Живко Мадевски

n-АСОЦИЈАТИВИ КАЈ КОИ НЕКОЈ ЛЕВ ИДЕАЛ Е n-ГРУПА

(Примено на 29. I. 1968 г.)

Во оваа работа се обопштува резултатот од [1]; т.е. се дава опис на класата n-асоцијативи кај кои некој лев идеал е n-група.

1. Ќе дадеме неколку предодни дефиниции.

Секоја структура S со една $(n+1)$-тарна операција ја викаме n-асоцијатив, ако е исполнето равенството

$$(1) \qquad a_0\, a_1 \ldots a_{i-1}\, (a_i \ldots a_{i+n}) \ldots a_{2n} = a_0 \ldots a_{j-1}\, (a_j \ldots a_{j+n}) \ldots a_{2n},$$

за секои $i, j : 0 \leqslant i, j \leqslant n$.

Ако при тоа и равенките $xa_1\, a_2 \ldots a_n = a_0$, $a_0\, a_1 \ldots a_{n-1} y = a_n$ имаат решенија по x и y, структурата S е n-група. Се покажува дека во тој случај и равенката $a_0 \ldots a_{i-1}\, x a_{i+1} \ldots a_n = a_i$, има еднозначно решение за секое i : $0 \leqslant i \leqslant n$. Да спомeнеме дека во секоја n-група постои неутрален слог т.е. таква низа $e_1, e_2, \ldots e_n$, која има особина да за секое a од S важи

$$e_1 \ldots e_{i-1}\, a e_{i+1} \ldots e_n = a \text{ за секое } i : 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Секое подмножество од S кое е и n-асоцијатив, односно n-група се вика n-подасоцијатив, односно n-подгрупа.

Понатаму во текстот ќе велиме секогаш асоцијатив наместо n-асоцијатив.

Асоцијативите се подкласа од класата делумни асоцијативи. Имено, ако е определено едно пресликување $y = x_0\, x_1 \ldots x_n$ од некое подмножество $F \subseteq S^{n+1}$ во S, такво да од егзистенцијата на левата страна од (1) следува егзистенцијата и на десната страна, како и нивната еднаквост, тогаш S се наречува делумен асоцијатив.

Нека S е еден асоцијатив.

Секое подмножество $J \subseteq S$ за кое важи $S \ldots SJS \ldots S \subseteq J$ се наречува i-идеал на асоцијативот S. Јасно е дека секој i-идеал е и подасоцијатив од S. За $i = n$ $(i = 0)$ i-идеалот се наречува лев (десен). Ако J е идеал за секое i: $0 \leqslant i \leqslant n$, тогаш велиме дека е идеал. J е минимален i-идеал ако не е вистинско подмножество од некој друг i-идеал.

2. Да наведеме некои особини на левите идеали; јасно е дека соодветни особини ќе важат и за десните идеали.

Од дефиницијата веднаш следува.

2.1 Ако L е лев идеал и ако $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$, тогаш и $LL \dots La_1$, $La_1 a_2 \dots a_n$ се леви идеали.

2.2 Унијата од една фамилија леви идеали е пак лев идеал.

На ист начин, како и соодветната особина кај 1-асоцијативите т.е. бинарните полугрупи (да се види на пр. [3] стр. 253), се докажува и следната особина.

2.3 Ако L е минимален лев идеал тогаш и $La_1 a_2 \dots a_n$ е минимален лев идеал.

Како следствие од особините 2.1 и 2.3 добиваме.

2.4 Нека L и M се минимални леви идеали и нека $a_1, \dots, a_n \in S$, $s \in La_1 a_2 \dots a_n$ и $m \in M$. Тогаш имаме $Lss \dots s = LL \dots Ls = La_1 a_2 \dots a_n$, $Lmm \dots m = LL \dots Lm = M$.

2.5 Ако L е минимален лев идеал, тогаш $\{LL \dots Ls;\ s \in S\}$, односно $\{Lss \dots s;\ s \in S\}$, е фамилијата од сите леви идеали; при тоа може да се претпостави дека $s \in LL \dots Ls$, односно $s \in Lss \dots s$.

