

ЗА $[m, n]$ - ПРСТЕНИТЕ

Г. Чујона

Модифицирајќи го системот аксиоми за прстените, со тоа што наместо бинарни воведуваме произволни финитарни операции, доаѓаме до поопштиот поим за $[m, n]$ -прстен, каде m и n се природни броеви. (При тоа за $m=n=1$ добиваме обичен прстен). Во оваа работа покажуваме дека сеској $[m, n]$ -прстен може да се вметне во прстен.

1. Прво ќе ги споменеме нужните претходни дефиниции, а потоа ќе го формулираме основниот резултат на работава.

Нека $*$ е $(n+1)$ -арна операција во непразното множество Q ; при тоа пишуваме $y = *x_0 x_1 \dots x_n$, ако $*: (x_0, x_1, \dots, x_n) \rightarrow y$. Ако операцијата $*$ е асоцијативна велиме дека $Q(*)$ е n -полугрупа. Ако, освен тоа, производот $*x_0 x_1 \dots x_n$ не се менува при произволно пермутирање на факторите x_0, \dots, x_n , n -полугрупата $Q(*)$ се наречува комутативна. n -Полугрупата $Q(*)$ е n -група ако за секоја $(n+1)$ -орка $a_0, a_1, \dots, a_n \in Q$ и секое $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ равенката $*a_0 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n = a_i$ е еднозначно решлива по x во Q . Да напоменеме уште дека операцијата $*^k$ се определува рекурсивно со

$$(1) \quad *^0 x = x, \quad *^{k+1} x_0 \dots x_{(k+1)n} = **^k x_0 \dots x_{(k+1)n}$$

Нека $P(\square)$ е комутативна m -група, а $P(*)$ n -полугрупа и нека е исполнет следниот дистрибутивен закон:

$$(2) \quad \begin{aligned} & *x_0 \dots x_{i-1} \square y_0 \dots y_m x_{i+1} \dots x_n = \\ & = \square *x_0 \dots x_{i-1} y_0 x_{i+1} \dots x_n **^m *x_0 \dots x_{i-1} y_m x_{i+1} \dots x_n, \end{aligned}$$

за секое $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Тогаш структурата $P(\square, *)$ ќе ја наречеме $[m, n]$ -прстен. (Јасно е дека поимот за $[1, 1]$ -прстен се совпаѓа со поимот за обичен (бинарен) прстен).

За $[m, n]$ -прстенот $P(\square, *)$ велиме дека е $[m, n]$ -подпрстен на прстенот $R(+, \cdot)$ ако $P \subseteq R$ и ако $\square x_0 x_1 \dots x_m = x_0 + x_1 + \dots + x_m$, $*x_0 x_1 \dots x_n = x_0 \cdot x_1 \dots x_n$ за секое $x_i \in P$. Ако освен тоа, множеството P е генераторно за прстенот R велиме дека тој прстен е покривач на $[m, n]$ -прстенот $P(\square, *)$. Секој прстен изоморфен на R исто така ќе го сметаме за покривач на P .

Ќе го формулираме основниот резултат на работава.

Теорема. Нека P е $[m, n]$ -прстен. Посидои покривачи прстен R (еднозначно определен до изоморфизам) на P така, да ако R' е друг покри-

вач на P , тогаш идентичното пресликување од P на P може да се прошири до хомоморфизам од R на R' . (Поради оваа особина, R се наречува максимален покривач на P). Нека R е максималниот покривач на P и нека $\Omega = \{J\}$ е фамилијата од сите (двосирани) идеали на R такави да $x, y \in P \& y \in J + x \Rightarrow y = x$. Тогаш прсиенот R' е покривач на P ако и само ако $R' \cong R/J$ за некое $J \in \Omega$. За секој идеал $J \in \Omega$ постои максимален член $K \in \Omega$ во кој се содржи J . Во тој случај, ако идентичното пресликување од P на P може да се прошири до хомоморфизам од R/K на некој друг покривач од P , тогаш тој хомоморфизам е изоморфизам. (Поради оваа особина, покривачот R/K се наречува минимален).

2. Во работата [2] се воведени соодветни поими за покривашти полугрупи на дадена n -полугрупа, како и за максимални и минимални покривања. Не ги повторуваме дефинициите на овие поими, покрај другото, и затоа што тие (по аналогија) се јасни, ако се имаат предвид горенаведените дефиниции за $[m, n]$ -прстените. Сепак, ќе изнесеме два резултати од споменатата работа, бидејќи нив ќе ги искористиме при докажувањето на теоремата.

