ЗА n-ГРУПОИДИТЕ СО ЦЕНТРАЛНИ НЕУТРАЛНИ ЕЛЕМЕНТИ[1])

Б. Л. ТРПЕНОВСКИ

1. Увод

Во оваа работа ќе дадеме решение на еден проблем кој што е природно обопштение на проблемот решен со следната теорема ([1]), лема 2.5):

Теорема 1.2. Нека M е (i, j) — асоцијативен n-групоид за еден пар $i \neq j$. Ако во M постои барем еден централен неутрален елемент, тогаш M ќе биде n-полугрупа.

Нека „$*$" е операцијата што го изградува n-групоидот M. Со повекеструка примена на „$*$", може на следниот начин да се формира „продолжен производ" од елементите $x_0, x_1 \ldots, x_{(k+1)n} \in M$: едн знак „$*$" ќе ставиме пред x_0, втор пред x_{i_1}, трет пред $x_{i_2}, \ldots$ $k+1$ знак „$*$" ќе ставиме пред x_{i_k}. Ваков продолжен производ може да се формира ако, и само ако, $i_\nu \leqslant i_{\nu+1}$, $\nu=1, 2, \ldots, k-1$ и $i_\mu \geqslant \mu n$ за секое $\mu = 1, 2, \ldots, k$; ако притоа е $i_\nu = i_{\nu+1} = \ldots = i_{\nu+s-1}$, $s \leqslant k$, тогаш пред x_{i_ν} ќе ставиме s значи „$*$" за $i_\nu \neq 0$, а $s+1$ знак „$*$" за $i_\nu = 0$. Нека ставиме $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ и нека соодветниот продолжен производ го означиме со $\prod\limits_I x^0{}_{(k+1)n}$. Елементите од I ќе ги викаме индекси во M и понатака секогаш ќе претпоставуваме дека за индексите од секое множество, со помош на кое ќе формираме продолжени производи, се задоволени горните услови.

Нека се сега $I = (i_1. i_2, \ldots, i_k)$ и $J = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ две множества од индекси во n-групоидот M. Ако за секои $x_0, \ldots, x_{(k+1)n} \in M$ е:

$$\prod_I x^0{}_{(k+1)n} = \prod_J x^0{}_{(k+1)n}, \tag{1.1}$$

тогаш n-групоидот M ќе го означуваме со $M(I, J)$.

Целта на оваа работа е да ја докажеме следната

Теорема 1.2. Ако во n-групоидот $M(I, J)$ постои барем еден централен неутрален елемент, и ако $I \neq J$, тогаш M ке биде n-полугрупа

[1]) Дефиниции на поимите што овде ќе ги користиме можат да се најдат во цитираната литература.

2. Доказ на теоремата

При докажувањето на нашата теорема ке ги користиме следните два поими и два помошни става:

Нека $I=(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ е множество од индекси во n-групоидот M. За индексот $i_t \in I$ ќе речеме дека ја опфаќа низата

$$(2.1) \qquad i_{t+1}, i_{t+2}, \ldots, i_{t+s}, \ t+s \leqslant k,$$

ако за секој $\nu=1, 2, \ldots, s$ е

$$(2.2) \qquad i_t+\nu n \geqslant i_{t+\nu},$$

и ако е точно уште неравенството

$$(2.3) \qquad i_t+(s+1)n < i_{t+s+1},$$

кога $t+s<k$.