Ќе ја докажеме следната особина.

2.6 Унијата од фамилијата минимални леви идеали е идеал.

Д о к а з: Ако оваа фамилија е празна, тогаш и унијата е празна па, значи е и идеал, бидејќи по дефиниција земаме празното множество да е идеал. Нека L е еден фиксен минимален лев идеал. Спрема 2.5 $\{Lss \dots s;\ s \in S\} = \{LL \dots Ls;\ s \in S\}$ е фамилијата од сите минимални леви идеали, а нејзината унија е $K = LL \dots LS = LSS \dots S$. Од тоа следува $\underbrace{SS \dots S}_{i}KS \dots S = \underbrace{SS \dots S}_{i}LL \dots LSS \dots S \subseteq LL \dots LSS \dots S \subseteq K$, т.е. дека K е i-идеал за секое i: $0 \leqslant i \leqslant n$, што и сакавме да докажеме.

Очигледна е точноста и на следната особина.

2.7 Ако L е лев идеал и ако L е n-подгрупа, тогаш L е минимален лев идеал.

3. Овде и во натамошното изложување ќе сметаме дека S е асоцијатив за кој постои барем еден лев идеал G што е и негова n-подгрупа.

Ќе ја докажеме следната особина.

3.1 Секој минимален лев идеал од S е и n-подгрупа.

Д о к а з: Нека M е било кој минимален лев идеал од S; спрема 2.5 тој има облик $M = GG \dots Gs$, $s \in M$. Да покажеме дека M е и n-подгрупа.

Најнапред нека докажеме дека постои елемент $x \in M$ таков да $a_1 a_2 \dots a_n x = b$, при што $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$. Да забележиме дека во случај кога $e_1, e_2, \dots, e_n$ е неутрален слог во G, имаме $e_1 \dots e_n m = m$ за секое $m \in M$, бидејќи од $m \in GG \dots Gs$ следува $m = g_1 g_2 \dots g_n s$, $g_i \in G$, а потоа и $e_1 e_2 \dots e_n m = e_1 e_2 \dots e_n g_1 g_2 \dots g_n s = g_1 g_2 \dots g_n s = m$. Нека се $a_i = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} s$ и $b = b_1 b_2 \dots b_n s$; како пак, $SS \dots Se_1 \subseteq G$, можеме да напишеме $a = a_1 a_2 \dots a_n e_1 \in G$

и $c = b_1 b_2 \dots b_n b_1 \in G$. Елементот $z \in G$ може да се определи од равенката $aze_3 e_4 \dots e_n e_1 = c$. Тогаш имаме $ce_2 e_3 \dots e_n s = aze_3 e_4 \dots e_n e_1 e_2 \dots e_n s = aze_3 \dots e_n s$. Значи $aze_3 \dots e_n s = ce_2 e_3 \dots e_n s = b_1 b_2 \dots b_n e_1 e_2 \dots e_n s = b_1 b_2 \dots b_n s = b$, односно $a_1 a_2 \dots a_n e_1 ze_3 \dots e_n s = b$, од каде следува дека $x = e_1 ze_3 \dots e_n s$ е решение на равенката $a_1 a_2 \dots a_n x = b$.

Имајќи предвид дека M е минимален лев идеал, т.е. дека $Ma_1 a_2 \dots a_n = M$, добиваме дека равенката $ya_1 a_2 \dots a_n = b$ е секогаш решлива во M.

Со тоа е докажано дека M е n-подгрупа.

Нека $\{G_\alpha ; \alpha \in A\}$ е фамилијата од сите минимални леви идеали на S (спрема последната особина тие се и n-подгрупи). Спрема 2.6 унијата од тие минимални леви идеали K е идеал во S. Од друга страна пак G_α е лев идеал и од K, па значи асоцијативот K е унија на фамилијата свои леви идеали кои се и n-подгрупи. Спрема т е о р е м а т а 1 од [2], K е изоморфен со директниот производ $G \times A$, каде G е n-група, при што операцијата во $G \times A$ е определена со

(2) $$(x_0, \alpha_0)\ (x_1, \alpha_1) \dots (x_n, \alpha_n) = (x_0\, x_1 \dots x_n, \alpha_n).$$

Од кажаното следи.

