ЗА n-МОДУЛИТЕ

Наум Целакоски

1. Увод. Во овој напис се разгледува едно обопштување на поимот модул. Имено, ако во дефиницијата на модул над даден прстен R, наместо комутативна група, се земе комутативна n-група, и притоа во другите услови се извршат соодветни измени, се добива едно обопштение на поимот модул, кое овде е наречено *R-n-модул*.

Добро е познато дека секоја n-полугрупа може да се покрие со полугрупа и дека покривката на секоја n-група е група; уште повеќе, ако n-групата е комутативна, тогаш и покривната група е комутативна.

Нека е A даден R-n-модул. Покривката на n-групата A нека ја наречеме покривка и на R-n-модулот A. Овде се покажува дека покривката на еден R-n-модул во општ случај не е R-модул, туку еден систем близок со R-модулите, па е наречен *ν-R-модул*. Воведувајќи уште некои поими во врска со R-n-модулите, во овој напис се разгледуваат некои врски меѓу n-модулите и бинарните модули што се добиваат на соодветен начин, а на крајот се дава една врска меѓу инјективните (проективните) n-модули и соодветните покривки.

2. n-модули. Нека е A комутативна n-група, чија $n+1$-арна операција е адитивно означена и нека е R асоцијативен прстен со единица 1 ($\neq$ o). Освен тоа, нека е дефинирано пресликување $(r, a) \to ra$ од $R \times A$ во A со следниве особини:

$$\begin{gathered} r(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = ra_0 + ra_1 + \cdots + ra_n, \\ (r_0 + r_1 + \cdots + r_n)\, a = r_0 a + r_1 a + \cdots + r_n a, \\ (rs)\, a = r(sa), \\ 1\, a = a, \end{gathered} \tag{1}$$

за секои $a_0, \ldots, a_n$, $a \in A$ и секои $r_0, \ldots, r_n, r, s \in R$. Тогаш велиме дека A е снабдена со R-n-модулна структура, т.е. дека A е *R-n-модул*. Понатаму, на место R-n-модул ќе пишуваме накусо n-модул. (За $n=1$ се добива 1-модул, а тоа е обичен R-модул.)

Лема 1. *Нека е A n-модул. Ако* o *е нула на прстенот R, тогаш* oa *е неутрален елемент (= нула) во A за секој $a \in A$.*

Доказ. Според второто равенство од (1) имаме: $\underbrace{(o+\cdots+o)}_{n+1}a=$ $=\underbrace{oa+\cdots+oa}_{n+1}$. Нека $b\in A$ е произволен елемент и нека претпоставиме дека е $b+\underbrace{oa+\cdots+oa}_{n}=c$; тогаш имаме:

$$c+\underbrace{oa+\cdots+oa}_{n}=b+\underbrace{oa+\cdots+oa}_{n-1}+(\underbrace{oa+\cdots+oa}_{n+1})=b+\underbrace{oa+\cdots+oa}_{n-1}+oa,$$

т.е. $c=b$, што значи дека е $b+\underbrace{oa+\cdots+oa}_{n}=b$. Според тоа, oa е неутрален елемент во A.

Меѓутоа, можно е една n-група да нема неутрален елемент (в. на пр. Robinson [1], стр. 256). Од Лемата 1 следува дека:

Комутативната n-група A не може да се снабди со n-модулна структура за ниеден прстен R ако таа нема неутрален елемент.

Но, ако една n-група има неутрален елемент, тој не мора да биде единствен (в. на пр. Robinson [1], стр. 257). Во понатамошното излагање во овој напис ќе разгледуваме само n-групи кои имаат еден, и само еден неутрален елемент. Според тоа, одовде понатаму терминот n-модул се употребува само во потесна смисла, т.е. се разгледуваат само n-модули кои имаат само по една нула. Да забележиме дека, ако o е нулата на n-групата A, а r произволен елемент од R, и овде ќе биде $ro=o$.

Нека f е пресликување на n-модулот A во n-модулот A'. Ако е

$$f(a_0+\cdots+a_n)=f(a_0)+\cdots+f(a_n),\ f(ra)=rf(a) \tag{2}$$

за било кои $a_0,\ldots,a_n, a\in A$ и секој $r\in R$, тогаш f го викаме *R-n-хомоморфизам* (или накусо, n-хомоморфизам) од A во A'.

Ако $f: A\to A'$ и $g: A'\to A''$ се n-хомоморфизми, тогаш и $gf: A\to A''$ е n-хомоморфизам. Постапувајќи на наполно ист начин како во доказот на Лемата 1, се покажува дека: *Ако o е нула во A*, тогаш $f(o)$ *е нула во* A'; означувајќи ја нулата во A' исто така со o, можеме да пишуваме $f(o)=o$.

Секое непразно подмножество од n-модулот A кое и самото е n-модул во однос на истата $n+1$-арна операција се наречува *n-подмодул* од A. Лесно се увидува дека $\mathrm{Ker} f=\{a\in A;\ f(a)=o\}$ е n-подмодул од A, а $\mathrm{Im}\, f=\{a'\in A';\ (\exists a\in A)\ f(a)=a'\}$ е n-подмодул од A'.