Испитувањето на $M(I, J)$ n-групоидите во кои постојат неутрални елементи може понекогаш да се сведе на испитување на n-групоиди од истиот вид, но во кои продолжените производи се формирани со помош на множествата од помал број индекси откако множествата I и J. Ќе го споменеме само најпростиот случај кога е тоа можнно, а кој пак ќе го искористиме за да го дефинираме вториот поим што овде ќе го користиме. Наиме, ако $i_t \in I \cap J$ и ако во секој од продолжените производи $\prod\limits_{I} x^0{}_{(k+1)n}$ и $\prod\limits_{J} x^0{}_{(k+1)n}$ елементите $x_{i_t}, x_{i_t+1}, \ldots, x_{i_t+n}$ не се одвоени со никакви загради, тогаш со замената на n од нив со неутралниот елемент од M, секој од тие производи ќе се редуцира на продолжен производ од помал број елементи, а равенството (1.1) ќе премине во равенство од истиот облик. За n-групоидот $M(I, J)$ ќе речеме дека е стабилен, ако равенството (1.1) не може да се редуцира на равенство од помал број елементи по горе опишаниот начин.

Ќе ги докажеме сега двата помошни етава.

Лема 2.1, Ако $M(I, J)$ е стабилен n-групоид, $I \neq J$, $I=(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ $J=(j_1, j_2, \ldots, j_k)$, тогаш е точна барем една од следните две можности

1°. Постои $i_t \in I$, $i_t>0$, таков да во продолжениот проивод $\prod\limits_{J} x^0{}_{(k+1)n}$ елементите x_{i_t-1} и x_{i_t} не се одвоени со заграда.

2°. Постои $j_s \in J$, $j_s>o$, таков да во продолжениот производ $\prod\limits_{I} x^0{}_{(k+1)n}$ елементите x_{j_s-1} и x_{j_s} не се одвоени со заграда,

Доказ. Нека е $I'=I$ за $i_1>o$, односно, $I'=I \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$ кога е $i_1=i_2=\ldots=i_r=o$ и, ако $r<k$, $i_{r+1}>o$. Слично, нека е $J'=J$ за $j_1>0$, односно, $J' = J \setminus \{j_1, \ldots, j_p\}$ кога е $j_1 = j_2 = \ldots = j_p = o$ и, ако е $p < k$, $j_{p+1} > o$. Од стабилноста на M и претпоставката $I \neq J$ следува дека во M е точна барем една од следните две можности:

а) постои најмал индекс $i_t \in I'$, таков да $i_t \overline{\in} J$,

б) постои најмал индекс $j_s \in J'$, таков да $j_s \overline{\in} I$.

Навистина, ако ниедна од можностите а) и б) не е точна, тогаш, или е $I' = J' = \emptyset$, или пак секој индекс од I' припаѓа на J' и обратно. Во првиот случај имаше $I = J$, а во вториот $i_k = j_k$. Бидејќи по претпоставка е $I \neq J$, а од стабилноста на M следува $i_k \neq j_k$, добиената пуотивуречност го докажува нашето тврдење.

Нека е сега во M точна можноста а), односно, нека е $i_t < j_s$, ако се во M точни и а) и б). Тогаш, ако е $t > 1$, од стабилиоста на M следува дека е $o < i_t - i_{t-1} \leqslant n$, додека за $t = 1$, очевидно е $o < i_1 \leqslant n$, уште повеќе стабилноста од M повлекува дека во $\prod\limits_{J} x^{\circ}{}_{(k+1)n}$ неможе да биде затворена заграда зад елементот $x_{i_{t}-1}$, додека поради $i_t \overline{\in} J$ добиваме дека во истиот продолжен производ неможе да биде отворена заграда пред елементот x_{i_t}. Така е добиена точноста на исказот 1°. Слично, ако е точна можноста б), односно, ако е $j_s < i_t$ кога се точни и а) и б), ќе се добие дека во M е точен исказот 2°.

Л е м а 2.2. Нека $M(I, J)$, $I \neq J$, $I = (i_1, i_2 \ldots, i_k)$, $J = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ е стабилен n-групоид. Ако во M постои барем еден централен неутрален елемент, тогаш M ќе биде n-полугрупа.