3.2 Сите членови од фамилијата $\{G_\alpha ; \alpha \in A\}$ минимални леви идеали на S се изоморфни n-групи. Ако K е унијата на оваа фамилија, тогаш K е идеал на S, и ако G е n-група изоморфна со минималните леви идеали G_α, асоцијативот K е изоморфен со асоцијативот $G \times A$, при што операцијата е определена со (2).

Понатаму ќе претпоставуваме дека $K = G \times A$, т.е. $G \times A \subseteq S$. Спрема тоа, ако $G \times A = S$ (т.е. $K = S$), можеме да сметаме дека структурата на асоцијативот S е потполно изучена.

4. Нека $P = S \setminus G \times A$ е непразно множество и нека ставиме $G_\alpha = \{(x, \alpha); x \in G\}$; да фиксираме еден неутрален слог $e_1, e_2, \dots e_n$ во G.

Ако $p \in P$ и $\alpha \in A$, тогаш $p\,(e_1, \alpha)\ (e_2, \alpha) \dots (e_n, \alpha) = (\varphi\,(p, \alpha), \alpha) \in G_\alpha$, бидејќи G_α е лев идеал. Сега пак, ако β е произволен елемент од A, ќе имаме $(\varphi\,(p, \alpha), \alpha) = p\,(e_1, \alpha)\ (e_2, \alpha) \dots (e_n, \alpha) = p\ (e_1, \beta)\ (e_2, \beta) \dots (e_n, \beta)\ (e_1, \alpha)\ (e_2, \alpha) \dots (e_n, \alpha) = (\varphi\,(p, \beta), \alpha)$, од што следува дека $\varphi\,(p, \alpha) = \varphi\,(p)$ независи од втората компонента, т.е. φ е пресликување од P во G.

Имајќи предвид дека $G \times A$ е идеал во S, добиваме $(e_1, \alpha)\ (e_2, \alpha) \dots (e_n, \alpha)\ p = (\psi\,(\alpha, p), \alpha\, \xi_p) \in G \times A$, при тоа ξ_p е трансформација на A, т.е. пресликување од A во A. Ќе покажеме дека $\psi\,(\alpha, p)$ независи од првата компонента и уште повеќе дека $\psi\,(\alpha, p) = \varphi\,(p)$. Навистина, ако $\beta \in A$ имаме $(\psi\,(\alpha, p), \beta) = (\psi\,(\alpha, p), \alpha\xi_p)\,(e_1, \beta)\,(e_2, \beta) \dots (e_n, \beta) = (e_1, \alpha)\,(e_2, \alpha) \dots (e_n, \alpha)\, p\,(e_1, \beta)\,(e_2, \beta) \dots (e_n, \beta) = (e_1, \alpha)\ (e_2, \alpha) \dots (e_n, \alpha)\ (\varphi\,(p), \beta) = (\varphi\,(p), \beta)$, т. е. добиваме дека $\psi\,(\alpha, p) = \varphi\,(p)$. Од изложеното следуваат овие две равенства

(3) $$s\,(e_1, \alpha)\ (e_2, \alpha) \dots (e_n, \alpha) = (\varphi\,(s), \alpha)$$

(4) $$(e_1, \alpha)\ (e_2, \alpha) \dots (e_n, \alpha)\, s = (\varphi\,(s), \alpha\xi_s),$$

за секое $s \in P$.

Сакајќи овие равенста да важат и кога $s \in G \times A$, ќе ги прошириме пресликувањата φ и ξ на следниот начин.