Нека е B n-подмодул од n-модулот A. Множеството $a+nB$ на сите „суми" од облик $a+b_1+\cdots+b_n$, за секоја n-торка $b_1,\cdots,b_n\in B$ и $a\in A$, се наречува *лев комплекс* на n-модулот A по n-подмодулот B. Аналогно се дефинира десен комплекс, $nB+a$. Бидејќи операцијата во A е комутативна, секој десен комплекс се совпаѓа со соодветниот лев комплекс, т.е. $a+nB=nB+a$. Потоа, бидејќи B, како n-подмодул, содржи o (нула), имаме:

$$a+\underbrace{o+\cdots+o}_{n}=a, \text{ т.е. } a\in a+nB \quad \forall a\in A.$$

Ако $a \in B$, тогаш е $a+nB=B$. Навистина, за секоја n-торка $b_1, \ldots, b_n \in B$ и за секој $a \in B$ имаме $a+b_1+\cdots+b_n=b \in B$, па значи $a+nB \subseteq B$. Потоа, за секој $a \in B$ имаме: $a=a+\underbrace{o+\cdots+o}_{n} \in a+nB$, т.е. $B \subseteq a+nB$. Според тоа е $a+nB=B$ за секој $a \in B$. Важи и обратното: ако е $a+nB=B$, тогаш $a \in B$.

Лема 2. *Секој комплекс на n-модулот A по n-подмодулот B е определен со било кој од своите елементи, т.е.*

$$c \in a+nB \Rightarrow c+nB=a+nB.$$

Доказ. Нека $c \in a+nB$, т.е. $c=a+b_1+\cdots+b_n$, $b_i \in B$. Тогаш, за било која n-торка $b_1', \ldots, b_n' \in B$, имаме

$$\begin{aligned}c+b_1'+\cdots+b_n' &= (a+b_1+\cdots+b_n)+b_1'+\cdots+b_n'=\\ &=a+(b_1+\cdots+b_n+b_1')+b_2'+\cdots+b_n' \in a+nB,\end{aligned}$$

т.е. $c+nB \subseteq a+nB$. За да ја докажеме обратната инклузија, ќе ставиме $c+(-b_1)+\cdots+(-b_n)=d$, т.е. $(a+b_1+\cdots+b_n)+(-b_1)+\cdots+(-b_n)=d$, каде што $(-b_i)$ се спротивни елементи од b_i, $i=1, \ldots, n$. Тогаш за било која n-торка $b_1'', \ldots, b_n'' \in B$ имаме

$$\begin{aligned}&a+b_1''+\cdots+b_n''=\\ &=(a+[-b_1+\underbrace{o+\cdots+o}_{n-1}+b_1]+\cdots+[-b_n+\underbrace{o+\cdots+o}_{n-1}+b_n]+b_1''+\cdots+b_n''\\ &=([a+b_1+\cdots+b_n)+(-b_1)+\cdots+(-b_n)]+\underbrace{o+\cdots+o}_{n(n-1)})+b_1''+\cdots+b_n''\\ &=(d+\underbrace{o+\cdots+o}_{n(n-1)})+b_1''+\cdots+b_n''=d+b_1''+\cdots+b_n''\\ &=(c+(-b_1)+\cdots+(-b_n)+b_1''+\cdots+b_n''\\ &=c+[(-b_1)+\cdots+(-b_n)+b_1'']+b_2''+\cdots+b_n'' \in c+nB,\end{aligned}$$

т.е. $a+nB \subseteq c+nB$. Според тоа е $c+nB=a+nB$.

Од докажаното следува дека било кои два комплекса се или дисјунктни, или еднакви.

Нека е B n-подмодул на n-модулот A. Да го означиме со A/B множеството од сите комплекси на n-модулот A по n-подмодулот B, т.е.

$$A/B=\{a+nB;\ a \in A\}.$$

Да дефинираме $n+1$-арна операција на A/B со

$$(a_0+nB)+(a_1+nB)+\cdots+(a_n+nB)=(a_0+a_1+\cdots+a_n)+nB, \tag{3}$$

за секоја $n+1$-торка $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$, и множење на елементите од прстенот R со елементите од A/B со

$$r(a+nB)=ra+nB \tag{4}$$

за секој $r \in R$. Со вака дефинираните операции, A/B е n-модул, кој е наречен *n-факторомодул* на n-модулот A по n-подмодулот B.

Нека е $f: A \to A'$ n-хомоморфизам. Бидејќи $\operatorname{Ker} f$ и $\operatorname{Im} f$ се n-подмодули од A и A' соодветно, $A/\operatorname{Ker} f$ и $A'/\operatorname{Im} f$ се n-фактормодули.