Доказ. Поради симетричната улога на множествата од индекси I и J, а спрема лемата 2.1, можеме да претпоставиме дека постои $i_t \in I$, $i_t > o$, таков да во продолжениот производ $\prod\limits_{J} x^{0}{}_{(k+1)n}$ елементите $x_{i_{t}-1}$ и x_{i_t} не се одвоенни со заграда. Нека означиме: $h = i_t - i_{t-1}$ ако $t > 1$, односно, $h = i_t$ за $t = 1$; спрема доказот на лемата 2.1 е $o < h \leqslant n$.

Ако t_t ја опфаќа низата

$$i_{t+1},\ i_{t+2}, \ldots,\ i_{t+s}, \tag{2.4}$$

нека се

$$\begin{gathered} i_{t+1}, \ldots,\ i_{t_1} \\ i_{t_1+1}, \ldots, i_{t_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_{t_p+1}, \ldots,\ i_{t+s}, \end{gathered} \tag{2.5}$$

поднизи од (2.4.) формирани така да првите членови од секоја од нив ги опфаќаат низите составени од останалите членови од соодветните поднизи.

Нека e е централен неутрален елемент во M.

Имајќи го во предвид погоре изнесеното, најпрво ќе покажеме дека, за секои $x_0, x_1, \ldots, x_n \in M$ и за секое $o \leqslant r \leqslant n$, во M е точно равенството:

(2.6) $\quad x_0 x_1 \ldots x_n =$

$$= \prod_{I^*} \underbrace{e \ldots e}_{i_t - 1} x_0 \, (\prod_{I^*} \underbrace{e \ldots e}_{i_t - 1} x_1 \, (\ldots (\prod_{I^*} \underbrace{e \ldots e}_{i_t - 1} x_r \, (e \ldots e \, x_n^{r+1}) \, e \ldots e) \ldots) \, e \ldots e) \, e \ldots e,$$

каде $I^* = (i_1, \ldots, i_{t-1}, i_{t+s+1} - (s+1) \, n, \ldots, i_k - (s+1) \, n)$.

Ако означиме: $i_{t+1} - i_t = \nu, \; i_{t+1} - i_t + i_{t_1+1} - i_{t_1} = \nu_1, \ldots,$

$i_{t+1} - i_t + i_{t_1+1} - i_{t_1} + \ldots + i_{t_p+1} - i_{t_p} = \nu_p$, ќе добиеме дека е:

$x_0 \, x_1 \ldots x_n =$

$$= \prod_{J} \underbrace{e \ldots e}_{i_t} x_\nu^{0} \underbrace{e \ldots e}_{(\nu_1 - \nu) \, n} \; x_{\nu_1 + 2}^{\nu + 1} \underbrace{e \ldots e}_{(\nu_2 - \nu_1) n} \; \ldots \; x_{\nu_p + 2p}^{\nu_{p-1} + 2p - 1} \underbrace{e \ldots e}_{(t + s - \nu_p) \, n} \; e \ldots e$$

$$= \prod_{I} \underbrace{e \ldots e}_{i_t} x_\nu^{0} \underbrace{e \ldots e}_{(\nu_1 - \nu) \, n} \; x_{\nu_1 + 2}^{\nu + 1} \underbrace{e \ldots e}_{(\nu_2 - \nu_1) n} \; \ldots \; x_{\nu_p + 2p}^{\nu_{p-1} + 2p - 1} \underbrace{e \ldots e}_{(t + s - \nu_p) \, n} \; e \ldots e$$

$$= \prod_{J} \underbrace{e \ldots e}_{i_t - 1} x_0 \, e \, x_\nu^{1} \underbrace{e \ldots e}_{(\nu_1 - \nu) \, n} \; x_{\nu_1 + 2}^{\nu + 1} \underbrace{e \ldots e}_{(\nu_2 - \nu_1) n} \; \ldots \; x_{\nu_p + 2p}^{\nu_{p-1} + 2p - 1} \underbrace{e \ldots e}_{(t + s - \nu_p) \, n} \; e \ldots e$$

$$= \prod_{I} \underbrace{e \ldots e}_{i_t - 1} x_0 \, e \, x_\nu^{1} \underbrace{e \ldots e}_{(\nu_1 - \nu) \, n} \; x_{\nu_1 + 2}^{\nu + 1} \underbrace{e \ldots e}_{(\nu_2 - \nu_1) n} \; \ldots \; x_{\nu_p + 2p}^{\nu_{p-1} + 2p - 1} \underbrace{e \ldots e}_{(t + s - \nu_p) \, n} \; e \ldots e$$

$$= \prod_{I^*} \underbrace{e \ldots e}_{i_t - 1} x_0 (e \, x_n^{1}) \, e \ldots e,$$