Лема 1. Секоја n -полугрупа $Q(*)$ има максимална покривашта полугрупа $S(\cdot)$. Нека (x_1, x_2, \dots, x_i) и (y_1, y_2, \dots, y_i) се две i -орки елементи од Q и нека постои низа елементи a_1, a_2, \dots, a_i од Q и ненегативни цели броеви $r_1, r_2, \dots, r_i, s_1, s_2, \dots, s_i$ такви да $t = (r_1 + r_2 + \dots + r_i)n + i = (s_1 + \dots + s_i)n + i$ и

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 &= *^{r_1} a_1 \cdots a_{r_1 n + 1}, & x_2 &= *^{r_2} a_{r_1 n + 2} \cdots a_{(r_1 + r_2)n + 2}, & \dots, & x_i &= *^{r_i} \cdots a_i \\ y_1 &= *^{s_1} a_1 \cdots a_{s_1 n + 1}, & y_2 &= *^{s_2} a_{s_1 n + 2} \cdots a_{(s_1 + s_2)n + 2}, & \dots, & y_i &= *^{s_i} \cdots a_i. \end{aligned}$$

Тогаш пишуваме $(x_1, x_2, \dots, x_i) \varphi (y_1, y_2, \dots, y_i)$. Потоа нека $(x_1, \dots, x_i) \psi (y_1, y_2, \dots, y_i)$ означува дека постои низа i -орки $(x_{11}, \dots, x_{1i}), (x_{21}, \dots, x_{2i}), \dots, (x_{k1}, \dots, x_{ki})$, таква да

$$(x_1, \dots, x_i) \varphi (x_{11}, \dots, x_{1i}) \varphi (x_{21}, \dots, x_{2i}) \varphi \cdots \varphi (x_{k1}, \dots, x_{ki}) \varphi (y_1, \dots, y_i).$$

Нека $x_i, y_j \in Q$ и $i, j \leq n$. Равенството $x_1 x_2 \cdots x_i = y_1 y_2 \cdots y_j$ е точно во S ако и само ако $(x_1, \dots, x_i) \psi (y_1, \dots, y_j)$ и $i = j$ ([2] Теорема 2).

Лема 2. Секој покривач на една комутативна n -група е комутативна група.

Доказ. Нека S е покривашта полугрупа на комутативната n -група $Q(*)$. Ќе покажеме дека е точно равенството $xu = ux$ за секој пар елементи $x, y \in Q$, од што ќе следува дека S е комутативна полугрупа, бидејќи Q е генераторно множество. Нека $x, y \in Q$, и нека x_0, x_1, \dots, x_n е низа елементи од Q таква да $x = * x_0 x_1 \cdots x_n$ (т.е. $x = x_0 x_1 \cdots x_n$ во S). Тогаш — ако се има предвид комутативноста на $Q(*)$ — добиваме

$$\begin{aligned} xy &= (x_0 x_1 \cdots x_n) y = x_0 (x_1 \cdots x_n y) = x_0 (y x_1 \cdots x_n) \\ &= (x_0 y x_1 \cdots x_{n-1}) x_n = (y x_0 x_1 \cdots x_{n-1}) x_n = y (x_0 x_1 \cdots x_n) \\ &= yx, \end{aligned}$$

што и сакавме да докажеме. Со тоа е докажана и точноста на лемата, бидејќи секоја покривашта полугрупа од една n -група е група ([2], Теорема 2).

3. Нека $P(\square, *)$ е $[m, n]$ -прстен и нека $H(+)$ е максималното покривање на m -групата $P(\square)$. Sprema лемата 2, $H(+)$ е комутативна група. Ако ставиме $\Delta x_0 x_1 \dots x_n = * x_0 x_1 \dots x_n$ ќе добиеме една делумно определена операција во множеството H ; имено, таа операција ќе биде определена на множеството P кое е подмножество од H . Ќе ја прошириме таа операција така да биде определена на целото множество H .

Нека $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k \in P$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, и нека ставиме

$$(4) \quad \Delta x_1 \dots x_i (y_1 + y_2 + \dots + y_k) x_{i+1} \dots x_n \\ = * x_1 \dots x_i y_1 x_{i+1} \dots x_n + \dots + * x_1 \dots x_i y_k x_{i+1} \dots x_n.$$

Потоа, нека претпоставиме дека производите

$$(5) \quad w_j = \Delta (x_{11} + \dots + x_{1k_1}) \dots (x_{j1} + \dots + x_{jk_j}) y_j \times \\ \times (x_{i+11} + \dots + x_{i+1k_{i+1}}) \dots (x_{n1} + \dots + x_{nk_n})$$

се определени за секоје $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, каде $x_{\lambda v}, y_j \in P$; $k_v, k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Тогаш пишуваме

$$(6) \quad \Delta u_1 \dots u_i (y_1 + y_2 + \dots + y_k) u_{i+1} \dots u_n = w_1 + w_2 + \dots + w_k, \\ \text{каде } u_v = x_{v1} + \dots + x_{vk_v}.$$