За n-хомоморфизмот $f: A \to A'$ велиме дека е *n-мономорфизам* ако f е инјекција, т.е. $f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$, а *$n$-епиморфизам* ако f е сурјекција, т.е. $(\forall a' \in A')$ $(\exists a \in A)$ $f(a)=a'$. Како и за обичните R-хомоморфизми имаме:

Лема 3. *Следниве тврдења за n-хоморфизмот $f: A \to A'$ се еквивалентни:*

(i) *f е n-мономорфизам*; (ii) $f(a)=o \Rightarrow a=o$; (iii) $\operatorname{Ker} f = 0$.

Исто така:

Лема 4. *За n-хомоморфизмот $f: A \to A'$ следниве тврдења се еквивалентни:*

(i) *f е n-епиморфизам*; (ii) $A'=\operatorname{Im} f$; (iii) $A/\operatorname{Ker} f \cong A'$.

Од секоја (бинарна) група може да се добие n-група со земање на $n+1$ елемент наеднаш. Но, и обратно: ако е A комутативна n-група со единствен неутрален елемент o, може да се дефинира (бинарна) операција $\hat{+}$ на A и да се претвори A во (бинарна) група. Да ставиме

$$a \hat{+} b = a+b+\underbrace{o+\cdots+o}_{n-1}$$

за секој пар $a, b \in A$. Операцијата $\hat{+}$ е комутативна и асоцијативна, ое неутрален елемент и за секој пар $a, b \in A$, $a \neq o$, равенките $a \hat{+} x = b$ и $y \hat{+} a = b$ имаат решение x односно y во A. Според тоа, $(A, \hat{+})$ е комутативна група, која понатаму ќе ја означуваме со $\overline{A}$.

Ако е A n-модул, тогаш групата $\overline{A}$, која кореспондира на n-групата A, може да се снабди со R-модулна структура. Имено, за пресликувањето $(r, a) \to ra$ од $R \times \overline{A}$ во $\overline{A}$ се исполнети условите $r(a \hat{+} b) = ra \hat{+} rb$, $(r+s)a = ra \hat{+} sa$, како и $(rs)a = r(sa)$ и $1a=a$. Значи, на секој n-модул A може да му се придружи (бинарен) модул $\overline{A}$.

Секој n-хомоморфизам $f: A \to A'$ е и пресликување од $\overline{A}$ во $\overline{A}'$. Бидејќи е

$$f(a \hat{+} b) = f(a+b+\underbrace{o+\cdots+o}_{n-1}) = f(a)+f(b)+\underbrace{o+\cdots+o}_{n-1} = f(a) \hat{+} f(b)$$

и $f(ra) = rf(a)$, за секој $r \in R$ и $a, b \in A$, тогаш $f: \overline{A} \to \overline{A}'$ е R-хомоморфизам.

Зборувајќи за класата $\mathcal{M}_n$ од сите n-модули и нивните n-хомоморфизми можеме да зборуваме паралелно за класата $\overline{\mathcal{M}_n}$ од сите оние модули и нивните хомоморфизми коишто се добиени на гореопишаниот начин. Притоа, секој n-мономорфизам (n-епиморфизам) $f: A \longrightarrow A'$ е и мономорфизам (епиморфизам) од $\overline{A}$ во $\overline{A'}$, како и обратно.

Дефинирајќи *n-проективност* и *n-инјективност* на соодветен начин, т.е. како што се дефинираат овие поими во произволна категорија, имаме:

Теорема 1. *n-модулот P е n-проективен (n-инјективен) ако, и само ако, модулот $\overline{P}$ е проективен (инјективен).*

Доказ. Доказот ќе го спроведеме само за проективност. Нека е P n-проективен и нека го разгледаме дијаграмот

$$\begin{array}{ccc} & \overline{P} & \\ & \downarrow f & \\ \overline{B} & \xrightarrow{v} \overline{C} & \longrightarrow 0, \end{array} \tag{D. 1}$$

каде што f е произволен хомоморфизам, а v е произволен епиморфизам. Ако го земеме за $h: \overline{P} \longrightarrow \overline{B}$ оној n-хомоморфизам $h: P \longrightarrow B$ кој го пополнува комутативно дијаграмот

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow f & \\ B & \xrightarrow{v} C & \longrightarrow 0, \end{array} \tag{D. 2}$$

тогаш е $vh(x) = f(x)$ за секој $x \in P$, па значи $\overline{P}$ е проективен.

Обратно, нека е $\overline{P}$ проективен. Тогаш секој дијаграм од облик (D. 2) со n-хомоморфизам $f: P \longrightarrow C$ и произволен n-епиморфизам $v: B \longrightarrow C$ можеме да го пополниме комутативно со оној n-хомоморфиазм $h: P \longrightarrow B$ кој, како хомоморфизам од $\overline{P}$ во $\overline{B}$, го пополнува комутативно соодветниот дијаграм од облик (D. 1). Според тоа, P е n-проективен.