значи

(2.7) $$x_0 \, x_1 \ldots x_n = \prod_{I^*} \underbrace{e \ldots e}_{i_t - 1} x_0 (e \, x_n^{1}) \, e \ldots e.$$

Бидејќи пак е $e \, x_n^{1} = x_1 \, e \, x_n^{2}$, ако на $x_1 \, e \, x_n^{2}$ го примениме равенството (2.7), ќе добиеме дека е:

$$x_0 \, x_1 \ldots x_n = \prod_{I^*} \underbrace{e \ldots e}_{i_t - 1} x_0 (\prod_{I^*} \underbrace{e \ldots e}_{i_t - 1} x_1 \, (e \, e \, x_n^{2}) \, e \ldots e) \, e \ldots e,$$

а ако (2.7) се примени во истиот смисол уште r—1 пати, ќе се добие точноста на равенството (2.6).

Нека докажеме дека во M е точно и следното равенство:

$$e\, x_{h-1}^{1}\ (x_{h+n}^{k})\ x_{2n}^{h+n+1} = x_{h}^{1}\ (e\, x_{h+n}^{h+1})\ x_{2n}^{h+n+1}, \tag{2.8}$$

за секои $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$.

Бидејќи е $i_t - i_{t-1} \leqslant n$, во низата што ја опфаќа индексот i_{t-1} сигурно се содржат индексот i_t и сите членови од низата (2.4). Ако покрај нив во низата што ја опфаќа i_{t-1} се содржат и индексите $i_{t+s+1}, \ldots, i_{t+q}$, нека се:

$$\begin{array}{l} i_t, \ldots, i_{t+s} \\ i_{t+s+1}, \ldots, i_{t+s_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_{t+s_f+1}, \ldots, i_{t+q} \end{array} \tag{2.9}$$

подниизи формирани исто како и (2.5).

Нека означиме: $h + i_{t+s+1} - i_{t+s} = \mu$, $h + i_{t+s+1} - i_{t+s} + i_{t+t_1+1} - i_{t+s_1} = \mu_1$, $\ldots, h + i_{t+s+1} - i_{t+s} + i_{t+s_1+1} - i_{t+s_1} + \ldots + i_{t+s_f+1} - i_{t+s_f} = \mu_f$.

Земајќи во предвид дека e е централен неутрален елемент и дека во $\prod\limits_{J} x^{0}{}_{(k+1)\,n}$ елементите $x_{i_{t-1}}$ и x_{i_t} не се одвоени со заграда, добиваме:

$$e\, x_{h-1}^{1}\ (x_{h+n}^{h})\ x_{2n}^{h+n+1} = x_{h-1}^{1}\, e\ (x_{h+n}^{h})\ x_{2n}^{h+n+1} =$$

$$= \prod_{I} \underbrace{e\ldots e}_{i_{t-1}} x_{h-1}^{1}\, e\, x_{h+\mu}^{h} \underbrace{e\ldots e}_{(\mu_1-\mu)\,n} \ldots x_{h+\mu_f+2f}^{h+\mu_{f-1}+2f-1} \underbrace{e\ldots e}_{(t+q-\mu_t)\,n} \quad e\ldots e$$