(5) $$\varphi(x, \alpha) = x \text{ и } \alpha\xi_{(x,\beta)} = \beta.$$

Сега ќе изведеме едно поопшто равенство кое ќе ги содржи како специјални случаеви равенствата (2), (3) и (4). Имено, нека барем еден од членовите на низата $s_0, s_1, \ldots, s_n$ припаѓа на $G \times A$ и нека $s_k = (x, \alpha)$ биде еден од нив. Тогаш имаме $s_0 s_1 \ldots s_{k-1} s_k s_{k+1} \ldots s_n = s_0 s_1 \ldots s_{k-1} (x, \alpha) s_{k+1} \ldots s_n = s_0 s_1 \ldots s_{k-1} (e_1, \alpha)(e_2, \alpha) \ldots (e_n, \alpha)(x, \alpha)(e_1, \alpha)(e_2, \alpha) \ldots (e_n, \alpha) s_{k+1} \ldots s_n = s_0 s_1 \ldots s_{k-2} (\varphi(s_{k-1}), \alpha)(x, \alpha)(\varphi(s_{k+1}), \alpha\xi s_{k+1}) s_{k+2} \ldots s_n = \ldots$ продолжувајќи ја оваа постапка $\ldots = (\varphi(s_0)\varphi(s_1) \ldots \varphi(s_n), \alpha\xi s_{k+1} \xi s_{k+2} \ldots \xi s_n)$. Имајќи пак предвид дека $\alpha = \lambda\xi_{(x,\alpha)} = \lambda\xi s_k$, λ произволен елемент од A, можеме да напишеме

(6) $$s_0 s_1 \ldots s_n = (\varphi(s_0)\varphi(s_1) \ldots \varphi(s_n), \nu\xi s_0 \xi s_1 \ldots \xi s_n),$$

каде ν е произволно избран фиксен елемент од A.

Нека сега сите $s_0, s_1, \ldots, s_n \in P$, а пак $s_0 s_1 \ldots s_n = (x, \alpha)$. Тогаш е $s_0 s_1 \ldots s_n = (x, \alpha) = (e_1, \beta)(e_2, \beta) \ldots (e_n, \beta)(x, \alpha) = (e_1, \beta)(e_2, \beta) \ldots (e_n, \beta) s_0 s_1 \ldots s_n = (\varphi(s_0), \beta\xi s_0) s_1 \ldots s_n =$ спрема (6) $= (\varphi(s_0)\varphi(s_1) \ldots \varphi(s_n), \beta\xi s_0 \xi s_1 \ldots \xi s_n)$, каде β е произволен фиксен елемент од A. Со ова покажавме дека (6) важи и во овој случај, само што сега за секое $\beta \in A$ е $\beta\xi s_0 \xi s_1 \ldots \xi s_n = \alpha$ т.е. имаме една константа (пресликување на A во еден свој елемент).

5. Со направените проширувања добивме дека φ е пресликување од S во G, а $\xi\colon s \to \xi_s$ е пресликување од S во T_A т.е. во полугрупата од сите трансформации на A. Ќе покажеме дека овие пресликувања се хомоморфизми.

Спрема (4) имаме $(\varphi(s_0 s_1 \ldots s_n), \alpha\xi s_0 s_1 \ldots s_n) = (e_1, \alpha)(e_2, \alpha) \ldots (e_n, \alpha) s_0 s_1 \ldots s_n = (\varphi(s_0), \alpha\xi s_0) s_1 \ldots s_n =$ и сега спрема (6) $= (\varphi(s_0)\varphi(s_1) \ldots \varphi(s_n), \alpha\xi s_0 \xi s_1 \ldots \xi s_n)$, односно $\varphi(s_0 s_1 \ldots s_n) = \varphi(s_0)\varphi(s_1) \ldots \varphi(s_n)$ и $\xi s_0 s_1 \ldots s_n = \xi s_0 \xi s_1 \ldots \xi s_n$.

6. Множеството P не мора да биде подасоцијатив на асоцијативот S, но во секој случај може да се смета за делумен асоцијатив во однос на операцијата од S. Рестрикцијата на P од пресликувањето φ е хомоморфизам од P во G, а исто така и $p \to \xi_p$ е хомоморфизам од P во полугрупата T_A од сите трансформации на A.