3. Покривка на n-модул. Нека S е n-полугрупа, во која операцијата е означена со $[\cdot\cdot]$, а $F(\circ)$ полугрупа слободно генерирана со множеството S, т.е. F е множеството од сите конечни низи $a_1, a_2, \ldots, a_j, a_\gamma \in S$, на кое е дефинирана операцијата „$\circ$" — суперпозиција на низи. Да дефинираме во F релација φ со:

$$a_1 a_2 \cdots a_i \quad \varphi \quad b_1 b_2 \cdots b_j \qquad \Longleftrightarrow$$

постои низа $c_1, c_2, \cdots, c_p \in S$, така што е

$$a_1 = [c_1 \cdots c_{k_1}],\ a_2 = [c_{k_1+1} \cdots c_{k_2}], \cdots,\ a_i = [\cdots c_p],$$

$$b_1 = [c_1 \cdots c_{m_1}],\ b_2 = [c_{m_1+1} \cdots c_{m_2}] \cdots,\ b_j = [\cdots c_p], \tag{5}$$

(при што се смета $[x] = x$). Потоа да дефинираме во F релација ψ, која е транзитивно проширување на φ:

2*

$$u\psi v <=> (\exists u_1, u_2, \cdots, u_k \in F)\, u \varphi u_1, u_1 \varphi u_2, \cdots, u_k \varphi v. \tag{6}$$

Релацијата ψ е конгруенција на F, па множеството $F/\psi = T$, во однос на операцијата „$\circ$", дефинирана со:

$$x \circ y = z \text{ во } F <=> x\psi \circ y\psi = z\psi \text{ во } T \tag{7}$$

е полугрупа. Полугрупата T го содржи S како свое подмножество; секој елемент $b \in T$ може да се напише како производ од облик: $b = a_0 \circ a_1 \cdots \circ a_i$, $a_\gamma \in S$; за секоја $n+1$-торка $a_0, a_1, \ldots, a_n \in S$ важи равенството $[a_0\, a_1 \cdots a_n] = a_0 \circ a_1 \circ \cdots \circ a_n$. Според тоа, полугрупата T е покривка на n-полугрупата S. Како што споменавме, за n-полугрупите и n-групите добро се познати следниве резултати (в. нпр. Post [1] и Чупона [1], [2]):

1°. *Секоја n-полугрупа може да се покрие со полугрупа.*

2°. *Покривката на секоја n-група е група. Ако n-групата е комутативна, тогаш и покривната група е комутативна.*

Нека е A n-модул (со една единствена нула), чија $n+1$-арна операција е адитивно означена. Според **1°** и **2°**, за n-групата A постои покривна комутативна група. Оваа група — покривка на A — понатаму ќе ја означуваме со $\tilde{A}$. Да споменеме дека множеството A го сочинуваат сите „збирови" од облик $a_1 + a_2 + \cdots + a_i$, $1 \leq i \leq n$, $a_\gamma \in A$, т.е.

$$\tilde{A} = A \cup 2A \cup 3A \cup \cdots \cup nA,$$

при што е $iA \cap jA = \emptyset$ за $i \neq j$. Операцијата на $\tilde{A}$ ќе ја означуваме со „$+$"; ако $\tilde{a} = a_1 + \cdots + a_i$ и $\tilde{b} = b_1 + \cdots + b_j$ се произволни елементи од A, тогаш е

$$\begin{aligned}\tilde{a} + \tilde{b} &= a_1 + \cdots + a_i + b_1 + \cdots + b_j \text{ за } i+j \leqslant n \\ &= [a_1 + \cdots + a_i + b_1 + \cdots + b_{n-i+1}] + b_{n-i+2} + \cdots + b_j \text{ за } i+j > n.\end{aligned}$$

Нека е $\tilde{a}$ произволен елемент во $\tilde{A}$, $\tilde{a} = a_1 + \cdots + a_i$. Да дефинираме на A надворешно множење со елементите од R на следниов начин:

$$r\tilde{a} = r(a_1 + \cdots + a_i) = ra_1 + \cdots + ra_i,\ r \in R. \tag{8}$$

Ќе покажеме дека ова множење е добро дефинирано. Нека е $\tilde{a} = b_1 + \cdots + b_i$ друго претставување на елементот $\tilde{a}$ во $\tilde{A}$; тогаш е

$$a_1 + \cdots + a_i = b_1 + \cdots + b_i <=> a_1 \cdots a_i\, \psi\, b_1 \cdots b_i \tag{9}$$

Ако е $a_1 \cdots a_i\, \varphi\, b_1 \cdots b_i$, тогаш постои низа $c_1, \cdots, c_p \in A$ таква што е

$$\begin{aligned} a_1 &= [c_1 + \cdots + c_j], \ \ldots, \ a_i = [\cdots + c_p], \\ b_1 &= [c_1 + \cdots + c_m], \ \cdots, \ b_i = [\cdots + c_p]. \end{aligned} \tag{10}$$

(Притоа, $[\cdots]$ означува дека се извршува $n+1$-арната операција во A, па значи индексите, на пример j и m, се природни броеви од облик $kn+1$.)