$$= \prod_{J} \underbrace{e\ldots e}_{i_{t-1}} x_{h-1}^{1}\, e\, x_{h+\mu}^{h} \underbrace{e\ldots e}_{(\mu_1-\mu)\,n} \ldots x_{2n}^{h+\mu_{f-1}+2f-1} \underbrace{e\ldots e}_{(t+q-\mu_f)n} \quad e\ldots e$$

$$= \prod_{J} \underbrace{e\ldots e}_{i_{t-1}} x_{h}^{1}\, e\, x_{h+\mu}^{h+1} \underbrace{e\ldots e}_{(\mu_1-\mu)n} \ldots x_{2n}^{h+\mu_{f-1}+2f-1} \underbrace{e\ldots e}_{(t+q-\mu_f)n} \quad e\ldots e$$

$$= \prod_{I} \underbrace{e\ldots e}_{i_{t-1}} x_{h}^{1}\, e\, x_{h+\mu}^{h+1} \underbrace{e\ldots e}_{(\mu_1-\mu)\,n} \ldots x_{2n}^{h+\mu_{f-1}+2f-1} \underbrace{e\ldots e}_{(t+q-\mu_f)n} \quad e\ldots e$$

$$= x_{h}^{1}\,(e\, x_{h+n}^{h+1})\ x_{2n}^{h+n+1}$$

Ако го повториме доказот на лемата 2.1 одејќи во спротивен смер, т. е. упоредувајќи ги заградите затворени во продолжените производи $\prod\limits_{I} x_{(k+1)\,n}^{0}$ и $\prod\limits_{J} x_{(k+1)\,n}^{0}$, одејќи од десно во лево, ќе дојдеме до заклучок дека

3*

а) постојат два елементи x_{i_g} и $x_{i_{g+1}}$ зад кои во $\prod\limits_{I} x^0{}_{(k+1)\,n}$ се затворени загради, а меѓу нив нема ни отворена ни затворена заграда, додека во $\prod\limits_{J} x^0{}_{(k+1)\,n}$ затворена заграда стои зад $x_{i_g+d_1}$, а x_{i_g} и x_{i_g+1} не се одвоени со заграда (притоа е $o < d_1 \leqslant n$), или,

б) постојат два елементи x_{j_r} и $x_{j_{r+1}}$ зад кои во $\prod\limits_{J} x^0{}_{(k+1)\,n}$ се затворени загради, а меѓу нив нема ни отворена ни затворена заграда, додека во $\prod\limits_{I} x^0{}_{(k+1)\,n}$ затворена заграда стои зад $x_{j_r+d_2}$, а x_{j_r} и x_{j_r+} не се одвоени со заграда (притоа е $o < d_2 \leqslant n$).

Во секој од овие два случаи, на сличен начин како што е докажано равенството (2.8), може да се докаже дека во M е точно и равенството:

$$x^1_{n-d}\,(x^{n-d+1}_{2n-d}e)\;x^{2n-d+1}_{2n} = x^1_{n-d}\,(x^{n-d+1}_{2n-d+1})\;e\;x^{2n-d+2}_{2n}, \tag{2.10}$$

каде $d = d_1$, односно, $d = d_2$, спрема тоа дали во M е точен случајот а) или б).

Користејќи ги равенствата (2.6), (2.8) и (2.10), ќе покажеме дека во M е точно и равенството:

$$e\,x^1_{n-2}\,(x^{n-1}_{2n-1})\;x_{2n} = e\;x^1_{n-1}\,(x^n_{2n}), \tag{2.11}$$

за секои $x_1,\ x_2, \ldots, x_n \in M$.