Со тоа, операцијата Δ ја определивме на целото множество H , но не е непосредно јасна нејзината еднозначност. Имено, ако елементот $u = y_1 + y_2 + \dots + y_k$ биде претставен и во форма $u = z_1 + z_2 + \dots + z_k$ се поставува прашање дали десната страна од равенството (4) нема да се промени, ако во неа се стави z_v наместо y_v . Ќе покажеме дека таа страна навистина нема да се промени, а при тоа ќе ги користиме релациите φ и ψ воведени во формулацијата на лемата 1. Поради $y_1 + \dots + y_k = z_1 + \dots + z_k$ имаме $(y_1, \dots, y_k) \psi (z_1, \dots, z_k)$. Нека претпоставиме прво дека $(y_1, \dots, y_k) \varphi (z_1, \dots, z_k)$. Тогаш елементите y_v, z_v можат да се изразат со помош на една низа елементи $a_0, a_1, \dots, a_l \in P$, како што е споменато во лемата 1, со тоа што наместо $*$ стои \square' , а z_v наместо x_v . Ако тие вредности за y_v ги замениме во десната страна на (4), можеме во секој собирок да го примениме дистрибутивниот закон. Потоа, ако на соодветен начин ги групираме членовите и уште еднаш ја примениме дистрибутивноста — но во обратен смер —, добиваме израз кој се разликува од првобитниот во тоа што наместо y_v стои z_v . Со последователно применување на оваа постапка, истиот резултат се добива и во случај кога $(y_1, \dots, y_k) \psi (z_1, \dots, z_k)$. Од сето тоа следува дека производот определен со (4) е еднозначен. Со индуктивна постапка, се покажува дека и во (6) десната страна е еднозначно определена. Значи Δ е $(n+1)$ -арна операција во множеството H .

Од начинот по кој е дефинирана операцијата " Δ ", јасно е дека таа е асоцијативна и дека е дистрибутивна спрема "+", па значи $H(+, \Delta)$ е $[1, n]$ -прстен. Освен тоа, P е генераторно множество на тој $[1, n]$ -прстен.

4. Нека $P(\square, *)$ е $[1, n]$ -прстен и нека $S(\cdot)$ е максималната покривашта полугрупа на n -полугрупата $P(*)$. Потоа, над $S(\cdot)$ го конструираме полугрупниот прстен $T(+, \cdot)$. Значи, $T(+)$ е абелова група за која S е множество од слободни генератори, а операцијата множење дефинирана е во T со помош на соодветната операција од S и особината за дистрибутивност. Секој елемент од T може да се претстави во облик $\sum \varepsilon x_1 x_2 \cdots x_k$, каде $\varepsilon = \pm 1$, $x_v \in P$, $k \leq n$.

Со A да го означиме множеството на сите елементи од T што можат да се претстават во облик

$$(7) \quad \sum \varepsilon x_1 \cdots x_i (z - u - v) \cdots x_k,$$

каде $u \square v = z$ во $P(\square)$. Јасно е дека A е идеал во прстенот $T(+, \cdot)$. Нека $x, y \in P$ и нека $y \in A + x$. Тогаш y може да се претстави во облик

$$(8) \quad y = x + \sum \varepsilon (z - x - y) + \sum \delta x_1 \cdots x_i (w - u - v) \cdots x_n + \sum \gamma y_1 \cdots y_j (c - a - b) y_{j+1} \cdots y_k,$$

каде $z = x \square y$, $w = u \square v$, $c = a \square b$ во $P(\square)$ и $k < n$. Ако се има предвид фактот дека $T(+)$ е слободна комутативна група, се доаѓа до заклучение десната страна на равенството (8) да биде идентично еднаква со y . Производите што го формираат збирот $\sum \gamma y_1 \cdots y_j (c - a - b) \cdots y_k$ (а се различни од нула) не припаѓаат на $PU(-P)$, од што следува дека тој збир е нула, бидејќи другите зборови се во $PU(-P)$. Спрема тоа, имаме

$$(9) \quad y = x + \sum \gamma (z - x - y) + \sum \varepsilon x_1 \cdots x_i (w - u - v) \cdots x_n$$

Имајќи пак во вид дека (9) е идентитет, уочуваме дека соодветно равенство треба да биде точно и во групата $P(\square)$, но поради $z = x \square y$, $w = u \square v$, тогаш десната страна се сведува на x , бидејќи другите два збира се нули. Со тоа покажавме дека $x, y \in P$, $y \in A + x \Rightarrow y = x$, од што следува дека пресликувањето $x \rightarrow A + x$ е изоморфизам од $[1, n]$ -прстенот $P(\square, *)$ на $[1, n]$ -подпрстенот $\bar{P} = \{A + x; x \in P\}$ од $R = T/A$. Јасно е дека \bar{P} е генераторно множество за R . Добивме значи дека $R = T/A$ е покривашт прстен за $[1, n]$ -прстенот $P(\square, *)$. Исто така, јасно е дека ако R' е друг покривач на дадениот $[1, n]$ -прстен P , тогаш идентичното пресликување од P на P може да се продолжи до хомоморфизам од R на R' .