$$\begin{aligned} ra_1 &= [rc_1 + \cdots + rc_j], \ldots, \ ra_i = [\cdots + rc_p], \\ rb_1 &= [rc_1 + \cdots + rc_m], \ \cdots, \ rb_i = [\cdots + rc_p), \end{aligned} \tag{11}$$

од каде што следува

$$(ra_1) \cdots (ra_i) \, \varphi \, (rb_1) \cdots (rb_i). \tag{12}$$

Според тоа, имаме:

$$a_1 \cdots a_i \, \varphi \, c_{11} \cdots c_{i1} \, \varphi \cdots \varphi \, c_{1k} \cdots c_{ik} \, \varphi \, b_1 \cdots b_i, \tag{13}$$

па применувајќи го (12), добиваме

$$(ra_1) \cdots (ra_i) \, \varphi \, (rc_{11}) \cdots (rc_{i1}) \, \varphi \cdots \varphi \, (rc_{1k}) \cdots (rc_{ik}) \, \varphi \, (rb_1) \cdots (rb_i),$$

т.е. $(ra_1) \cdots (ra_i) \, \psi \, (rb_1) \cdots (rb_i)$. Значи, множењето $r\tilde{a}$ со (8) е добро дефинирано.

Да провериме сега дали абеловата група A со вака дефинираното надворешно множење станува R-модул.

Нека се $\tilde{a} = a_1 + \cdots + a_i$ и $\tilde{b} = b_1 + \cdots + b_j$ произволни елементи од $\tilde{A}$; тогаш е $\tilde{a} + \tilde{b} = a_1 + \cdots + a_i + b_1 + \cdots + b_j$. Ако е $i + j \leqslant n$, тогаш, применувајќи го (8), имаме:

$$r(\tilde{a} + \tilde{b}) = ra_1 + \cdots + ra_i + rb_1 + \cdots + rb_j = r\tilde{a} + r\tilde{b}.$$

Ако е $i + j > n$, тогаш е $\tilde{a} + \tilde{b} = [a_1 + \cdots + a_i + b_1 + \cdots b_{n-i+1}] + b_{n-i+2} + \cdots + b_j$, па

$$\begin{aligned} r(\tilde{a} + \tilde{b}) &= r[a_1 + \cdots + a_i + b_1 + \cdots + b_{n-i+1}] + rb_{n-i+2} + \cdots + rb_j = \\ &= ra_1 + \cdots + ra_i + rb_1 + \cdots + rb_j = \\ &= r\tilde{a} + r\tilde{b}. \end{aligned}$$

Значи, првото од равенствата (1) (за бинарен модул) е исполнето, а исполнети се и равенствата $(rs)\tilde{a} = r(s\tilde{a})$ и $1\tilde{a} = \tilde{a}$. Останува да провериме дали важи, $(r+s)\,\tilde{a} = r\tilde{a} + s\tilde{a}$.

Нека е $\tilde{a}=a_1+\cdots+a_\nu$ произволен елемент од $\tilde{A}$ и $r, s\in R$; имаме:

$$(r+s)\tilde{a}=(r+s)a_1+\cdots+(r+s)\,a_\nu=(r+s+\underbrace{o+\cdots+o}_{n-1})a_1+\cdots+(r+s+\underbrace{o+\cdots+o}_{n-1})$$
$$=ra_1+\cdots+ra_\nu+s\,a_1+\cdots+sa_\nu+(n-1)\,oa_1+\cdots+(n-1)\,oa_\nu$$
$$=r\tilde{a}+s\tilde{a}+\nu\,(n-1)\,o.$$

Бидејќи $\nu\,(n-1)\,o$ во општ случај не е нула во $\tilde{A}$, имаме $(r+s)\,\tilde{a}\neq r\tilde{a}+s\tilde{a}$, т.е. вториот од условите (1) (за бинарен модул) не е исполнет. (Дека е $(r+s)\,\tilde{a}\neq\neq r\tilde{a}+s\tilde{a}$ се гледа и по тоа што $(r+s)\,\tilde{a}\in\nu A$, додека $r\tilde{a}+s\tilde{a}\in 2\nu A$, а $2\nu A\cap\nu A=\emptyset$ за секој $\nu\neq n$.) Според тоа:

Теорема 2. *Покривката на n-модул не е модул.*

Во горната проверка видовме дека $(r+s)\,\tilde{a}$ битно зависи од низата $\tilde{a}=a_1+\cdots+a_\nu$, поточно од неговата должина ν. Да ставиме

$$\nu\,(n-1)\,o=\nu\,(\tilde{a}).$$

Сега, ако покрај првиот, третиот и четвртиот од условите (1)(за бинарни модули) наместо вториот го поставиме условот

$$(r+s)\,\tilde{a}=r\tilde{a}+s\tilde{a}+\nu\,(\tilde{a}), \tag{14}$$

$\tilde{A}$ би бил некој систем близок на R-модулите; да го наречеме νR-модул. Во тој случај може да се рече дека покривката на секој n-модул е νR-модул.