Навистина, имаме:

$$e\,x^1_{n-2}\,(x^{n-1}_{2n-1})\;x_{2n} = x^1_{n-2}\;e\;(x^{n-1}_{2n-1})\,x_{2n} =$$

$$= \prod_{I^*} \underbrace{e\ldots e}_{i_t-1}\,x_1\,(\ldots(\prod_{I^*}\underbrace{e\ldots e}_{i_t-1}\,x_{n-h-1}\;(\underbrace{e\ldots e}_{n-h-1}\;\;x^{n-h}_{n-2}\,e\,(x^{n-1}_{2n-1})\,x_{2n}\,)\,e\ldots e)\ldots)\,e\ldots e$$

$$= \prod_{I^*} \underbrace{e\ldots e}_{i_t-1}\,x_1\,(\ldots(\prod_{I^*}\underbrace{e\ldots e}_{i_t-1}x_{n-h-1}\,(x^{n-h}_{n-2}\,e\,(x^{n-1}_{2n-1})\,x_{2n}\,\underbrace{e\ldots e}_{n-h-1}\;\;)\,e\ldots e)\ldots)\,e\ldots e$$

$$= \prod_{I^*} \underbrace{e\ldots e}_{i_t-1}\,x_1\,(\ldots(\prod_{I^*}\underbrace{e\ldots e}_{i_t-1}x_{n-h-1}\,(x^{n-h}_{n-1}\,e\,(x^{n}_{2n-1})\,x_{2n}\,\underbrace{e\ldots e}_{n-h-1}\;\;)\,e\ldots e)\ldots)\,e\ldots e$$

$$= \prod_{I^*} \underbrace{e\ldots e}_{i_t-1}\,x_1\,(\ldots(\prod_{I^*}\underbrace{e\ldots e}_{i_t-1}x_{n-h-1}\;(\underbrace{e\ldots e}_{n-h-1}\;\;x^{n-h}_{n-1}\;(e\,x^{n}_{2n-1})\,x_{2n}\,e\ldots e)\ldots)\,e\ldots e$$

$$= x^{1}_{n-1} \; (e\, x^{n}_{2n-1})\, x_{2n} = x^{1}_{n-1} (x^{n}_{2n-1} e)\; x_{2n} =$$

$$= \prod_{I^*} \underbrace{e \dots e}_{i_t - 1} x_1 (\dots (\prod_{I^*} \underbrace{e \dots e}_{i_t - 1} x_{d-1} \; (\underbrace{e \dots e}_{d-1} \; x^{d}_{n-1} (x^{n}_{2n-1} \; e)\, x_{2n})\, e \dots e) \dots)\, e \dots e$$

$$= \prod_{I^*} \underbrace{e \dots e}_{i_t - 1} x_1 (\dots (\prod_{I^*} \underbrace{e \dots e}_{i_t - 1} \; x_{d-1} (x^{d}_{n-1} \; (x^{n}_{2n-1} e) x_{2n} \; \underbrace{e \dots e}_{d-1})\, e \dots e) \dots)\, e \dots e$$

$$= \prod_{I^*} \underbrace{e \dots e}_{i_t - 1} x_1 (\dots (\prod_{I^*} \underbrace{e \dots e}_{i_t - 1} \; x_{d-1} \; (x^{d}_{n-1} \; (x^{n}_{2n})\, \underbrace{e \dots e}_{d})\, e \dots e) \dots)\, e \dots e$$

$$= \prod_{I^*} \underbrace{e \dots e}_{i_t - 1} x_1 (\dots (\prod_{I^*} \underbrace{e \dots e}_{i_t - 1} x_{d-1} (\underbrace{e \dots e}_{d-1} x^{d}_{n-1} \; (x^{n}_{2n})\, e)\, e \dots e) \dots)\, e \dots e$$

$$= x^{1}_{n-1} (x^{n}_{2n})\; e$$

$$= e \;\, x^{1}_{n-1} (x^{n}_{2n}).$$

За да го завршиме доказот на лемата, ќе докажеме на крај дека M е $(n-1,\, n)$—асоцијативен n-групоид, од каде, спрема теоремата 1.1, ќе се добие дека M е n-полугрупа.

$$x^{0}{}_{n-2} \; (x^{n-1}_{2n-1})\, x_{2n} =$$

$$= \prod_{I^*} \underbrace{e \dots e}_{i_t - 1} x_0 (e\, x^{1}_{n-2} \; (x^{n-1}_{2n-1})\, x_{2n})\, e \dots e$$

$$= \prod_{I^*} \underbrace{e \dots e}_{i_t - 1} x_0 (e\, x^{1}_{n-1} \; (x^{n}_{2n}))\, e \dots e$$

$$= x^{0}{}_{n-1} \; (x^{n}_{2n}) \, .$$

Со тоа лемата е докажана.