5. Со изнесеното во предходните два дела, точноста на првиот дел од теоремата е докажана. Преостанатиот дел се докажува на сличен начин како и соодветниот дел на теоремата 2 од работата [2]. Затоа нема да го спроведеме тој доказ.

6. Резултатот добиен во оваа работа укажува на тоа дека теоријата на $[m, n]$ -прстените е дел од теоријата на бинарните прстени, па спрема тоа класата $[m, n]$ -прстени може да се изучува со помош на класата бинарни прстени. Но, сметаме дека $[m, n]$ -прстените можат да се изучуваат и директно,

па дури и дека нивната теорија може да се примени за окарактеризирање на некои класи бинарни прстени. На пример, може да се постави прашање во каква мера еден (бинарен) прстен ϵ окарактеризиран од фамилијата на неговите $[m, n]$ – подпрстени, или од фамилијата на $[m, n]$ – подидеали (ако овој поим се воведи на соодветен начин).

Секој $[1, n]$ – прстен е група со мултиоператор (да се види [1] стр. 115), од што — на пример — следува фактот дека фамилијата на сите идеали од еден $[1, n]$ – прстен е модуларна мрежа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, Москва 1962.
 [2] Ѓ. Чупона, За асоцијативните конгруенции, Билтен на Друшт. математ. физ. НРМ кн 12 (1962) 2 — 12.

G. Čupona

ON $[m, n]$ – RINGS

(Summary)

Let $*$ be an associative $(n + 1)$ –ary operation on a (non-empty) set Q ; then $Q(*)$ is said to be an n –semigroup. The n –semigroup $Q(*)$ is called commutative if the following identity equation $*x_0x_1 \cdots x_n = *x_0\xi x_1\xi \cdots x_n\xi$ is satisfied for every permutation ξ of $0, 1, \dots, n$. And, the n –semigroup $Q(*)$ is an n –group if $*Qa_1a_2 \cdots a_n = *a_1a_2 \cdots a_nQ = Q$ for every $a_1, a_2, \dots, a_n \in Q$.

Let $P(\square, *)$ be a universal algebra such that: (i) $P(\square)$ is a commutative m –group; (ii) $P(*)$ is a semigroup; and (iii) the following distributive law

$$\begin{aligned} &*x_0 \cdots x_{i-1} \square y_0 \cdots y_m x_{i+1} \cdots x_n = \\ &= \square *x_0 \cdots x_{i-1} y_0 x_{i+1} \cdots x_n * \cdots * x_0 \cdots x_{i-1} y_m x_{i+1} \cdots x_n \end{aligned}$$

is satisfied for every $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Then $P(\square, *)$ is said to be an $[m, n]$ –ring. If $R(+, \cdot)$ is a (binary) ring such that $P \subseteq R$ and

$$\square x_0x_1 \cdots x_m = x_0 + x_1 + \cdots + x_m, \quad *x_0x_1 \cdots x_n = x_0x_1 \cdots x_n$$

for every $x_i \in P$, then $P(\square, *)$ is an $[m, n]$ –subring of R . And, if P is a generating subset of R , then R is said to be a covering ring of P ; a ring R_1 isomorphic with R is also assumed to be a covering ring of P .

The following theorem is the main result of this paper.

Theorem. Let P be an $[m, n]$ -ring. There exists a covering ring R of P such that if R' is also a covering ring of P , then the identity mapping on P can be extended to a homomorphism of R onto R' . (The ring R is called the maximal covering of P). Let $\Omega = \{J\}$ be the collection of (two-sided) ideals of the ring R (i. e. of the maximal covering of P) such that $x, y \in P$ & $y \in J + x \Rightarrow y = x$. Then, R' is a covering ring of P if and only if $R' \cong R/J$ for some $J \in \Omega$. Every ideal $J \in \Omega$ is contained in a maximal member K of Ω . Then, every homomorphism of R/K onto a covering ring of P , which induces the identity mapping on P , is an isomorphism. (R/K is said to be a minimal covering of P).

Note. Probably, there may exist two non-isomorphic minimal coverings of an $[m, n]$ -ring.