Нека е $f: A\to A'$ n-хомоморфизам. Ќе дефинираме пресликување f од νR-модулот $\tilde{A}$ — покривката на n-модулот A, во νR-модулот $\tilde{A}'$ — покривката на n-модулот A', на следниов начин:

$$f(\tilde{a})=f(a_1+\cdots+a_i)\overset{Df}{=}f(a_1)+\cdots+f(a_i), \tag{15}$$

за секој $\tilde{a}\in\tilde{A}$ $(\tilde{a}=a_1+\cdots+a_i,\ a_\gamma\in A)$. Да покажеме дека ова пресликување е добро дефинирано. Нека е $\tilde{a}\in\tilde{A}$ претставен на друг начин: $\tilde{a}=b_1+\cdots+b_i$, $b_\gamma\in A$; тогаш ќе го имаме (9), па според (10), односно (13), добиваме

$$f(a_1)=[f(c_1)+\cdots+f(c_j)],\ \cdots,\ f(a_i)=[\cdots+f(c_p)],$$

$$f(b_1)=[f(c_1)+\cdots+f(c_m)],\ \cdots,\ f(b_i)=[\cdots+f(c_p)],$$

од каде што следува

$$f(a_1)\cdots f(a_i)\,\varphi\,f(b_1)\cdots f(b_i), \tag{16}$$

односно

$$f(a_1)\cdots f(a_i)\,\varphi\,f(c_{11})\cdots f(c_{i1})\,\varphi\cdots$$
$$\cdots\varphi\,f(c_{1k})\cdots f(c_{ik})\,\varphi\,f(b_1)\cdots f(b_i),$$

од каде што пак, применувајќи го (16), следува:

$$f(a_1)\cdots f(a_i)\,\psi\, f(b_1)\cdots f(b_i).$$

Од последново следува дека пресликувањето $\tilde{f}$ со (15) е добро дефинирано. Нека $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{A}$, $\tilde{a}=a_1+\cdots+a_i$, $\tilde{b}=b_1+\cdots+b_j$. Ако е $i+j \leqslant n$, тогаш

$$\begin{aligned} f(\tilde{a}+\tilde{b}) &= f(a_1+\cdots+a_i+b_1+\cdots+b_j) = \qquad \text{според (15)} \\ &= f(a_1)+\cdots+f(a_i)+f(b_1)+\cdots+f(b_j) \\ &= f(\tilde{a})+f(\tilde{b}), \end{aligned}$$

а ако е $i+j > n$, тогаш е

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{a}+\tilde{b}) &= f([a_1+\cdots+a_i+b_1+\cdots+b_{n-i+1}]+b_{n-i+2}+\cdots+b_j) \\ &= f(a_1+\cdots+a_i+b_1+\cdots+b_{n-i+1}+f(b_{n-i+2})+\cdots f(b_j) \\ &= f(a_1)+\cdots+f(a_i)+f(b_1)+\cdots+f(b_j) \\ &= \tilde{f}(\tilde{a})+\tilde{f}(\tilde{b}); \end{aligned}$$

потоа, за секој $r \in R$ имаме

$$\begin{aligned} \tilde{f}(r\tilde{a}) &= f(ra_1+\cdots+ra_i) = f(ra_1)+\cdots+f(ra_i) \\ &= rf(a_1)+\cdots+rf(a_i) = r(f(a_1)+\cdots+f(a_i)) \\ &= r\tilde{f}(\tilde{a}). \end{aligned}$$

Според тоа, пресликувањето $\tilde{f}: \tilde{A} \to \tilde{A}'$ е R-хомоморфизам. Но, бидејќи $\tilde{f}$ е хомоморфизам на νR-модули, понатаму за f ќе велиме дека е νR-хомоморфизам. Значи, на секој n-хомоморфизм $f: A \to A'$ може да му се придружи νR-хомоморфизмот $\tilde{f}: \tilde{A} \to \tilde{A}'$ на соодветните покривачи; тој претставува „продолжение" на n-хомоморфизмот f, а исто така може да се смета дека f е рестрикција од f на A, $\tilde{f}\,|\,A=f$.

Сега, паралелно со класата n-модули можеме да ја разгледаваме класата на нивните покривачи (т.е. νR-модулите), и со класата од n-хомоморфизми — класата на нивните продолженија (т.е. νR-хомоморфизмите).

Да забележиме дека неутралниот елемент (нулата) на групата $\tilde{A}$, кој е означен со $\hat{o}$, е елемент од nA, т.е. $\hat{o}=\underbrace{o+\cdots+o}_{n}$, каде што o е нулата на n-групата A.