Доказ на теоремата. Ако $M(I, J)$ е стабилен n-групоид, тогаш точноста на теоремата следува од леамата 2.2 Ако $M(I, J)$ не е стабилен n-груцоид, т,е. ако постои $i_t \in I \cap J$ таков да за $i < k$ е $i_{t+1} - i_t > n$ и $j_{s+1} - j_s > n$, каде $j_s = i_t$, тогаш со замената $x_{i_t} = \dots = x_{i_t + n - 1} = e$ во (1.1), ќе добиеме дека M е $M(I_1, J_1)$ n-групоид, каде $I_1 = (i_1, \dots, i_{t-1},\; i_{t+} - n_1,\; i_{t+1} - {} - n, \dots, i_k - n)$ и $J_1 = (j_1, \dots, j_{s-1},\; j_{s+1} - n,\; j_{s+2} - n, \dots, j_k - n)$, $I_1 \neq J_1$. Ако сега $M(I_1, J_1)$ е стабилен n-групоид, пак доказот на теоремата следува од лемата 2.2, а ако пак тоа не е случај, тогаш претходната постапка ќе ја повториме. Повторена конечен број пати оваа постапка, поради $I \neq J$ ќе доведе до еден од следните два случаи:

1°. За некои $I_r \neq J_r$ $M(I_r, J_r)$ е стабилен n- групоид,

или,

2° За некои $i_p \neq j_q$ M е (i_p, j_q)-асоцијативен n-групоид.

Во првиот случај доказот на теоремата следува од лемата 2.2, а во вториот случај од теоремата 1.1.

Со тоа теоремата е докажана

3. Забелешка

Едно природно обопштение на проблемот што беше разгледан погоре би било да се, наместо постоење на централен неутрален елемент во n-групоидот M во кој е точно некое равенство од облик (1.1), претпостави постоење на неутрален елемент. Со примерот 3.1.2 од работата [1] може да се конструираат примери на n-групоиди M во кои постојат неутрални елементи и во кои за многу парови $I \neq J$ од множества од индекси е точно равенство од обликот (1.1), но кои пак не се n-полугрупи. Во тој смисол, земајќи ја во предвид работата [2], ни се чини дека би било природно да се очекува некој резултат сличен на главниот резултат од таа работа, во толку повеќе што овој проблем е обопштение на проблемот решен во работата [2] во истиот смисол како што е проблемот што во оваа работа го разгледуваме обопштение на проблемот од работата [1]. При решавањето на последниот задаток би била од корист следната лема, која што ги обопштува лемите 1.2 и 1.3 од [2], а кои во решавањето на задачата од таа работа играа битна улога:

Лема 3.1. Нека во n-групоидот M е точно равенството (1.1), каде $I=(i_1, i_1, \dots, i_k)$, $J=(j_1, j_2, \dots, j_k)$, и нека во M постои барем еден неутрален елемент. Ако постојат $i_t \in I$ и $j_s \in J$, такви да $i_t \leqslant min(i_1+j_s, j_1+j_s)$, $n+i_t \geqslant max(i_1+j_s, j_1+j_s)$, и ако е уште $i_{t+1}-i_t > n$, за $t \neq k$ тогаш во M ќе биде точно раввенството од облик (1.1) добиено со множествата од индекси $I'=(i_1+j_s-i_t, i_1+j_s-i_t, \dots, i_k+j_s-i_t)$ и $J'=(j_1+j_s-i_t, j_2+j_s-i_t, \dots, j_k+j_s-i_t)$

