\,B(x_2\,x_1^{-1},\ x_3\,x_1^{-1},\dots,x_{n-1}\,x_1^{-1})\,x_1.$$

$\Pi_n(G)$ (для $n>2$) есть полная дистрибутивная система в M.

Система

$$\Pi(G)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Pi_n(G)$$

(и любая ее подсистема, которая удовлетворяет условию 3°) есть также полная дистрибутивная система в M.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть Π полная дистрибутивная система в M Если $A(x,x,\dots,x)=x$ для любых $x\in M$, $A\in\Pi$, тогда существует поле $P=M(\cdot,+)$ так что $\Pi\subseteq\Pi^*(P)$; при этом $\Pi^*(P)$—максимальная полная дистрибутивная система в M, в которой содержится система Π. Если $A(a,a,\dots,a)\neq a$, для некоторых $a\in M$, $A\in\Pi$, тогда существует группа $G=M(\cdot)$ так, что $\Pi\subseteq\Pi(G)$; $\Pi(G)$ есть максимальная полная дистрибутивная система в M, в которой содержится система Π. Поле P (а также и группа G), определенное системой Π, однозначно до изоморфизма.*

При доказательстве теоремы используются основные результати работы Белоусова.

Сначала доказывается что, если Π —полная дистрибутивная система в M и если для любой $A\in\Pi$ положим $A'(x,y)=A(x,\dots,x,y)$, то получаем полную дистрибутивною систему Π' в смысле Белоусова; при этом $\Pi\cup\Pi'$ —также полная дистрибутивная система в M. Из этого ([1] стр. 494, 495, 498, 499) следует:

а) Если $A(x,\dots,x)=x$, для любых $x\in M$, $A\in\Pi$ тогда существует поле $P=M(\cdot,+)$ (однозначное до изоморфизма) так что $\Pi'=\Pi_2^*(P)$

б) Если $A(a,a,\dots,a)\neq a$, для некоторых $a\in M$, $A\in\Pi$ тогда существует группа $G=M(\cdot)$ (также однозначная до изоморфизма) так что $\Pi'=\Pi_2(G)$.

В идемпотентном случае имеем:

$$(4)\quad A(x_1,\dots,x_{n-1},(1-u)\,x+uy)=(1-u)\,A(x_1,\dots,x_{n-1},x)+uA(x_1,\dots,x_{n-1},y),$$

$$(5)\quad A(ux_1,\dots,ux_{n-1},ux_n)=u\,A(x_1,\dots,x_{n-1},x_n),$$

(6) $A(u+x_1, \ldots, u+x_{n-1}, u+x_n) = u + A(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$,

для любых $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x, y, u \in M, A \in \Pi$

Для неидемпотентных систем имеем:

(7) $A(x_1 u, x_2 u, \ldots, x_n u) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n) u$

(8) $A(x_1, \ldots, x_{n-1}, ux_n) = uA(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$,

для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n, u \in M, A \in \Pi$.

Дальше доказывается, что $\Pi(P)$ — общее решение системы функциональных уравнений (4), (5), (6); также $\Pi(G)$ — общее решение системы фикциональных уравнений (7) и (8). Из этого следует точность теоремы.

2. Пусть $M = \{0, 1\}$. Предполагая, что в этом случае условие 3° всегда выполняется, можно сказать, что Π — полная дистрибутивная система в M если удовлетворяет условиям 1° и 2°.

Теорема доказанная нами, с исключением второй части, верна и в случае когда M имеет только два элемента. Теорема бы была полностью верна и в том случае, если предположить, что $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq a_n$. для некоторых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ и $A \in \Pi$.

3. Понятие о полных дистрибутивных системах есть специальный случай следующего более общего класса систем операций.

Пуст для каждой n-арной операции $A \in \Pi$ существует $i_A \leqslant n$. Мы говорим, что Π — *обобщенная йолная дисшрибушивная сисшема* в M если:

1′: Каждая операция $A \in \Pi$ однозначно i_A обратимая в M;

2′: $A\, d_{i_A} B$. для любых $A, B \in \Pi$;

3′: Для каждой тройки попарно различных элементов $a, b, c \in M$ существует операция $A \in \Pi$ так что $A(\underbrace{a, \ldots a}_{i_A - 1}, b, a, \ldots, a) = c$.

При этом говорим, что операция A — однозначно i -обратима в M, если уравнение $A(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) = a_i$ имеет единственное решение при любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$; операция A наывается i - дистрибутивной относительно операции B (пишем $A\, d_i\, B$) если

$$A(x_1, \ldots, x_{i-1}, B(y_1, \ldots y_m), x_i, \ldots, x_{n-1}) =$$
$$= B(A(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, x_i, \ldots, x_{n-1}), \ldots, A(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_m, x_i, \ldots x_{n-1})),$$

для любых $x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_m \in M$.

Если $i_A = n$ для каждой n - арной операции A, тогда: $1' \equiv 1°$, $2' \equiv 2°$, $3' \equiv 3°$, т. е. в этом случае Π есть полная дистрибутивная система.

Пусть Π есть обобщеная полная дистрибутивная система в M. Если для любой операции A, и соответствующего натурального числа $i_A = i$, положим

$$A_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n) = A(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_i),$$

то получим полную дистрибутивною систему в M. Из этого следует, что поняние об обобщенных полных дистрибутивных системах не содержит ничего существенно нового.