Нека е $f: A \to A'$ n-хомоморфизам и $\tilde{f}: \tilde{A} \to \tilde{A}'$ неговото продолжение. Означувајќи ја нулата во $\tilde{A}'$ исто така со $\hat{o}$, нека е $f(\tilde{a})=\hat{o}$, $\tilde{a}=a_1+\cdots+a_i$. Тогаш е $\hat{o}=f(\tilde{a})=f(a_1)+\cdots+f(a_i)$, па бидејќи е $\hat{o}=\underbrace{o+\cdots+o}_{n}=no$, т.е. $\hat{o} \in nA'$, тогаш $f(a_1)+\cdots+f(a_i)\in nA'$, а тоа значи дека има n членови $f(a_\gamma)$, т.е. мора да биде $i=n$. Според тоа:

$$\tilde{f}(\tilde{a})=\hat{o} \Rightarrow \tilde{a}\in nA, \text{ т.е. } \tilde{a}=a_1+\cdots+a_n. \tag{17}$$

Лема 5. *n-хомоморфизмот $f: A\to A'$ е n-мономорфизам тогаш, и само тогаш, кога $\tilde{f}: \tilde{A}\to\tilde{A}'$ е νR-мономорфизам.*

Доказ. Нека $f: A\to A'$ е n-мономорфизам и $f(\tilde{a})=\hat{o}$; според (17) имаме $\tilde{a}=a_1+\cdots+a_n$, $a_\gamma\in A$, па е $\hat{o}=\tilde{f}(\tilde{a})=f(a_1)+\cdots+f(a_n)$. Потоа, нека е $a_0\in A$ произволен. Тогаш е

$$f(a_0+a_1+\cdots+a_n)=f(a_0)+f(a_1)+\cdots+f(a_n)=f(a_0)+\hat{o}=f(a_0),$$

па според дефиницијата на n-мономорфизам, т.е. од $f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$, добиваме $a_0+a_1+\cdots+a_n=a_0$, од каде што следува $a_1+\cdots+a_n=\hat{o}$. Значи, ако f е n-мономорфизам, тогаш $\tilde{f}(\tilde{a})=\hat{o}$ повлекува $\tilde{a}=\hat{o}$, па спроед Лемата 3, $\tilde{f}$ е мономорфизам.

Обратно, нека $\tilde{f}$ е мономорфизам и $f(a)=o$. Бидејќи $a\in A\subseteq\tilde{A}$ и $f=\tilde{f}\,|\,A$, имаме $o=f(a)=\tilde{f}\,|\,A\,(a)\Rightarrow a=o$, т.е. f е n-мономорфизам.

Лема 6. n-хомоморфизмот $f: A\to A'$ е n-епиморфизам ако, и само ако, $f: \tilde{A}\to\tilde{A}'$ е νR-епиморфизам.

Доказ. Нека f е n-епиморфизам и $\tilde{a}'$ произволен елемент од $\tilde{A}'$. Тогаш е $\tilde{a}'=a'_1+\cdots+a'_i=f(a_1)+\cdots+f(a_i)=\tilde{f}(\tilde{a})$, каде што е $\tilde{a}=a_1+\cdots+a_i$, $a_\gamma\in A$ и $a'_\gamma\in A'$. Според тоа, $\tilde{f}$ е епиморфизам.

Обратно, нека е $\tilde{f}$ епиморфизам и a' произволне лемент во A'. Бидејќи е $A'\subseteq\tilde{A}'$, тогаш $a'\in\tilde{A}'$, а бидејќи $\tilde{f}$ е епиморфизам, постои $a\in\tilde{A}$ таков што е $f(a)=a'$. Да покажеме дека $a\in\tilde{A}$. Бидејќи $a\in\tilde{A}$, тој може да се претстави во обликот $a=a_1+\cdots+a_i$, $a_\gamma\in A$. Имаме

$$a'=\tilde{f}(a)=\tilde{f}(a_1+\cdots+a_i)=f(a_1)+\cdots+f(a_i)=a'_1+\cdots+a'_i,$$

па значи $a_1'+\cdots+a'_i$ е „возможен збир” во A', т.е. $i=kn+1$. Меѓутоа, бидејќи i не е поголем од n, ќе мора да биде $k=0$, па значи $i=1$. Според тоа, $a\in A$ и $f: A\to A'$ (како рестрикција на νR-епиморфизмот $\tilde{f}$ на A) е n-епиморфизам.

Сега ќе дадеме една врска меѓу проективен n-модул и неговата покривка, како и меѓу инјективен n-модул и соодветниот νR-модул.