Доказ. Од условите на лемата следува направо дека I' и J' се множествота од индекси во M. Ако e е неутрален елемент во M, добиваме:

$$\prod_{I'} x^{\circ}_{(k+1)n} =$$

$$= \prod_{I} \underbrace{e \dots e}_{i_t} \prod_{I'} x^{\circ}_{(k+1)n} e \dots e$$

$$
\begin{array}{ll}
i_t \geqslant j_s & \left[\begin{array}{l} = \prod\limits_{J} \underbrace{e \ldots e}_{j_s} \prod\limits_{I} \underbrace{e \ldots e}_{i_t - j_s} x^{\circ}_{(k+1)n - i_t + j_s} x^{(k+1)n - i_t + j_s + 1}_{(k+1)n} e \ldots e \\[2ex] = \prod\limits_{J} \underbrace{e \ldots e}_{i_t} x^{\circ}_{j_s - i_t - 1} \prod\limits_{I} x^{j_s - i_t}_{(k+1)n} \underbrace{e \ldots e}_{j_s - i_t} e \ldots e \end{array}\right. \\
i_t < j_s & \\
i_t \geqslant j_s & \left[\begin{array}{l} = \prod\limits_{J} \underbrace{e \ldots , e}_{j_s} \prod\limits_{J} \underbrace{e \ldots e}_{i_t - j_s} x^{\circ}_{(k+1)n - i_t + j_s} x^{(k+1)n - i_t + j_s + 1}_{(k+)n} e \ldots e \\[2ex] = \prod\limits_{J} \underbrace{e \ldots e}_{i_t} x^{\circ}_{j_s - i_t - 1} \prod\limits_{J} x^{j_s - i_t}_{(k+1)n} \underbrace{e \ldots e}_{j_s - i_t} e \ldots e \end{array}\right. \\
i_t < j_s &
\end{array}
$$

$$
= \prod_{I} \underbrace{e \ldots e}_{i_t} \prod_{J'} x^{\circ}_{(k+1)n} e \ldots e = \prod_{J'} x^{\circ}_{(k+1)n} .
$$

Ќе приметиме дека горната лема може да се докаже и при поопшти услови, наместо неутрален елемент, доволно е да се претпостави постоење на k слогови во M од кои еден е ν_1-неутрален, друг ν_2-неутрален и т.н. (какви се ν_1, $\nu_2 \ldots$ зависи од индексите од I). Во тој смисол оваа лема би била обопштение на лемите 2.2 и 2.3 од работата [1].

Накрај, нека забележиме дека и задатокот што во оваа работа го решававме, како и задатокот што го споменавме како негово обопштение се специјални случаи од еден проблем што го има поставено Ѓ. Чупона во својата докторска дисертација, а кој покаено е формулиран и во работата [1].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Трпеновски и Ѓ. Чупона, Финитарни асоцијативни операции со неутрални елементи, Билтен на ДМФ на НРМ, кн. 12 (1961) 15—25.

[2] Б. Трпеновски, Делумно асоцијативни n-групоиди со неутрални елементи, Билтен на ДМФ на НРМ, кн. 14 (1963), 5—16.

B. L. Trpenovski

ON n-GROUPOIDS CONTAINING CENTRAL NEUTRAL ELEMENTS

Summary

An n-grupoid ([2]) $S(*)$ is said to be (Π_1, Π_2)-associative if the following identity is satisfied

$$\Pi_1(x_0, x_1, \ldots, x_{kn}) = \Pi_2(x_0, x_1, \ldots, x_{kn});$$

$\Pi_1(x_0, x_1, \ldots, x_{kn})$ and $\Pi_2(x_0, x_1, \ldots, x_{kn})$ are two different continued products in the n-grupoid. It is shown that every (Π_1, Π_2)-associative n-grupoid which contains a central neutral element ([2]) is an n-semingroup, and therefore it is (Π_1, Π_2)-associative for every Π_1 and Π_2.