7. Како заклучение од сето изнесеното досега можеме да сметаме дека е докажана, во еден правец, следната

Теорема: n-асоцијативот S има некој лев идеал што е n-подгрупа, ако и само ако тој е изоморфен со некој n-асоцијатив $[G, A, P, \varphi, \xi] = G \times A \cup P$, каде

(i) G е n-група, A непразно множество, P делумен n-асоцијатив и $G \times A \cap P = \varnothing$;

(ii) $\varphi\colon p \to \varphi(p)$ е хомоморфизам од P во G, а $\xi\colon p \to \xi_p$ хомоморфизам од P во T_A таков да $\xi_{p_0} \xi_{p_1} \ldots \xi_{p_n}$ е константа кога $p_0 p_1 \ldots p_n \overline{\in} P$;

(iii) производот од $n+1$ елемент $s_0, s_1, \ldots, s_n$ од $G \times A \cup P$ се дефинира како и производот во P кога тие се елементи од P и $s_0 s_1 \ldots s_n \in P$, а во секој друг случај — со помош на (6); при тоа пресликувањата φ и ξ се прошируваат и на $G \times A$ со (5).

Доказ: При претпоставка дека S е n-асоцијатив со спомнатите особини, во точките 3., 4., 5. и 6. е докажана егзистенцијата на G, A, P, φ и ξ со особини (i), (ii) и (iii).

Од друга страна, ако G, A, P, φ и ξ ги имаат сособините (i) и (ii) и во $G \times A \cup P$ се определи $(n+1)$-тарна операција спрема (iii), лесно се проверува дека се добива n-асоцијатив за кој секое множество од облик $G_\alpha = \{(x, \alpha); x \in G\}$ е негова n-подгрупа а во исто време и лев идеал. Со тоа е комплетиран доказот на теоремата. —

Математички институт
Природно-математички факултет
Скопје

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чупона, Ѓ.: Semigroups in which some left ideal is a group, Год. зборник — секција А — на Прир.-матем. фак., Скопје, кн. 14, 1963.

[2] Трпеновски, Б.: За некои n-полугрупи што се унии од n-групи, Билтен на Друш. на мат. и физ. од СРМ, кн. XVI, 1965.

[3] Ляпин, Е. С.: Полугруппи, Москва, 1960.

Živko Madevski

n- SEMIGROUPS IN WHICH SOME LEFT IDEALS ARE n-GROUPS

Summary

A generalization of the result of [1] is given in this note. Namely, the following result is proved.

Theorem. An n-semigroup S contains an n-subgroup as a left ideal, if and only if it is isomorphic whit an n-semigroup $T = [G, A, P, \varphi, \xi] = G \times A \cup P$ where:

(i) G is an n-group, A a set and P a partial n-semigroup such that $G \times A \cap P = \emptyset$.

(ii) $\varphi \in \mathrm{Hom}\ (P, G)$.

(iii) $\xi \in \mathrm{Hom}\ (P, T_A)$, where $\xi p_0\, \xi p_1 \ldots \xi p_n$ is a constant if the product $p_0 p_1 \ldots p_n$ is not defined in P; (T_A is the transformation semigroup of A).

(iv) $p_0 p_1 \dots p_n = p$ in $P \Rightarrow p_0 p_1 \dots p_n = p$ in T.

(v) $t_0 t_1 \dots t_n$ is not defined in $P \Rightarrow t_0 t_1 \dots t_n =$
$(t_0 \psi\, t_1 \psi \dots t_n \psi,\ \nu\, \eta_{t_0} \eta_{t_1} \dots \eta_{t_n})$ in T, where ν is an arbitrary element of A and ψ, η are defined as follows:

$$t\psi = \begin{cases} t\varphi & \text{if } t \in P \\ x & \text{if } t = (x, \alpha) \in G \times A, \end{cases}$$

$$\nu\eta_t = \begin{cases} \nu\xi_t & \text{if } t \in P \\ \beta & \text{if } t = (x, \beta) \in G \times A. \end{cases}$$