Теорема 3. *Покривката $\tilde{P}$ на n-модулот P е проективна (односно инјективна) тогаш, и само тогаш, кога P е n-проективен (односно n-инјективен).*

Д о к а з. Нека е n-модулот P n-проективен и нека го разгледаме дијаграмот

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{P} & \tilde{f} \\ & \tilde{v}\ \downarrow & \\ \tilde{B} \to & \tilde{C} & \to 0, \end{array} \tag{D. 3}$$

каде што $\tilde{v}$ е произволен νR-епиморфизам и $\tilde{f}$ е било кој νR-хомоморфизам. Потоа, нека е $\tilde{x}=x_1+\cdots+x_i$ поризволен елемент од $\tilde{P}$. Тогаш, имајќи предвид дека дијаграмот (D. 2) може комутативно да се пополни со n-хомоморфизмот $h: P \to B$, т.е. $f=vh$, дијаграмот (D. 3) можеме комутативно да го пополниме со νR-хомоморфизмот $\tilde{h}: \tilde{P} \to \tilde{B}$, кој претставува продолжение на n-хомоморфизмот h. Навистина

$$\tilde{v}\tilde{h}(x)=\tilde{v}(h(x_1)+\cdots+h(x_i)=vh(x_1)+\cdots+vh(x_i)=$$
$$=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_i)=\tilde{f}(\tilde{x}) \quad (\tilde{x}\in\tilde{P}).$$

Значи, $\tilde{P}$ е νR-проективен.

Обратно, нека е $\tilde{P}$ проективен и нека го разледаме дијаграмот од облик (D. 2) со произволен n-епиморфизам $v: B \to C$ и произволен n-хомоморфизам $f: P \to C$. Бидејќи дијаграмот на соодветните покривки од облик (D. 3) може комутативно да се пополни со νR-хомоморфизам $\tilde{h}: \tilde{P} \to \tilde{B}$, т.е. $\tilde{f}=\tilde{v}\tilde{h}$, дијаграмот ($D$. 2) може да се пополни комутативно ако се земе n-хомоморфизмот $h: P \to B$, којшто претставува рестрикција на νR-хомоморфизмот $\tilde{h}$ на P. Според тоа, P е n-проективен.

ЛИТЕРАТУРА

М а к л е й н С., Гомология. Изд. „Мир", Москва 1966, стр. 543.
P o s t E. L., Polyadic groups. Trans. Amer. Math. Soc., 48 (1940), 208—350.
R o b i n s o n D. W., n-Groups with identity elements. Math. Magazin, 31 (1958), № 5. 255—258.
Ч у п о н а Г., [1] За асоцијативните конгруенции. Билтен ДМФ Македонија, 13 (1962), 5—12.
[2] За $[m, n]$-прстените. Билтен ДМФ Македонија 16 (1965), 5—10.

Naum Celakoski

ON n-MODULES

Summary

Let R be an associative ring with identity 1 ($\neq 0$), let A be an abelian group and M an abelian n-group (i.e. in M is defined an $(n+1)$-ary commutative and associative operation $* : (x_0, \ldots, x_n) \to * x_0 \ldots x_n$ on M, such that $(\forall a_1, \ldots, a_n, b \in M)$ $(\exists x \in M) * x a_1 \ldots a_n = b$). A is said to be a νR-module, if there are defined two mappings $\nu : a \to \nu(a)$ and $\xi : (r, a) \to ra$ $(\nu : A \to A,\ \xi : R \times A \to A)$, such that:

$$1a=a,\ (rs)a=r(sa),\ r(a+b)=ra+rb,\ (r+s)a=ra+sa+\nu(a), \tag{1*}$$

for every $r, s \in R,\ a, b \in A$.

M is said to be an R-n-module, if there is defined a mapping $\xi : R \times M \to M$ such that the first two of the equations (1*) hold when $a \in M$ and

$$r(* a_0 \ldots a_n) = * (ra_0) \ldots (ra_n), \quad \left(\sum_{i=o}^{n} r_i\right) a = * (r_0 a) \ldots (r_n a)$$

for every $r,\ r_i \in R,\ a,\ a_i \in M$.

The notions of homomorphism, injectivity and projectivity can be introduced in an obvious way.

THEOREM. Let M be an R-n-module.

(i) There exists a zero in $M(*)$, i.e. an element o, such that $* x\mathrm{o} \ldots \mathrm{o} = x$ for every $x \in M$. Further on it is supposed that there exists only one zero.

(ii) If a binary operation „+" is defined with

$$x + y = * xy\mathrm{o} \ldots \mathrm{o},$$

then an abelian group $M(+)$ is obtaind, where M is an R-module, i.e. a νR-module with $\nu(a) = \mathrm{o}$ for every $a \in M$. Denote this module by $\overline{M}$.

(iii) Let $\tilde{M}(+)$ be the free covering of the n-group $M(*)$ (that is: M is a generating set of $\tilde{M}$; $* x_0 \ldots x_n = x_0 + \ldots + x_n$ in $\tilde{M}$; every group $G(+)$ with these properties is a hommorphic image of $\tilde{M}(+)$. If $a = a_1 + \ldots + a_\nu \in \tilde{M},\ a_i \in M$, and if ra is defined by

$$ra = ra_1 + \ldots + ra_\nu$$

then M is a νR-module, where $\nu(a) = \nu(n-1)\mathrm{o}$ for every $a \in \tilde{M}$. (Note that the „zero" in $\tilde{M}$ is $\hat{\mathrm{o}} = n\mathrm{o}$, where o is the zero in M.)

(iv) M is injective (proejctive) if and only if one of the modules $\overline{M}$, $\tilde{M}$ is injectvie (projective).